

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF

XLVIII. KÖTET

JUBILÁRIS KÖTET A TÁRSULAT
ÖTVENÉVES FENNÁLLÁSA ALKALMÁBÓL



BUDAPEST, 1941

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

50255





AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TANGL KÁROLY EMLÉKÉRMÉ

PÁTZAY PÁL SZOBRÁSZMŰVÉSZ ALKOTÁSA



A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

JUBILÁRIS NEGYVENNYOLCADIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

	Oldal
ALEXITS GYÖRGY: A Fourier-sor Cesàro-közepeivel való approximáció nagyságrendjéről	410
— Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier	421
BEKE MANÓ: Egy differenciális függvényegyenlet	387
— Über eine Funktionaldifferentialgleichung	392
EGYED LÁSZLÓ: Végtelen gráfok jölirányíthatóságáról	505
— Über die wohlgerichteten unendlichen Graphen	509
FELDHEIM ERVIN: A Jacobi-polinomok elméletéhez	453
— Contributions à la théorie des polynomes de Jacobi	503
GRÜNWALD GÉZA: A Hermite-féle interpolációról	272
— Über die Hermite'sche Interpolation	284
HAJÓS GYÖRGY: Többméretű terek egyszeres befedése kockarácscsal	37
— Einfache Bedeckung mehrdimensionaler Räume mit Würfelgitter	63
— A rácsparallelogrammákról	398
— Über Gitterparallelogrammen	400
W. HEISENBERG: Goethe és Newton színelmélete	543
— Die Newton'sche und Goethe'sche Farbenlehre	560
KALMÁR LÁSZLÓ: A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei és eredményei	65
— Zielsetzungen, Methoden und Ergebnisse der Hilbert'schen Beweistheorie	116
KÁRTESZI FERENC: A parabolával hiperoszkuláló egyenlőoldalú hiperbolák rendszere	193
— Über das System der gleichseitigen Hyperbeln, die eine Parabel hyperoskulieren	201
KLUG LIPÓT: Konjugált kúpszelethármasok és különös eseteik	144
— Konjugierte Kegelschnitt-Tripel und ihre speziellen Fälle	161
KÖNIG DÉNES: Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat első ötven éve	7
— Les premières cinquante années de la Société de Mathématiques et de Physique de Budapest	32
KOVÁCS ISTVÁN: A kétatomos molekulák elméletének alapjai	334
— Über die Grundlagen der Theorie des zweiatomigen Moleküls	350
KOZMA BÉLA: Az Al^{+} - és Al^{2+} -ion energiájának meghatározása az alapállapotban	351
— Bestimmung der Eigenfunktionen und Energie der Valenzelektronen des Al^{+} -Ions im Grundzustande	368
MAKAI ENDRE: Bizonyos másodrendű differenciálegyenletek sajátértékeinek becslése	510
— Eine Eigenwertabschätzung bei gewissen Differential-Gleichungen zweiter Ordnung	531

	Oldal
SZŐKEFALVI NAGY BÉLA: Egy Carlson-féle és néhány azzal rokon egyenlőtlenségről	162
— Über Carlson'sche und verwandte Ungleichungen	174
SZŐKEFALVI NAGY GYULA: Végesrendű geometria	207
— Geometrie endlicher Ordnung	242
NOVOBÁTZKY KÁROLY: Többtestprobléma a quantumelméletben ..	312
— Mehrkörperproblem in der Quantentheorie	333
ORTVAY RUDOLF: Jelentés a Társulat jubileuma alkalmából befolyt adományokról	34
PÉTER RÓZSA: Az axiomatikus módszer korlátai	120
— Die Schranken der axiomatischen Methode	141
RADOS GUSZTÁV: Bevezető	1
SAS ERNŐ: Az ellipszis egy szélsőértéktulajdonságáról	533
— On a certain extremum-property of the ellipse	542
SÓLYI ANTAL: A Haar-féle variációs lemma és alkalmazásai	285
— Das Haar'sche Lemma in der Variationstheorie und seine Anwendungen	311
SZÁSZ PÁL: Az elliptikus, az euklidesi és a hiperbolikus geometria szétválasztása	243
— Absonderung der elliptischen, euklidischen und hyperbolischen Geometrie	271
— A hiperbolikus trigonometriáról	401
— Über die hyperbolische Trigonometrie	408
TÓTH FERENC: A közönséges elsőrendű differenciálegyenletek egy újabb közelítő megoldása és az elért pontosságnak az eddigieknél jobb megbecslése	176
— Eine neue Annäherungsmethode für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung und eine neue Abschätzung der erreichten Genauigkeit	191
TURÁN PÁL: Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról	436
— Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie	451
VARGA OTTÓ: Az invariáns differenciál megállapítása a Finsler-féle terekben	423
— Bestimmung des invarianten Differentials in Finsler'schen Räumen	434
VERESS PÁL: Diophantosi egyenletek grafikus megoldása	393
— Graphische Lösung von diophantischen Gleichungen	397

*

Klug Lipót alapítvány	36
Kitűzött feladatok (1—7)	203, 369, 562
Megoldott feladatok (1—3)	563
Irodalom	370
Társulati élet	377
Tanulmányversenyek	571

50255

XII

235

MATEMATIKAI és FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF

XLVIII. KÖTET

JUBILÁRIS KÖTET
A TÁRSULAT ÖTVENÉVES FENNÁLLÁSA
ALKALMÁBÓL

1. RÉSZ

BUDAPEST, 1941

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT



TARTALOMJEGYZÉK.

	Odal
RADOS GUSZTÁV: Bevezető	1
KÖNIG DÉNES: Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat első ötven éve	7
ORTVAY RUDOLF: Jelentés a Társulat jubileuma alkalmából befolyt adományokról	34
Klug Lipót alapítványa	36
HAJÓS GYÖRGY: Többmértetű terek egyszeres befedése kockarácscsal	37
KALMÁR LÁSZLÓ: A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, mód- szerei és eredményei	65
PÉTER RÓZSA: Az axiomatikus módszer korlátai	120
KLUG LIPÓT: Konjugált kúpszelethármasok és különös eseteik	144
SZŐKEFALVI NAGY BÉLA: Egy Carlson-féle és néhány azzal rokon egyenlőtlenségről	162
TÓTH FERENC: A közönséges elsőrendű differenciálegyenletek egy újabb közelítő megoldása és az elért pontosságnak az eddigieknél jobb megbecslése	176
KÁRTESZI FERENC: A parabolával hiperoszkuláló egyenlőoldalú hiper- bolák rendszere	193
EGERVÁRY JENŐ: Három kitűzött feladat	203
Pénztárosi kimutatás a befolyt összegekről	204

Tagjainkhoz.

Társulatunkhoz befolyt jubiláris adományok, melyekről e füzetben számolunk be, lehetővé teszik, hogy lapunk jelen kötetét és valószínűleg néhány további kötetet (melyekben a fizika is megfelelően képviselve lesz) jelentékenyen megnövesztett terjedelemben küldhessünk szét tagjainknak.

Ebből az alkalomból t. tagjaink segítségét is kérjük, fel-szólítva őket, hogy

új tagokat szerezzenek Társulatunknak.

A tagokul ajánlottak nevét, foglalkozását és lakáscímét kérjük az ügyvezető titkárral (Ortvay Rudolf, Budapest, VIII. Múzeum-körút 4/c, Egyetemi elméleti fizikai intézet) közölni.

BEVEZETŐ.*

Társulatunk az idén ünnepli félszázados fennállását. Zajos és feltűnést keltő ülések mellőzésével, tagjaink — hivatásuknak tudatában — a Társulat alapításának 50-edik évfordulóját azzal a fogadalommal óhajtják ünnepelni, hogy a magyar közművelődés emelésére irányuló munkásságukat ezentúl még fokozottabb mértékben és erejüknek teljes megfeszítésével fogják végezni, mert úgy vélik, hogy a hazát ily módon legjobban szolgálják. Tartozunk ezzel Társulatunk nagynevű alapítói emlékének is, akik a hazai művelődés érdekében szakadatlan, áldozatos és fényes eredményeket érlelő munkájukkal soha el nem halványuló érdemeket szereztek.

Kegyeleti kötelességet teljesítünk, ha mindenekelőtt mélységes hálaérzettel Társulatunk alapítóiról emlékezünk meg. Br. Eötvös LORÁND, KÖNIG GYULA és id. SZILY KÁLMÁN, a magyar tudományosságnak e maradandó büszkeségeiben tiszteljük Társulatunknak alapítóit. Az ő bölcsességüknek sikerült Társulatunknak oly szervezetét létesíteni, amely fennállását az utolsó félszázadnak alapokat feldöntő viharai közepette is biztosítani képes volt.

E kegyelettanúsításon felül tartozunk még azzal a vallomással is, hogy az ő példaadásuk erősítette meg bennünk azt a meggyőződést, hogy a tudomány önzetlen szolgálatánál nemesebb és az egész emberiségre hasznosabb tevékenység alig képzelhető.

Minden tudománynak legfőbb feladata — amennyiben ez emberileg lehetséges — az igazságnak kiderítése, annak előítélettel, fer-

* Elnöki megnyitó beszéd a Társulat 1941. jan. 30-án tartott jubiláris ülésén.

dítéssel s babonával szemben való védelme. Ezzel azonban nemcsak az emberiség ismeretanyagát gyarapítja, hanem egyszersmind magas etikai hivatást is teljesít, mert az igazság ismerete megóvjaa az embereket féktelen túlzásoktól, felszínes, könnyelmű általánosításoktól és az ezekből folyó erőszakosságtól. Ily módon az igazság szeretete az igazságosságnak egyik legerősebb biztosítéka lévén, ez az emberi erkölcsiségnek is egyik legszilárdabb támasza.

Azok a tudományok, a matematika és fizika, amelyeknek művelése és terjesztése Társulatunknak feladata, eszményi módon szolgálják az igazságnak fölkutatását. Van e még más tudomány, mely úgy mint az égi testek mechanikája, arra képes, hogy akár ezer év múlva bekövetkezendő eseményeket másodpernyi pontossággal megjövendöljön, amint LEVERRIER képes volt, pusztán számítás útján egy ember szemétől addig sohasem látott bolygót, a Neptunt, felfedezni.

Már GALILEI jelentette ki, hogy a természet törvénykönyve a matematika nyelvén van megírva. Ily módon természetes az a szövetség, amely Társulatunkban a matematikusok és fizikusok között létesült és hogy azok mindenkor kutató munkájukban segítségre való készséggel egymást támogatják.

Társulatunk előadóülésein és folyóiratában egyetemi és középiskolai tanárok együttesen működven, áthidalódik az az űr, mely előbb egyetem és gimnázium között tátongott. E mellett ez az együttműködés a középiskolai tanárok részére egy állandó továbbképző tanfolyamot pótol.

Újabb időben divatos nálunk a matematikát és fizikát szembeállítani az ú. n. spirituális tudományokkal és azokat lebecsülni, sőt a középiskolában azoknak oktatását az eddiginél szűkebb térre szorítani. Hát ez az elbánás merőben félreértésen alapszik. Nincsen tudomány, amely a matematikánál spirituálisabb lenne és amelynek művelői a matematikusoknál önzetlenebbek volnának, akik már eleve lemondanak sokszor éveken át folytatott fejtörő munkájuknak megfelelő anyagi elismeréséről és a tömegnek tapsairól is, mert tudják, hogy kutatásaik eredményeit azoknak elvontságánál fogva a tömeggel megértetni nem képesek. A fizikát és

annak a technikára való alkalmazásait pedig csak azért ócsárolni, mert a gazdasági életre is kihatnak, helytelen. Kétségtelen, hogy a fizikusokat is ugyanazon eszményi törekvés ösztönzi kutató munkára, mint a matematikusokat és hogy a fizika eredményeit fölhasználó technikusokat is az a szándék vezeti, hogy korszakalkotó találmányaikkal az emberiség jólétét előmozdítsák. Hogy mások e találmányokkal visszaélnek, arról a technikusok nem tehetnek és a legnagyobb igazságtalanság ezért őket vádolni és szidalmazni. Hogy a széles néprétegek műveltségének emelésére alkalmas rádiót hazug hírek terjesztésére és félrevezetésre fölhasználják, arról MARCONI nem tehet. A géptechikusok is ártatlanok abban, hogy ugyanazon repülőgépek, melyek a békés forgalmi eszközök legkiválóbbjai közé tartoznak és amelyek felhasználása alkalmas arra, hogy műtetre szoruló betegnek gyors szállításával életét megmentse, ezer és ezer ember legyilkolására és városoknak elpusztítására alkalmas fegyverré lesznek, ha róluk nagy magasságból bombákat leejtenek.

Ezeket a visszaéléseket csak az a körülmény teszi lehetővé, hogy a nemzetközi jog nem tudott lépést tartani a kor haladásával. Különben is sokan nem tudják vagy megfedkeznek róla, hogy a világ a XIX. században a háromszorosára fölszaporodott lakosságának fenntartása a technika gépi berendezései és forgalmi eszközeinek fölhasználása nélkül merőben lehetetlen és hogy az emberiségre halálos ítélet jelentőségű volna a technikai vívmányoknak akár csak egy félévre való kicsatolása.

Ha az elmondottak után a technika vaskalapos szidalmazói koncedálnák, hogy a természettudományok és a technika «szükséges rossz», mi a mellett maradunk, hogy ezeknek vívmányai az emberi jólétet előmozdították és hogy azoknak ismerete az emberi műveltségnek mellözhetetlen eleme.

KANT, a nagy német filozófus, kijelentette, hogy exaktnak csak azok a tudományok tekinthetők, melyek eredményeiket a matematika nyelvén kifejezni képesek. Társulatunk az exakt tudományok propagálásával és az iskolára való kihatásával tetemesen hozzájárul ahhoz, hogy nemzeti művelődésünkben a még sokszor

hiányzó exakt gondolkodás tért foglaljon. Ebben nyilvánul Társulatunknak nemzetpedagógiai hatása.

Visszapillantva a lefolyt 50 társulati évünkre, csak néhány kimagasló mozzanatra óhajtom figyelmüket fölhívni.

Társulatunk volt az, amely mint legelső már 1894-ben rendezett tanulóversenyeket azok számára, akik a verseny évében tették le az érettségi vizsgát és, minthogy e versenyeken kitűzött feladatok valóságos tehetségpróbák számba vehetők, a tehetségeknek ma annyira hangoztatott szelekeciója terén úttörő munkát végzett. A mi példaadásunk utánzásra talált néhány évtized után, midőn a tanügyi kormányzatunk e versenyeket más szakokra is kiterjesztette. A mi versenyek juttatása a br. Eötvös-jutalom, mellyel nagynevű alapítónk iránti hálás tiszteletünket óhajtottuk kifejezni. Az eddig megtartott versenyek mindannyian elismerést érdemlő eredménnyel jártak. Néhány évtizeddel később a matematikai versenyekhez fizikai versenyek csatlakoztak, melyeknek jutalmi alapja az akkori nagyérdemű fizikus másodelnökünk KÁROLY IRÉN nagylelkű adományának köszönhető.

Nem kisebb jelentőségű Társulatunknak Kőnig Gyula-jutalma, mely egyetemi rendes és rendkívüli tanárok kizárásával olyan kutatóknak ítélhető oda, akik a matematika terén kiválót alkotnak. Ez a jutalom minden második évben esedékes és eddig az esedékesség minden évben odaítélhető volt, ami fényesen tanúskodik ifjúságunknak a matematika művelésére való tehetsége és rátermettsége mellett.

Összinte örömeinkre szolgál, hogy Társulatunk e két jutalmának laureatusai közül már számosan hazai és előkelő külföldi egyetemeken elfoglalt tanszéküknek díszai és egyetemeik büszkeségei.

Végül megemlékezem némi büszkeséggel arról is, hogy az évek folyamán az előadó asztalunk mellett külföldi kiváló tudósoknak hosszú sorozatát tisztelhattuk, akik érdekesítő előadásokban megismertették velünk kutatásuknak eredményeit. Csak néhány nevet említek: KLEIN F. (Göttinga) a híres német matematikus, DARBOUX G. (Párizs) a francia tud. akadémia örökös titkára, DEBYE P. (Berlin) a Nobel-díjas fizikus, SIERPIŃSKI W. a varsói

akadémia elnöke. Felette megtisztelő reánk, hogy e külföldi kiválóságok meghívás és díjazás nélkül fáradtak hozzánk, hogy velünk személyes érintkezésbe lépjenek. Tagjainknak ekként nagy kutatókkal való eszmecserére nyílt alkalmuk, míg a világ minden részéből jött vendégeink a legjobb benyomással távoztak innen. Így hazánk számos befolyásos külföldi tudósnak barátságát szerezte meg.

Ha még fölemlítjük, hogy Társulatunk működése folytán a hazai tudományos irodalmunk csaknem 50 értékes tartalmú kötetten gyarapodott, akkor nyugodt lelkiismerettel mondhatjuk, hogy a mindenkor sajnosan szegényes anyagi helyzetünk mellett is hivatásunk magaslatán maradtunk.

A világháború pusztításai Társulatunkat is érzékenyen érintették. A trianoni diktátum országunkat és vele együtt taglétszámunkat a harmadrészre leszállította. Pénzünk elértéktelenedése és a nyomdai költségeknek még ezen felüli emelkedése arra kényszerítettek, hogy folyóiratunk terjedelmét is a harmadrészre lecsökkentsük. E száználmasan lesovadt köteteknek kiadását egyedül a Magyar Tudományos Akadémiának a felére leszállított segélye és néhány év óta a kormánynak mérsékelt támogatása tették lehetővé. Hogy folyóiratunkat, a régít megközelítő terjedelemben kiadhassuk, addig is amíg a kormány abba a helyzetbe jut, hogy bennünket erősebben támogasson, kénytelenek voltunk nagyobb iparvállalatok és pénzintézetek támogatását kérni. Örömmel jelenthetem, hogy kérő szavunk visszhangra talált. A tetemes összeg, amellyel Társulatunkat támogatni kegyesek voltak, erőteljesebb működésünket talán néhány évre biztosítani fogja; mi teljes odaadással azon leszünk, hogy annak eredményei megfelelők legyenek. Kedves kötelességet teljesíték, midőn támogatóinknak nagylelkű adományait erről a helyről is mindannyiunk nevében melegen megköszönöm. Szolgáljon nekik elégtételül, hogy e nagyhivatású magyar kultúrintézmény megmentéséhez segélyükkel hozzájárultak.

Isten áldását kérve Társulatunkra, amidőn ez második félszázadának küszöbéhez ért, lelkünkben kívánjuk: legyen ez az

új félszázad az elmultnál eredményekben gazdagabb, dicsőségben fényesebb és hogy benne oly világnak örvendhessünk, amelyben a most dühöngő gyűlöletet igazi felebaráti szeretet váltotta fel.

Abban a reményben, hogy az isteni gondviselés lelkünk e forró kívánságát valóra fogja váltani, megnyitom jubiláris ülésünket.

Rados Gusztáv.

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT
ELSŐ ÖTVEN ÉVE.*

(1891—1941)

A «Mathematikai és Fizikai Társulat» 1891. nov. 5-én tartotta alakuló közgyűlését; alapszabályai 1891. aug. 21-én hagyattak jóvá és így az 1941. év Társulatunk jubiláris éve. Alkalomszerű tehát, hogy a Társulat félévszázados tevékenységéről rövid és összefoglaló jelentést nyujtsunk. E jelentésben nem lesz szó tudományos problémákról és ezt mindenki természetesnek fogja tartani, aki meggondolja, hogy tudományos igazságok feltalálása nem társaságok, hanem egyének feladata. Bármilyen egyesület e téren csak annyit tehet, hogy elősegíti oly körülmények létrejöttét, amelyek megkönnyítik a tudományos kutatást. Idegen tollakkal való ékeskedést jelentene, ha egy társaság, saját tagjai rovására, tudományos sikerekkel akarna kérkedni. Nem feladata ezen összefoglalásnak az sem, hogy a Társulat tagjainak tudományos munkásságát és érdemeit ismertesse vagy méltassa: tudósainknak csupán a Társulattal kapcsolatos tevékenységéről fog itt szó esni.

*

Társulatunk lassú kialakulása visszanyúlik 1885 őszére. A budapesti matematikusok ekkor b. Eötvös Loránd, Hunyady Jenő, König Gyula, Scholtz Ágoston és Szily Kálmán vezetésével magánjellegű «Matematikai Társaság»-gá egyesül-

A Társulat meg- alakulása és első évei.
--

* Titkári beszámoló a Társulat 1941. jan. 30-án tartott jubiláris ülésén.

tek, melynek főcélja volt a matematika újabb haladásairól egymásnak előadásokon beszámolni. Az akkori idők krónikása a következő előadók nevét jegyezte fel: BEIN, BEKE, BODOLA, b. EÖTVÖS, FRÖHLICH, GRUBER, HUNYADY, KÖNIG, KOPP, KRUSPÉR, RADOS GUSZTÁV, RADOS IGNÁC, RÉTHY, SCHLESINGER, SZILY, TÓTÖSSY, WITTMANN. Nem voltak e társaságnak sem elnökei sem alapszabályai és összejöveteleiket egy közönséges vacsorázó asztaltársaságtól csak az ünnepélyes fekete tábla jelenléte különböztette meg. 1890. dec. 18-án Eötvös tartott előadást a földi gravitációról kb. száz meghívott hallgató előtt. Ezen előadás végén — a fizikusok bevonásával — egy szakfolyóirat létesítésének eszméjét vetette fel. Ennek megbeszélésére b. Eötvös LORÁND és KÖNIG GYULA 1891. jan. 15-re értekezletet híttak össze, amelyen nemcsak lap, hanem formszerű társulat alapítása is általános helyesléssel találkozott. Elnökül b. Eötvös LORÁND kéretett fel, aki ekkor már két éve a M. Tud. Akadémia elnöke is volt, jegyzőül pedig a Műegyetem ifjú matematika-professzora, RADOS GUSZTÁV. Majd egy 22-tagú előkészítő bizottság küldetett ki, mely jan. 29-én tartotta első ülését. Itt Eötvös újból kifejtette, hogy milyennek képzei el a megindítandó lapot, hangsúlyozva, hogy tisztán tudományos tartalmú közleményekre gondol. Hozzáfűzte, hogy kezdetben évi 24—30 ívnyi terjedelem elégséges lenne s hogy ívenként 30 forintnyi írói díszteletdíjat vett számításba. Szerkesztőkül RADOS GUSZTÁV és BARTONIEK GÉZA választattak meg. Egy nyolc tagú bizottság elkészítette az alapszabályokat, melyeket az ápr. 30-i ülés elfogadott s a belügyminiszter aug. 21-én jóváhagyott.

Végre 1891. nov. 5-én megtartotta a *«Mathematikai és Fizikai Társulat»* alakuló közgyűlését az egyetemi fizikai intézet nagy előadótermében, ahol mindmáig előadó üléseit és közgyűléseit tartja. Elnök lett b. Eötvös LORÁND, matematikus alelnök KÖNIG GYULA. Fizikus alelnöknek SCHMIDT ÁGOSTON választott meg; ezzel az utóbbi választással a Társulat hangsúlyozni kívánta, hogy súlyt helyez a középiskolai tanárság bevonására s hogy az ő tudományos igényeinek kielégítését elsőrendű feladatának tartja. Titkárok lettek: BARTONIEK GÉZA és RADOS GUSZTÁV, jegyzők: KOPP

LAJOS és KÖVESLIGÉTHY RADÓ, pénztáros: MANDÁK DEZSŐ. Végül választmányi tagnak választott: BEKE MANÓ, CZÓGLER ALAJOS, FRÖHLICH IZIDOR, GRUBER NÁNDOR, HELLER ÁGOST, MAURITZ REZSŐ, RÉTHY MÓR, SCHOLTZ ÁGOST, SZILY KÁLMÁN, THÁN KÁROLY, TÓTÖSSY BÉLA és WAGNER ALAJOS. Nem szerepel e névsorban HUNYADY JENŐ, a műgyetem kiváló matematika-professzora, aki fontos szerepet játszott az első alakuló mozgalmakban, de már 1889-ben meghalt.

Az alapító mozgalmakban kb. 130-an vettek részt, de az alakuló közgyűlésig már 298 tag jelentkezett. Örömmel jegyezzük itt fel közülök azoknak a nevét, akik ma is, jó egészségben, körünkben tartózkodnak: ALTENBURGER GYULA, ARANY DÁNIEL, BEKE MANÓ, DIETZ LAJOS, FRAUNHOFFER LAJOS, HOOR TEMPIS MÓRIC, KLUG LIPÓT, KOVÁCS JÁNOS, RADOS GUSZTÁV, RADOS IGNÁC, RÓNA ZSIGMOND, RUCSINSZKI LAJOS, SUTÁK JÓZSEF. A 298 tagnak a Társulat által közzétett jegyzéke egy eltérést mutat az ABC-rendtől, mert első helyen JEDLIK ÁNYOS szerepel. Az alakuló közgyűlés t. i. az elnök indítványára az «első magyar fizikus»-t a Társulat «első rendes tagjává» választotta meg. JEDLIK, ki ekkor már 91 éves volt, még több ízben részt vett a Társulat életében és 1895. dec. 13-án halt meg. A tagok száma másfél év alatt közel 400-ra nőtt és ez a taglétszám évek hosszú során át alig változott. Ezzel kapcsolatban jegyezte meg az 1910. évi közgyűlésen KÖVESLIGÉTHY ügyvezető titkár: «Ha szám szerint nem gyarapodtunk, az nem azt jelenti, hogy fejlődni nem tudtunk, hanem csak azt, hogy már elejétől minden tényezőt magunkhoz tudtunk vonni, akire ez országban egyáltalában számítani lehet.» A budapesti és vidéki tagok arányszáma (kb. 1:1) szintén alig változott az idők folyamán.

Az előadóülések az alakulás ideje alatt sem szüneteltek. 1891-ben, a Társulat megalakulásáig 10 előadóülés volt. A már formálisan is megalakult Társulat első előadóülésén BEKE MANÓ csak folytatta előadását «a hypercomplex számok elméletéről».

A «*Mathematikai és Fizikai Lapok*» megindításával, amit Társulatunk létrehozói mindenkor a legfőbb célnak és legfőbb eszköznek tekintettek, a Társulat nem várt formális megalakulásáig.



Már 1891 júniusában megjelent az első (kettős) füzet. Az előszóban az elnök és a szerkesztők röviden kifejtik programjukat, az első cikk KÖNIG GYULA dolgozata «A gammafüggvények elemi tárgyalása» címen. 1892 végére megjelent, igazán gazdag tartalommal, a teljes I. kötet, címlapján a «Mathematika» szobrának képével, melynek eredetije a M. Tud. Akadémia palotájának homlokzatát díszíti s melyet Lapunk címlapjain mindmáig megőrzött. Az I. kötet terjedelme 30 ív volt. Ekkora terjedelmet a Lapok egyetlen későbbi kötete sem tudott elérni. Az első kötetek 560-as példányszámban nyomattak ki és ez a szám a mai napig csak csekély ingadozást mutat.

Lapunk nem az első magyar folyóirat volt, mely matematikai és fizikai tudományos dolgozatokat közölt. 1883-ban indult meg KÖNIG GYULA szerkesztésében a M. Tud. Akadémia III. osztályának folyóirata, a «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» és ezt megelőzően, 1878-ban már meg is szűnt — három évi élet után — a «Műegyetemi Lapok», mely számos magas nivójú matematikai és fizikai tárgyú cikket közölt. E lap beszüntetését a szerkesztők (HUNYADY, KÖNIG, SZILY, SZTOCZEK, WARTHA) a következő «mondanivaló»-val indokolták: «E füzettel a Műegyetemi Lapok befejezi pályafutását. Matematikai folyóirat, úgy látszik, nálunk még nem állhat meg anyagi segély nélkül. Persze, ha a matematikának csak félannyi olvasója lenne is, mint amennyi tanítója van, másképp állana a dolog.»

Örülhetünk, hogy ez az azóta oly gyakran idézett keserű megjegyzés nem vette el a Társulat alapítóinak kedvét és bátorságát új lap megindításától. Igaz, hogy Társulatunknak elejétől fogva anyagi segítség állott rendelkezésére, t. i. a M. Tud. Akadémia évenkénti 1000 forintos (= 2000 koronás) pénzadománya, melyért a Társulat nagy hálával adózik. Tagjaink igen nagyra becsülendő áldozatkészsége mellett e segély volt mindenkor a Társulat anyagi létének legfőbb biztosítója. Államsegélyt egészen a világháború végéig nem sikerült kieszközölni. Ami a tagok anyagi hozzájárulását illeti, az alapszabályok a tagsági díjat budapesti tagok számára 5 forintban, vidékiek számára 3 forintban állapították meg.

A rendszeresen megjelenő folyóirat mellett természetesen a rend-

szeresen tartott előadóülések voltak a Társulat legfőbb életfunkciói. Elejétől fogva 9—12 előadóülés volt évenként és e szám, igen kis ingadozásoktól eltekintve, megmaradt mind a mai napig. Hosszú éveken át többnyire két, sőt néha három előadás esett egy-egy ülésre. Később a tagok egy része (hozzátehetjük: az idősebb tagok) fárasztónak találták egyetlen ülésen több előadás végighallgatását s így újabban (kb. 15 év óta) többnyire egy előadásból állott egy-egy ülés. Ily módon az évi ülésszám változatlansága tulajdonképp az előadásszám felére való csökkenését jelenti. Az első évek előadó-ülésein átlagban 50 tag jelent meg.

A Társulat teljes sikerének a képét mutatta már az 1893 ápr. 4- és 5-én tartott első rendes közgyűlése; 120 tag, tehát az összes tagoknak (a vidékieket is beleszámítva) csaknem egyharmada részt vett ezen. Nagyon sok tag vidékről jött fel. A két napig tartott közgyűlés valóságos kis kongresszusnak volt tekinthető. Nem kevesebb, mint 9 előadást, illetve kísérleti bemutatást nyújtott e közgyűlés az egybegyűlteknél, amihez végül még a Ganz-gyár elektrotechnikai osztályának megtekintése járult.

Hasonló sikerrel és hasonlóan gazdag műsorral zajlott le a Társulat II. közgyűlése is, 1894. május 12- és 13-án. Később azonban a közgyűlések, sajnos, összezsugorodtak úgy, hogy az idők folyamán már csak annyiban különböztek egy rendes előadó üléstől, hogy az ülés elejét a Társulat adminisztrációs ügyeinek formális elintézése foglalta le. A vidéki tagok így persze fokozatosan elmaradtak a közgyűlésekről.

A II. közgyűlésen az elnök a Társulat igen örvendetes anyagi gyarapodásáról számolhatott be. BÁRÓ MAJTHÉNYI OTTÓNAK (ki már meglelt férfi korában adta magát matematikai és fizikai tanulmányokra) a hagyatékából 5000 forint jutott a Társulatnak.

*

Hamarosan e II. közgyűlés után b. EÖTVÖS LORÁND vallás- és közoktatásügyi minisztere lett a második Wekerle-kormánynak. Ezen

eseménynek fontos szerep jutott a Társulat életében is, nemcsak azért, mert elnökének sikere a Társulatra is fényt árasztott,

<p style="text-align: center;">A matematikai tanulóversenyek.</p>
--

hanem és főleg azért, mert e kinevezés alkalmat adott a Társulatnak arra, hogy egyik legsikeresebb intézményét, a matematikai tanulmányversenyeket életrehívja.

1894. jun. 22-én tartott ülésén a Választmány ugyanis — a célból, «hogy a legkegyelmesebb kinevezés emlékét maradandóvá tegye» — elhatározta, hogy minden év őszén az illető évben érettségi vizsgálatot tett tanulók között Budapesten és Kolozsvárott matematikai és fizikai versenyt rendez oly célzattal, hogy a versenyzőknek a nevezett szaktárgyak művelésére való rátermettsége megállapíttassék. A legjobb két dolgozatot egy-egy (100, illetve 50 koronás) *b. Eötvös-díjjal* jutalmazza s a Társulat lapjában közzéteszi. Az első verseny 1894. szept. 17-én tartatott meg. Budapesten 48, Kolozsvárott 6 versenyző jelentkezett, beadatott összesen 29 dolgozat. Az eredmény kihirdetése és a díjak átadása az 1894. okt. 25-i ünnepélyes ülésen zajlott le. Maga *b. EÖTVÖS LORÁND* — ki nyolc hónapos miniszterségének idejére sem hagyta el a Társulat elnöki székét — adta át a díjakat a jutalmazottaknak: *SEIDNER MIHÁLY*nak és a néhány év múlva elhunyt *PAP PÁLN*ak, megemlékezvén a jutalmazottak középiskolai tanáraitól is.

Egy hároméves szünetről (1919—1921) eltekintve a Társulat mind a mai napig évenként megtartotta tanulmányversenyét, azzal a változtatással, hogy a Ferenc József-Tudományegyetem Szegedre való költözködése óta Kolozsvár helyett Szegeden tartotta a vidéki versenyt. A Társulat második félszázadának bizonyára egyik első örömdolga lesz, midőn 45-ik tanulmányversenyét — 23 évi szünetelés után — a visszatért Kolozsvárott is meg fogja tartani.

A későbbi elsőrangú matematikusoknak egész gárdája aratta első tudományos sikerét ezeken a versenyeken. Ennek igazolására csak tíz nevet akarunk az Eötvös-díjasok sorából kiragadni: *ZEMPLÉN GYŐZŐ* (1896), *FEJÉR LIPÓT* (1897), *KÁRMÁN TÓDOR* (1898), *HAAR ALFRÉD* (1903), *RIESZ MARCEL* (1904), *LUKÁCS FERENC* (1909), *SZEGŐ GÁBOR* (1912), *RADÓ TIBOR* (1913), *RÉDEI LÁSZLÓ* (1918), *KALMÁR LÁSZLÓ* (1922). Az említettek közül hárman ma már nincsenek az élők sorában, négyen előkelő külföldi egyetemeken, ketten pedig magyar egyetemeken töltenek be matematikai tan-

székeket. Aligha akad még egy társulat, mely ily nívójú és ennyi tudásra mutathatna rá, mint akiknek tudományos képességeit már 18 éves korukban felismerte.

Érdemes megvizsgálni, hogy mi tette lehetővé e versenyek rendkívüli sikerét. Az egyik körülmény kívül áll a Társulat érdemeinek a körén és ez az, hogy a matematikai tehetség többnyire már igen fiatal korban megnyilvánul és már igen csekély matematikai ismeret segítségével megoldott feladatok kidolgozásai is alkalmasak a matematikai tehetség felismerésére. Ez már a fizikára sem áll fenn és bizonyára ebben leli magyarázatát, hogy az eredetileg «matematikai és fizikai»-nak nevezett tanulóversenyek elejétől fogva tisztára matematikai versenyekké alakultak. A versenyek sikerességének egyik fontos záloga a tételek célszerű megválasztása, amiben már nagy érdemei voltak a Társulat matematikusainak. Itt természetesen az volt a döntő szempont, hogy a versenydolgozatokban mutatkozó matematikai ötletesség és ne csupán a felhasznált matematikai ismeretek mennyisége szolgálhasson a dolgozatok érdemének fokmérőjéül. De a — sokszor teljesen eredeti — tételek nehézségi fokának megállapításánál is megtalálták a versenyek rendezői a kellő mértéket. A nélkül, hogy túlságosan könnyűek lettek volna a feladatok, egyszer sem fordult elő eddig, hogy legalább egy Eötvös-díj ne lett volna kiadható; pedig a bírálók — a verseny presztizsének megőrzése céljából — nem elégedtek meg relatív értékkel, hanem csak abszolút becsű dolgozatot jutalmaztak. Az egész verseny formáját a Társulat oly célszerűen állapította meg, hogy 47 év alatt semmiféle változtatás szükségessége sem merült fel, ami annál inkább elismerésreméltó, mert sem magyar, sem külföldi példa nem lebeghetett azok szeme előtt, akik matematikai tanulóversenyeinket 1894-ben éltrehívták.

KÖVESLIGETHY 1910. évi titkári beszámolójában ezeket mondta: «Társulatunk tanulóversenyeivel magához édesgeti a fiatal, életpályája megválasztásában talán még némileg ingadozó nemzedéket; ezekben ízeleli meg talán először az önálló gondolat édes örömét... Néhány év múlva újra megjelennek körünkben, mint önálló ügyes kutatók, akik bizonyára a Társulat iránti hálából is

szolgáltatják előadásaink anyagának legjavát.» Valóban: már a VII. tanulóverseny díjkiosztó ülésén a III. verseny két jutalmazottja szerepelt mint előadó: VISNYA ALADÁR és ZEMPLÉN GYŐZŐ.

Amikor a Társulat büszkén tekint vissza eddigi 44 matematikai tanulóversenyére, igazságtalanság volna egy a Társulaton kívüli tényezőről megfeledkezni. 1894-ben ARANY DÁNIEL megalapította Győrött a «Középiskolai Matematikai Lapok»-at, amely három év múltán Budapestre költözött s ekkor szerkesztését RÁTZ LÁSZLÓ vette át, aki mint buzgó tagtársunk, hosszú éveken át tanulóversenyeink előadói tisztét töltötte be. A világháború elején megszűnt lapot 1925-ben FARAGÓ ANDOR «Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok» címén újból életre keltette. (Az 1939. évi papírkorlátozó rendelet folytán a lap megjelenése, sajnos, megszakadt.) E lapok a tehetségesek középiskolai matematikai oktatását nagy mértékben előbbrevitték és mindenkor valósággal előkészítették a talajt a mi tanulóversenyeink számára.

A versenyekben rejlő didaktikai energia szélesebb körökre is kiterjedt azóta, hogy KÜRSCHÁK JÓZSEF — kinek a tanulóversenyek ügye mindenkor szívügye volt — 1929-ben «Matematikai Versenykérdések» címen kiadta az első 32 verseny teljes anyagát. E könyvben KÜRSCHÁK egyrészt mintaszerű megoldásokat, másrészt ezekhez csatolt jegyzeteket közöl. E jegyzetek egy része az adott megoldások közvetlen kiegészítésére szolgál, más jegyzetek pedig a tudomány magasabb szféráiba vezetik el az ifjú olvasót. Az utóbbi típusú jegyzetekre különösen oly feladatok kapcsán nyílt alkalom, melyek egy (a kitűzés idejében néha éppen új vagy aktuális) komoly matematikai tétel legegyszerűbb eseteképpen kerültek kitűzésre. Ezt a kitűnő könyvet joggal magáénak vallhatja Társulatunk, mind a mellett, hogy forma szerint nem az ő kiadásában, hanem a FARAGÓ ANDOR és NAGY JÓZSEF szerkesztésében kiadott «Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok Könyvtára» c. sorozatban jelent meg Szegeden, a közoktatási minisztérium támogatásával. KÜRSCHÁK könyvének megjelenése óta már újabb 12 tanulóverseny zajlott le s így a «Matematikai Versenykérdések» II. kötetének megjelentetése előbb-utóbb aktuálissá válhatik.

E hosszabb kitérés után térjünk vissza a kronologikus rendhez. 1897-ben — bár az előadások rendszeresen folytak tovább — a Társulat válságba jutott. Kéziratok hiányában ebben az évben Lapunknak egyetlen száma sem jelent meg. Az elmaradt VI. kötetet a Társulat 1898-ban (egyidejűleg a VII. kötet kiadásával) pótolta. E VI. kötet csupa klasszikus mű magyar fordítását nyújtja: CAYLEY, CARNOT, HELMHOLTZ, KLEIN, BOLYAI JÁNOS egy-egy és GAUSS két híres művének fordítását. E füzetek kettős lapszámozást nyertek és önálló kiadványoknak is tekinthetők, amiért is a szokásosnál 100-zal nagyobb példányszámban nyomattak ki. — Külön ki kell itt emelnünk a magyar matematikai irodalom legnagyobb kincsének, BOLYAI JÁNOS latinnyelvű *Appendix*-ének — RADOS IGNÁCTÓL származó — magyar fordítását, melynek költségeit utólag a M. Tud. Akadémia vállalta el. (Megjegyezzük, hogy ugyancsak 1897-ben még egy magyar fordítása jelent meg az *Appendix*-nek SUTÁK JÓZSEF tollából; ezt SCHMIDT FERENC építész, buzgó tagtársunk adta ki, aki 1901-ben bekövetkezett haláláig a Bolyaiak ügyének itthon is és külföldön is leglelkesebb propagálója volt.)

**Bolyai János
emlékezete.**

Az *Appendix* magyar fordításának megjelentetésével a Társulat régi mulasztást ütött helyre. Hiszen ekkor már régen megjelent az *Appendix* német feldolgozása FRISCHAUFTÓL (1872) és francia fordítása HOÜELTÓL (1878). HALSTED angol fordítása pedig Amerikában ekkor már négy kiadást is megért (4-ik kiadás: 1896).

BOLYAI JÁNOS, a magyar matematika legnagyobb alakja iránti kegyelet ápolását, éppúgy, mint hatalmas alkotásának terjesztését és fejlesztését, a Társulat egyébként is mindenkor kötelességének tartotta. Így már 1894-ben gyűjtést indított — SZILY KÁLMÁN indítványára — tagjai között BOLYAI JÁNOS marosvásárhelyi — addig jeltelen, sőt alig felismerhető — sírjának megjelölésére. A sírkő még 1894-ben fel is állíttatott. E tény, mint Társulatunk érdemét, HALSTED is felemlíti fentemlített angol *Appendix*-fordításának előszavában.

BOLYAI JÁNOS születésének 100-éves fordulóját is méltóan megünnepelte Társulatunk, ha nem is oly pompás keretek között,

ahogyan a M. Tud. Akadémia és a kolozsvári Egyetem azt megtehetette. Az 1902/3. években négy előadóülés BOLYAI abszolút geometriájával foglalkozott (előadtak: KÜRSCHÁK, BEKE és RÉTHY); Lapunk XII. kötetének első füzeté pedig ünnepi Bolyai-füzetként jelent meg RÉTHY, BEKE, KÜRSCHÁK és SCHLESINGER tollából származó dolgozatokkal és e kötet több későbbi cikke is foglalkozik BOLYAI-val és geometriájával. Az 1903. jan. 15-i kolozsvári Bolyai-ünnepségen is részt vett koszorújával Társulatunk. Ennek szalagját a román megszállás alatt is máig megőrizte a marosvásárhelyi Református Kollégium hatalmas könyvtárának Bolyai-múzeuma. Húsz évvel később BOLYAI abszolút geometriája megteremtésének 100-éves jubileumát is megülte a Társulat: 1923. nov. 8-án KÜRSCHÁK JÓZSEF tartott előadást «Megemlékezés Bolyai Jánosról» címen.

*

**Személyi események
a háború végéig.**

Még 1897-ben fontos személyi változás állott be a Társulat vezetésében. BARTONIEK GÉZA hat évi érdemekben gazdag lelkes munkálkodás után lemondott és helyére KÖVESLIGETHY RADÓ választott meg ügyvezető és fizikus titkárnak. KÖVESLIGETHY teljes 17 évig nagy buzgalommal és szeretettel töltötte be tisztét. Fényes bizonyítékát nyújtják ennek azok a néha szinte költői szárnyalású titkári beszámolók is, melyeket ő évenként a Társulat közgyűlései elé terjesztett. Meg kell még emlékezni ebből az időszakból FEICHTINGER GYŐZŐRŐL, aki mint pénztáros tíz éven át (1898—1908) viselte gondját a Társulat pénzügyeinek.

Újabb nagy változásokat vont maga után az első nagy gyász, mely Társulatunkat érte. 1913. ápr. 8-án meghalt KÖNIG GYULA, az első magyar matematikai iskola megalapítója, aki EÖTVÖS LORÁNNAL együtt Társulatunk alapítója és legfőbb irányítója volt. KÖNIG GYULA hatalmas tudományos és kulturális működésének egy tágabb köröknek szóló méltatása KÜRSCHÁK JÓZSEF tollából KÖNIG GYULA halálának 20-éves fordulója alkalmából jelent meg Lapunkban (XL. kötet). Nem volt vitás, hogy KÖNIG GYULA

helyébe alelnöknek RADOS GUSZTÁV választassék, aki különösen a Lapok megindításával és szerkesztésével már addig is kimagasló érdemeket szerzett Társulatunkban. RADOSnak is méltó utóda akadt: FEJÉR LIPÓT, akinek fényes tudósi karrierje Társulatunkban bontakozott ki. KÖVESLIGETHYnek az volt a véleménye, hogy «a titkári kar regenerációja csak akkor tökéletes, ha teljes is» és lemondott a titkárságról, utódául ajánlva azt a férfit, aki mint tudós és mint ember és úgy is mint Társulatunk neveltje, valóban elsősorban volt hivatva arra, hogy a Társulat újabb fellendülésének zászlóvivője legyen. Ily módon 1914-ben ZEMPLÉN GYŐZŐ lett a Társulat ügyvezető és fizikus titkára. Az új titkárság rendkívüli ambícióval fogott működéséhez; így pl. mindjárt az első (ápr. 30-i) választmányi ülésen nem kevesebb mint 72 új tagot hozott a Társulatnak. Lapunknak a 23. kötettől kezdve még külső alakja is megváltozott és az új szerkesztők felújítottak számos — sokszor reklamált — régi rovatot («fizikai szemle», «fizikai laboratórium», «előadási kísérletek»), újból bevezették az előadóról szoló jelentéseket (melyek 1903 óta teljesen szüneteltek) és minden téren új fellendülést készítettek elő. Ma már tudjuk, hogy az 1914. év nem volt alkalmas semmiféle szellemi fellendülés megindításához: a világháború mindent megakasztott. Így maga ZEMPLÉN is azonnal hadba vonult és csak egy-két rövid szabadsága alatt jelent meg Társulatunkban. Egyik ilyen alkalommal EÖTVÖS LORÁND mint elnök a következő szavakkal aposztrofálta kedvenc tanítványát: «hazánk és hazánkban a tudomány el nem veszhét, míg a harctéren ilyen katonái, a tudomány mezején ilyen munkásai lesznek». Hazánk és hazánkban a tudomány valóban nem veszett el, de elvesztettük ZEMPLÉN GYŐZŐT, aki 1916. jun. 29-én, életének 37-ik évében az olasz fronton, a Monte Dolorán (Asiagonál) mint tüzérfőhadnagy hősi halált halt.

Alig öt hónappal e tragikus esemény után érte Társulatunkat a másik nagy háborús veszteség: a harctéren szerzett betegsége következtében elhunyt GRÖCZE ZOÁRD, a felszínszámítás mestere, aki felfedezéseit — melyeknek fontossága a magyar és nemzetközi matematikai irodalomban nagyrészt csak halála után vált

ismertté — Társulatunkban (utoljára 1916. márc. 16-án) és Lapunkban is közzébocsátotta. Magyarország háborús veszteséglistája természetesen a Társulat sok más tagjának nevét is tartalmazza, így az Eötvös-díjas RAJ LÁSZLÓÉT.

*

A fizikai tanulóversenyek.

A háború alatt a Lapok terjedelmét csökkenteni kellett, de az előadások és tanulóversenyek a szokásos keretek közt zajlottak. Sőt a világháború kellős közepén a Társulat még egy fontos új intézménnyel egészíthette ki programját. KÁROLY IRÉN premonstre kanonok, a nagyváradai jogakadémia tanára, a fizika magántanára a kolozsvári egyetemen, aki SCHMIDT ÁGOSTON 1902 dec. 31-én bekövetkezett halála után 17 éven át a Társulat fizikusalelnöki székét töltötte be, 1916-ban Társulatunknál hadikölcsönkötvényekben 2000 koronás alapítványt tett, melyet azóta több ízben igen jelentékenyen ki is egészített. Az alapítvány rendelkezését KÁROLY IRÉN a következőképpen írta elő: «Az alapítvány kamatai a fizikai ismeretek mélyítésére fordíttassanak oly céllal, oly szellemben és oly körülmények között, mint az a matematikai tanulóversenyeknél szokásos; legyen Matematikai és Fizikai Társulatunk kebelében ne csak matematikai, hanem fizikai tanulóverseny is; az energia-leadás e nagy napjaiban az energia-gyűjtés megkönnyítéséről is gondoskodnunk kell.». A KÁROLY IRÉN bőkezűsége által megteremtett fizikai tanulóversenyt a Társulat először 1916-ban és azóta is (az 1919—1921-es szünettől eltekintve) évente megrendezte Budapesten és Kolozsvárott, illetve Budapesten és Szegeden. A Károly Irén versenyeket illetően a Társulat a dolog természete szerint nem dicsekedhet oly sikerrel, mint a matematikai tanulóversenyeket illetően, aminek mérlegelésénél persze nem szabad figyelmen kívül hagyni azt a körülményt, hogy a matematikai versenyek már csaknem kétszer akkora multra tekinthetnek vissza, mint a fizikaiak. A Károly Irén-díjasok sorából még nem mutathatunk rá eddig olyan díszes gárdára, mint az Eötvös-díjasok sorából. De néhány névvel már itt is büszkélked-

hetünk. Az első verseny győztese: JENDRASSIK GYÖRGY — akinek éppen a közelmúltban volt alkalma a Társulat iránti háláját kimutatni és leróni — ma már a magyar géptechika egyik kiválósága; NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN a budapesti műegyetemnek, TELLER EDE pedig a washingtoni egyetemnek professzora. A Károly Irén-díjasok legifjabb generációjából GERŐ LORÁND műegyetemi tanársegéd és BUDÓ ÁGOSTON egyetemi m. tanár említendő, mint akik tudományos irodalmi működésükkel máris sikereket értek el. — Meg kell itt még említeni, hogy NAGY JÓZSEF, ki éveken át (1924—1932) buzgó pénztárosa volt Társulatunknak, számos alkalommal sajátjából járult hozzá a fizikai tanulóversenyek költségeihez.

*

Visszatérve a Társulat háború alatti eseményeire, az 1917. évi közgyűlés ZEMPLÉN helyére MIKOLA SÁNDORT választotta meg ügyvezető titkárnak, aki ZEMPLÉNT mint szerkesztőt már ZEMPLÉN hadba-vonulása alatt helyettesítette. Ez a választás néhány év múlva különlegesen szerencsésnek bizonyult. — 1918-ban még örömmünepet is ültetett a Társulat, EÖTVÖS LORÁNDnak 70-ik születésnapját. Ebből az alkalomból a Társulat egy díszes, 184 oldalas «báró Eötvös Loránd-füzetet» adott ki (a XXVII. k. 6—7. füzete), melyben TANGL KÁROLY, PEKÁR DEZSŐ, FEKETE JENŐ, RYBÁR ISTVÁN és MIKOLA SÁNDOR ismertették és méltatták a nagy tudós és a nagy ember életét és tudományos működését. A füzet függeléke tartalmazza Eötvös teljes irodalmi működésének jegyzékét, valamint más — nagyrészt külföldi — szerzők azon műveinek jegyzékét, melyek Eötvös felfedezéseivel foglalkoznak, illetőleg ezeknek köszönik keletkezésüket. Ezt az ünnepi füzetet, mely önálló kiadványképpen tágabb köröknek is hozzáférhetővé vált, a Társulat 1918. dec. 12-én tartott és elnökének ünneplésére szánt ülésén kellett volna átadni az ünnepeltnek. De ekkor Eötvös — aki a Társulatban 1917. május 10-én tartott utoljára előadást «A nehézségről a földön mozgó szerkezetekben» címen — már beteg volt s az átadás csak betegágyánál történhetett meg, melyből alig is kelt

<p style="text-align: center;">A háború utáni évek.</p>
--

fel többé. 1919. ápr. 8-án — a magyarországi kommunizmus dúlása közepette — meghalt, árván hagyva szeretett Társulatát éppen olyan időkben, melyekben ez különlegesen rászorult volna az ő bölcseségére, tekintélyére és vezetésére.

A háború elvesztése, a forradalmak, a kommunizmus, a román megszállás és az ezt követő zavarok, úgy mint mindenre és mindenre hazánkban, Társulatunkra is súlyos következményekkel jártak és a Társulatot hosszú időre teljes meddőségre kényszerítették. Egészen 1921 tavaszáig, tehát $2\frac{1}{2}$ év alatt, csak kétszer adott magáról életjelt Társulatunk. Először is megjelentette a Lapok 1918. évre szóló XXVII. kötetének utolsó füzetét, de annyira elkésve, hogy ebben már elnökének halálát is jelenthette. Másodszor pedig 1920. ápr. 15-én Eötvös Loránd-emlékünnepezt rendezett, melyen PEKÁR DEZSŐ mondott emlékbeszédet mesteréről, részletesen megemlékezve beszéde elején azokról a rendkívüli érdemekről, melyeket Eötvös mint Társulatunk alapítója és vezetője szerzett. Ez a beszéd — éppúgy, mint azok a beszédek, melyeket SIEGESCU dékán, gr. KLEBELSBERG miniszter és TANGL KÁROLY mondott a Pázmány Péter Tudományegyetem bölcsészeti kara által 1923. május 27-én tartott Eötvös Loránd-ünnepen — Lapunkban is megjelent (XXVIII. ill. XXX—XXXI. k.). 1930-ban még egy ünnepi ülést szentelt a Társulat első elnöke emlékének: ezen FRÖHLICH IZIDOR bemutatta a M. Tud. Akadémia Eötvös Loránd-Emlékkönyvét és FEKETE JENŐ az Eötvös-féle torziós inga gyakorlati alkalmazásairól tartott előadást.

A proletár-diktaturát követő gazdasági és társadalmi zavarok már-már teljes elmerüléssel fenyegették a Társulatot. KÜRSCHÁK JÓZSEF mellett elsősorban MIKOLA SÁNDORNak köszönhető, hogy ez nem következett be. 1921 tavaszán lassan megkezdődtek ismét előadásaink; éppen Eötvös LORÁND halálának második és KÖNIG GYULA halálának nyolcadik közös évfordulóján tartott ismét előadóülést a Társulat és három évvel a XXV. közgyűlés után, 1921. május 14-én végre a XXVI. közgyűlés is meg volt tartható. Az elnöklő RADOS GUSZTÁV hatásos elnöki megnyitójában a kultúr-integritás szempontjait hangoztatta. Utána MIKOLA SÁNDORNak

fenkölt eszmékben dúslakodó titkári jelentése hangzott el. A haza és a kultúra iránti kötelességek teljes harmóniájáról mondott szavai máig sem vesztek semmit aktualitásukból. «Annak — mondotta többek közt MIKOLA — hogy az individuumok nagyobb halmaza együtt dolgozhassék, nem az a feltétele, hogy egyformák legyenek, még az sem, hogy egyetértsenek, csak az, hogy egymás véleményét és egymás személyét tiszteletben tartsák.»

A közgyűlésen elnökké választatott FRÖHLICH IZIDOR, kinek már másfél év múlva 70-ik születésnapját ünnepelhette meg a Társulat, 1923. jan. 23-án tartott ünnepi előadójánál. FRÖHLICH híres lelkiismeretességével tíz évig töltötte be az elnöki tisztséget. Betöltésre várt az egyik alelnöki állás is, mert KÁROLY IRÉN — aki SZILY KÁLMÁNNAL együtt tiszteleti taggá választatott — megszállott területen maradt (és 1929-ben elhúnyván, nem élte meg Nagyvárad visszatérését). Fizikus-alelnök lett TANGL KÁROLY, aki 1903-tól 1917-ig, mint kolozsvári egyetemi tanár távol élván Budapesttől, — bár alapítása óta tagja volt Társulatunknak — addig, sajnos, csak kisebb szerepet játszhatott a Társulat életében. Egyéb változás a Társulat vezetőségében nem történt. — Végül a közgyűlés felvette a Társulat nevébe nagy alapítójának a nevét és a választmányi tagok számát 12-ről 18-ra emelte fel, ami hamarosan — és ez volt éppen a cél — a vezetőség felfrissítéséhez vezetett.

A súlyos gazdasági helyzetet természetesen elsősorban Lapunk sínylette meg. A tagok száma az ország trianoni megcsonkítása folytán kb. felére csökkent és bár a Minisztérium és számos intézmény és vállalat sietett a Társulat anyagi támogatására, nem volt kellő fedezet a horribilisra növekedett nyomdai költségekre. Az 1921. évre szóló XXVIII. kötet egy 100 oldalas füzetecske alakjában jelent meg és egy ideig hasonló maradt a helyzet, sőt még meg is rosszabbodott. Néhány év alatt mégis annyira jutottunk, hogy elérhettük a békebeli átlagos terjedelem *felét* és itt — a kb. 200 oldalas köteteknél — tartunk csak ma is.

A gazdasági leromlás egyik legsúlyosabb következménye volt, hogy a Társulat az írói tiszteletdíjak teljes beszüntetésére kényszerült. A magyar matematikusok és fizikusok dolgozataikat nem

anyagi célokból, hanem tisztára tudományos idealizmusból írják és biztos, hogy egyetlen dolgozat sem maradt szerzője tollában csak azért, mert nem számíthatott honoráriumra. A tiszteletdíjak megszüntetése így bizonyára nem okozott nívósüllyedést Lapunk cikkeinél. Káros azonban a tiszteletdíjak megszüntetése szociális és erkölcsi szempontból és káros különösen a Lapok szerkesztése szempontjából, ha nem a válogatást és kritikát tekintjük a szerkesztők egyedüli feladatának. Kétségtelen, hogy referátumok, egyes diszciplinákra vonatkozó összefoglaló jelentések közlése egyik fontos feladata Lapunknak, mint ahogy a Lapoknak már első kötetei számos ily irányú dolgozatot közöltek. (Elegendő itt KÜRSCHÁK több fényes referátumára rámutatni.) Az ilyen referátumok sok munkát és kevés tudományos sikert jelentenek szerzőiknek és a tapasztalat azt mutatja, hogy csak nagyobb rábeszélésre jönnek létre. A szerkesztő most már alig merheti rászánni magát, hogy ilyen «ingyen munka» elvégzésére szólítson fel valakit, különösen, ha még arról sem biztosíthatja a szerzőt, hogy mire munkája elkészülni, Társaság abban az anyagi helyzetben lesz, hogy munkáját kinyomathassa. Ismét csak tudósaink — nem eléggé megbecsült — idealizmusát dicséri, hogy mégis sikerült e sanyarú időkben is néhány ily referátumot szerezni a Lapok számára. Példaképpen az utóbbi évekből csak ALEXITS GYÖRGY két nagy referátumára akarunk rámutatni: «Az új görbeelmélet» 1937-ben és «A halmazelméleti geometria újabb fejlődése» 1938-ban. A szerzői tiszteletdíjak visszaállítása feltétlenül kívánatos még akkor is, ha ez csak a Lapok terjedelmének rovására történhetik meg.

A 20-as évek nagy depressziója után a Társulat lassan mégis csak bizonyos mértékig az anyagi konszolidáció útjára lépett, amiben nem csekély része van annak a körülménynek, hogy 1918 óta rendszeresen kap államsegélyt Társulatunk; ehhez még hozzájárul, hogy 1937 óta a Minisztérium az állami középiskolák számára előfizet Lapunkra. Nagy segítségére volt a Társulatnak 1930-ban a Széchenyi Tudományos Társaság 3000 pengős adománya. Társulatunk számos tagja is támogatta anyagilag is a Társulatot: BLÁTHY OTTÓ TITUSZ, GRUBER NÁNDOR, HOOR TEMPIS MÓRIC,

KÁROLY IRÉN, KÖRÖS LÁSZLÓ, MAGI FERENC, NAGY JÓZSEF, PATAI IMRE, SÁRKÖZY PÁL, SASVÁRI GÉZA. Az anyagi helyzet javulásával kapcsolatban külön meg kell emlékeznünk SZABÓ GÁBORRÓL, aki, mint a Társulat pénztárosa, 1932-től 1939-ig, a pénztárosi kötelesegeken messze túlmenő mértékben finom tapintattal dolgozott a Társulat fellendítésén.

*

A Társulat háború utáni életében új intézményei között a legfontosabb volt a *König Gyula-jutalom*, melynek keletkezése még a háborús időkre nyúlik vissza. Először az 1917. dec. 20-i előadó-ülésen, majd, végleges formában, az 1918. május 16-án tartott XXV. közgyűlésen még EÖTVÖS LORÁND jelentette be, hogy a Társulatnál egy 10,000 koronás *König Gyula-alapítvány* létesült, melynek célja — KÖNIG GYULA emlékének megörökítése mellett — hogy kamataiból kétévenként egy magyar matematikus a tiszta matematika terén végzett eredeti kutatásainak jutalmazásaképpen 1000 koronás *König Gyula-jutalomban* részesíttessék; a főiskolák tényleges rendes és rendkívüli tanárai a jutalmazásból kizáratnak; a javaslatételre kiküldött bizottság előadója a Matematikai és Fizikai Lapokban közzeendő jelentésben ismerteti és méltatja a jutalmazott tudományos működését. Az alapítvány, mely 6%-os hadikölcsönkötvényekbe volt fektetve, fokozatosan elértéktelenedett és ezért a Társulat 1930-tól kezdődőleg a jutalmat *König Gyula érem* formájában adja ki, melynek költségét a Társulat vállalta magára. A művészi plakettet kitűnő szobrászművészünk, BECK Ö. FÜLÖP készítette; egyik oldalán KÖNIG GYULA jól sikerült képmását ábrázolja s a mindenkori jutalmazott nevét is feltünteti. A pénzjutalom elmaradása mitsem vont le a König Gyula jutalmak értékcsökkenéséből, mert a plakett és — talán még inkább — a lelkiismeretesen készített előadói jelentés — mely gyakran már a jutalmazott tudományos működésének bel- és külföldön gyakorolt hatására is kiterjeszkedhetett — méltó elismerést jelent a jutalmazott számára. Őszinte köszönettel tartozik a Társulat, önzetlen és nehéz

<p style="text-align: center;">A König Gyula jutalom.</p>
--

munkájukért az előadóknak, kik közül ketten (SZÜCS ADOLF és LIPKA ISTVÁN) e munkát már kétszer is elvállalták.

A jutalom első ízben 1922-ben került kiosztásra, amikor ezt, különösen az algebra és számelmélet terén kifejtett munkásságáért, BAUER MIHÁLY nyerte el, akinek ifjúkori munkássága Lapunk legelső köteteiben indult neki nagysikerű útjára. Ma már tíz Kőnig Gyula-díjas tudósunkkal büszkélkedhetik Társulatunk. Teljes listájuk a következő: BAUER MIHÁLY (1922), SZEGŐ GÁBOR (1924), SZŐKEFALVI NAGY GYULA (1926), JORDAN KÁROLY (1928), SZÁSZ OTTÓ (1930), EGERVÁRY JENŐ (1932), VERESS PÁL (1934), KALMÁR LÁSZLÓ (1936), LIPKA ISTVÁN (1938) és RÉDEI LÁSZLÓ (1940). — E díszes névsor — melyben három Eötvös-díjas nevét is megtaláljuk — fényesen igazolja a Kőnig Gyula-jutalom teljes sikerét.

*

Külföldi és vidéki előadók.
--

Fontos szerepet töltöttek be Társulatunk életében az utolsó időkben a külföldi előadók is. A háború előtti időkben csak egyszer, 1905. okt. 12-én üdvözölhattünk külföldi tudósokat előadásztalunknál, éspedig két világnagyságot: a párisi GASTON DARBOUXt és a göttingai FELIX KLEINT, akik ekkor a M. Tud. Akadémia első Bolyai-jutalmának külföldi bizottsági tagjaiként tartózkodtak Budapesten. Akkoriban nagy divatban volt — első sorban éppen e két nagy matematikus vezetése alatt — a középiskolai matematika-oktatás reformja, melynek főcélja volt, hogy bevezesse a középiskolába a függvényfogalmat és ennek grafikus ábrázolását, valamint az infinitezimális számítást. Ebből a témakörből választották KLEIN is, DARBOUX is budapesti előadásuk tárgyát.

Nagy mérveket öltött a külföldi tudósok látogatása Társulatunkban 1927 óta, amikor az idegenforgalom Budapesten egyébként is rendkívüli mértékben fellendült. Az utolsó 14 évben alig múlt el év, hogy egy vagy két kiváló idegen tudós ne tisztelte volna meg előadásával a Társulatot. Legnagyobb részük (8) német volt, a többiek így oszlottak meg: 3 osztrák, 2 amerikai, 2 svájci, 1 lengyel, 1 cseh. Teljes névsoruk egyébként a következő: 1927-ben

PETTERSON H. (Wien) és EHRENHAFT F. (Wien), 1929-ben SCHEEL K. (Berlin), RUPP E. (Berlin) és RADEMACHER H. (Breslau), 1930-ban SOMMERFELD A. (München) (előadása «A fémek elektronelméletéről és az elektron természetéről» címen magyar fordításban megjelent Lapunk XXXVI. kötetében) és LIETZMANN W. (Göttingen), 1931-ben SILVERMAN L. L. (Darmouth College, U. S. A.), 1932-ben BARNETT J. A. (Cincinnati, U. S. A.), 1935-ben BLUMENTHAL O. (Aachen), 1936-ban WAVRE R. (Genève), 1937-ben FINLAY-FREUNDLICH E. (Prága) és MARK H. (Wien), 1938-ban POHL R. W. (Göttingen) és SIERPIŃSKI W. (Warszawa), 1939-ben DEBYE P. (Berlin-Dahlem) és végül 1940-ben DE RHAM G. (Lausanne). (Két kiváló amerikai tudóst, WIGNER JENŐT és NEUMANN JÁNOST, mint hazánkfiat nem vettük fel a névsorba.) Az idegen tudósok előadásainak létesítésében az utóbbi időkben különösen ORTVAY RUDOLF és KERÉKJÁRTÓ BÉLA tevénykedtek. A fenti fényes lista Társulatunk külföldi megbecsülésének bizonyítéka, különösen ha figyelembe vesszük, hogy Társulatunk sohasem volt abban az anyagi helyzetben, hogy külföldi tudósokat meghívhasson és budapesti utazásuk költségeit megtérítse.

Ez az anyagi korlátozottság vidéki tagtársainkkal szemben is mindig fennállott és így hálásan kell megemlékezni arról, hogy — úgy, mint régente kolozsvári tagtársaink — újabban a szegedi egyetem matematikusai is (RIESZ FRIGYES, az oly korán elhunyt HAAR ALFRÉD, KERÉKJÁRTÓ BÉLA, SZ. NAGY GYULA, LIPKA ISTVÁN, KALMÁR LÁSZLÓ), éppúgy, mint GYULAI ZOLTÁN a debreceni (ma már a kolozsvári) egyetem tanára, nemcsak dolgozataikkal, tagok gyűjtésével, a tanulóversenyek rendezésével, hanem legtöbbjük — költséget és fáradságot nem kímélve — előadások tartásával is ugyancsak kivették részüket a Társulat munkájából.

*

Az utolsó tíz évben Lapunk még szociálisnak is nevezhető működést is ki tudott fejteni tudományos értékű doktori disszertációk közlésével. FEJÉR LIPÓT doktori értekezésével kezdődőleg (1902), mely egy hatalmas nemzetközi matematikai diszciplína

<p>Személyi változások az utolsó tíz évben.</p>
--

kiindulópontjává lett, Lapunk már a régi időkben is számos kitünő doktori értekezést közölt. A 30-as években Lapunknak ez a működése még fokozottabb jelentőséget nyert, mert a doktoranduszok igen magas szigorlati költségeinek tetemes redukálását jelentette.

Társulatunk fennállásának 40-ik éve új gyászt hozott a Társulatra. 1931. jan. 24-én elhunyt a Társulat második kitünő elnöke, FRÖHLICH IZIDOR és helyébe RADOS GUSZTÁV választatott, aki a Társulatnak ekkor már 40 éven át tett megbecsülhetetlen szolgálataival és a Társulatban élvezett tekintélyével elsősorban mutatkozott alkalmasnak arra, hogy EÖTVÖS LORÁND elnöki székét elfoglalja. Már egy év múlva, RADOS 70-ik születésnapja alkalmából, módját ejtette a Társulat, hogy új elnöke iránti tiszteletéről tanúbizonyságot tegyen: az 1932. febr. 18-i ünnepi előadóülésen FEJÉR LIPÓT, mint szerkesztő átnyújtotta az ünnepeltnek Lapunk Radoszszámát, a XXXVIII. kötet 2. füzetét. RADOS helyére alelnöknek KÜRSCHÁK JÓZSEF választatott meg, aki alig két évig viselte e tisztséget; 1933. márc. 26-án meghalt, éppen mikor a Társulat arra kezdett készülödni, hogy 70. születésnapját egy Kürschák-füzettel megünnepelje. Kürschák halálával a Társulat egyik leg-erősebb oszlopát veszítette el, aki a Társulatban elejétől fogva minden téren döntő szerepet játszott. Készségéért, mellyel *mások* problémáiba is el tudott merülni, nagyon sok matematikus érzett és érez hálát iránta. Önzetlen munkásságának és konciliáns természetének az emléke mindmáig minduntalan érezteti azt az űrt, melyet távozásával Társulatunkban hátrahagyott. Az 1934. márc. 8-i ülést a Társulat KÜRSCHÁK emlékének szentelte. RADOS GUSZTÁV és SZÜCS ADOLF ismertették és méltatták KÜRSCHÁK tudósi működését. RADOSnak a M. Tud. Akadémiában 1934. okt. 22-én tartott nagyszabású emlékbeszédét az Akadémia szívességéből Lapunk ingyen mellékleteként küldhettük szét tagjainknak; 1936-ban pedig Lapunk STACHÓ TIBOR szép műegyetemi emlékbeszédét közölte KÜRSCHÁKRól. — KÜRSCHÁK utóda az alelnöki székben 1933-ban FEJÉR LIPÓT lett, aki húszéves matematikus-titkári és szerkesztői buzgó működésével rendkívüli hálára kötelezte Társulatunkat. FEJÉR utódául KÖNIG DÉNES választatott meg, aki

két kiváló elődének nyomdokaiban és a Társulat számos tagjának önzetlen segítségével igyekszik feladatának megfelelni.

Az utolsó nagy gyász 1940. jan. 10-én érte Társulatunkat, TANGL KÁROLY alelnök halálával. TANGL KÁROLY, elbájosító és igazi tudósi egyéniségével, egészen különleges szerepet töltött be a Társulatban, mely bizonyos tekintetben Eötvös szerepéhez hasonlított. Csaknem húszéves alelnöki működése alatt szorgalmasan eljár az ülésekre és figyelt az előadásra, még akkor is, ha ez az ő szűkebb érdeklődési körétől távol fekvő területeken mozgott. Örült és mosolygott, ha az «elvonat matematikus» oly szavakat talált, amelyekkel legalább a probléma lényegét neki — a fizikusnak — is világossá tette. Ilyenkor aztán — a hivatalos ülés berekesztése után — nem fukarkodott az elismeréssel, Az a tisztelet és szeretet, melyet a matematikusok is éreztek TANGLal szemben, nagyon növelte az ilyen elismerés buzdító hatását. Az 1940. május 25-én tartott ülést a Társulat TANGL KÁROLY emlékének szentelte. ORTVAY RUDOLF itt tartott kitünő emlékbeszéde Lapunkban is megjelent. Az ugyanezen a napon tartott utolsó (XLV.) közgyűlésen TANGL helyére fizikus-alelnöknek POGÁNY BÉLA választotta meg, aki MIKOLA SÁNDORNak 1924-ben bekövetkezett lemondása óta, tehát teljes 16 éven át viselte vállán a Társulat ügyvezetésének a terhét, amiben HOFFMANN ERNŐ, majd később SCHMID REZSŐ voltak segítségére. POGÁNY utóda, mint ügyvezető fizikus-titkár és szerkesztő ORTVAY RUDOLF lett. ORTVAY már eddigi rövid titkári működése alatt is bebizonyította, hogy szívében viseli Társulatunk fellendítésének az ügyét, szellemi és anyagi téren egyaránt.

Végül még egy igen örömdetes eseményről kell jelentést tennünk. Néhány nappal ezelőtt KLUG LIPÓT a kolozsvári egyetemen az ábrázoló geometria volt kitünő tanára, aki már Társulatunk alapításában is részt vett, 5000 pengőt adományozott a Társulatnak egy tudományos alapítvány létesítése céljából. Fel-emelő érzést keltett mindannyiunkban látni azt a tudósi idealizmusból fakadó örömet, mellyel a 87 éves tudós — mindkét gyermekét fiatal korukban elveszítvén — puritán életében összegyűjtött pénzt nekünk átadta, hogy ezzel még a jövőben is, majdan

még halála után is, elősegítse hazánkban azon tudományágak haladását, melyeket ő tehetséggel és sikerrel művelt s melyek neki 70 éven keresztül annyi nemes örömet szereztek.

*

**Külföldi
vonatkozások.**

A Társulat itt vázolt 50-éves története képet óhajtott adni arról a működésről, melyet a Társulat a magyar nemzeti kultúra érdekében kifejtett. Hátra van, hogy külön szóljunk a külföldi vonatkozásokról, amelyekről eddig csak idegen előadóinkkal kapcsolatban esett szó. A Társulat minden működését természetesen magyarul fejt ki, ami e működés hazánk területén kívül fekvő területekre való kihatását nagyon megnehezíti. Tekintettel a matematika és a fizika olyannyira nemzetközi jellegére, gyakran felvetődött már a kérdés, hogy hasznos és eredményes-e az eredeti tudományos dolgozatok magyarnyelvű publikálása. E kérdésre kétségtelenül igennel kell felelnünk. Szükség van a magyar publikációkra először is a magyar műnyelv szempontjából, melynek igényeit az élőszó önmagában nem tudja kielégíteni. A középiskolai és főiskolai oktatás is nagyon megsínylené, ha a műnyelv fejlődésének, melynek a tudomány fejlődésével párhuzamosan kell haladni, nem sietne segítségére a *nyomtatott* szó is. Az persze tagadhatatlan, hogy a magyar nyelvű közlések jóval nehezebben találják meg az utat a külföld tudományos körei felé, mint a nagy világnyelveken megjelent dolgozatok. Éppen ezért nemcsak nem kifogásolható, hanem egyenesen kívánatos, hogy a magyar tudósok idegen nyelven is publikáljanak. De a magyar publikáció mellett szól még a nyelvi nehézségek, a fordítás nehézségeinek kiküszöbölése is, ami különösen az ifjabb nemzedéknél nagyon is figyelembe veendő. Kívánatos továbbá az is, hogy a fiatal magyar tudósok magyar fórum előtt arathassák első tudományos sikereiket, ami hiszen érvényesülésüket nagyon megkönnyíti. Az a mondás, hogy «*nemo propheta in patria sua*» a mi tudományainkat illetően ma már hazánkban anakronizmusná vált, amiben Társulatunk nem csekély érdemet vindikálhat magának.

De nem is kell gondolni, hogy az érdemes magyarnyelvű munkák a külföld tudósai előtt okvetlenül ismeretlenek maradnának, amiben fontos szerep jut a külföldön élő nagyszámú magyar matematikusnak és fizikusnak. De ettől függetlenül is példaképpen megemlíthetjük MUIRnak a determináns-elmélet történetéről írt ötkötetes angol munkáját (1906—1930), mely teljességgel feldolgozta a csupán magyar nyelven megjelent munkákat is. Továbbá a nemzetközi tudományos világban már régóta léteznek olyan sorozatos kiadványok, — mint pl. a nagy német és francia matematikai enciklopédia, vagy a *Fortschritte der Mathematik* — melyek minden nyelvű publikációt igyekeznek figyelembe venni és ezek lényeges tartalmának elterjedését elősegítik. A magyar cikkek külföldre való elhatolását újabban nagyban elősegíti az a körülmény, hogy 1923 óta Lapunk — úgy mint sok más magyar tudományos folyóirat — cikkeit a szerzőktől származó idegen nyelvű kivonatokkal egészíti ki. Minthogy Lapunk a külföld számos nagy tudományos centrumában — sok helyütt csere- vagy ajándékképpen — megtalálható s a dolgozatok különlenyomatok formájában is eljutnak a külföldre is, e kivonatok — legalább bizonyos fokig — bizonyára elérik céljukat. Figyelemreméltó továbbá, hogy a *Zentralblatt für Mathematik*, ez az 1931 óta megjelenő és nagy gyorsaságra és teljességre törekvő nemzetközi referáló folyóirat (bár sok magyar munkatársa van) Lapunk cikkeinek referátumaképpen igen sokszor («Autoreferat» megjelöléssel) magukat e kivonatokat nyomatta le, amelyek ily módon valósággal nemzetközi publicitást nyertek.

Kis nemzet nyelvén elhangzó élőbeszéd természetesen még nehezebben hatol keresztül az ország határain, mint a nyomtatott szöveg. De hogy ez sem reménytelen, arra érdekes példát említhetünk Társulatunk első éveinek történetéből.

GEORG CANTORnak, amidőn a mult század hetvenes éveiben a halmazelméletet megteremtette, egyik legszenzációsabb eredménye, mely megdönteni látszott a dimenzió fogalmát, amint azt addig (a folytonosság figyelembevételével) értelmezni szokták, az volt, hogy az egy- és többdimenziós kontinuumok egyenlő számosságúak. E tételre KÖNIG GYULA egy a CANTORénál jóval egyszerűbb

bizonyítást talált és e bizonyítást előadta Társulatunk 1893. nov. 15-én tartott ülésén «Az egy- és többméretű sokaságok kölcsönösen egyértelmű vonatkoztatása» címen. KÖNIG GYULA e bizonyítást sem magyarul, sem más nyelven sohasem publikálta és mégis belekerült a halmazelmélet nemzetközi irodalmába. Először SCHOENFLIES nagy halmazelméleti referátumába (1900, 1913), majd FELIX KLEIN «Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus» (1908, 1911, 1924) c. művébe jutott bele és ezeken az utakon keresztül belekerült a halmazelmélet újabb tankönyveibe is, éspedig mindenütt a szerző nevének felemlítésével.

*

Hiányok.

Történeti áttekintésünk hiányos volna, ha a Társulat érdemei mellett nem szólnánk azokról a hiányokról is, melyek a Társulat multjában feltalálhatók. Elsősorban alapszabályainknak arra a két pontjára gondolunk, melyek a Társulat céljait szolgáló eszközök közé sorozzák egyrészt időhöz nem kötött kiadványok megjelentetését, másrészt könyvtár létesítését.

Ami az elsőt illeti, Lapunk VI. kötetében megjelent fordításokról és az Eötvös-füzetéről már fentebb szólottunk. Ezeken kívül mindmáig csak két önálló kiadványt bocsátott közzé Társulatunk. Az első volt (1905-ben) ZEMPLÉN GYÖZÖ fordításában CURIENÉ «Radioaktív anyagokra vonatkozó vizsgálatok» c. munkája, mely Lapunk XIII. és XIV. kötetében öt folytatásban jelent meg. A másik volt (1907-ben) ERMÉNYI LAJOS «Petzval József élete és érdemei» c. 4 $\frac{1}{2}$ íves értekezése, melyet a M. Tud. Akadémia külön anyagi segítsége folytán Lapunk ingyen mellékleteként küldhettünk meg tagjainknak. — Jól megválasztott különkiadványok közrebocsátásával a jövőben bizonyára nagyban elő lehetne segíteni Társulatunk céljait.

A társulati könyvtár létesítése rendkívül nehéz probléma. Tekintettel a Társulat anyagi helyzetére, ez még szóba sem kerülhetett mindaddig, amíg a világháborút követő években az egész világon nagyobb mérveket nem öltött a csereforgóiratok és ajándékkönyvek

divatja. Lapunk 25 tudományos folyóirattal van csereviszonyban. Ezek persze nem a legfontosabb matematikai és fizikai lapok, bár köztük foglal helyet — hogy csak egyet említsünk — a lengyelek igen nagy értékű nemzetközi folyóiratának, a *Fundamenta Mathematicae*nak teljes sorozata. Ajándékkönyvekkel is rendelkezik Társulatunk. E tekintetben elsősorban az *American Mathematical Society*ről kell hálával megemlékeznünk. Ez a hatalmas társulat — mely félszázados jubileumával csak három évvel előzte meg Társulatunkat — újabban rendszeresen megküldi nekünk (minden kérés nélkül) nagyértékű könyvkiadványait. Ezek a folyóiratok és könyvek — kellően kiegészítve — már alapját és kiindulópontját képezhetnék egy társulati könyvtárnak. Azonban a hiányok pótlása — nem is szólva arról, hogy ez a világ mai állapotában szinte teljesen lehetetlen — és a könyvtár kezelése nagyon nagy munkát kíván, a könyvek hozzáférhetővé tétele tagjaink számára pedig csak erre szolgáló külön helyiségben volna lehetséges. Ily módon igazán használható társulati könyvtárról majd csak akkor lehet szó, amikor a Társulat oly helyzetbe fog jutni, hogy társulati helyiségről és fizetett könyvtárról fog gondoskodhatni.

Meg kell még említeni, hogy nem valósult meg eddig továbbá a Kőnig Gyula-alapítvány második rendelkezése, melynek az volt a célja, hogy a magyar matematikusok bármily nyelven megjelent tudományos értékű munkássága négyéves ciklusokban ismertetessék. Egy ily intézmény bizonyára hozzájárulna a magyar matematika hírnevének öregbítéséhez.

Sokan bizonyára azt is sajnálják, hogy a kitűzött és megoldott feladatok rovata, mely régente fontos és hasznos szerepet töltött be Lapunkban, fokozatosan teljesen abbamaradt.

Ezek a hiányok bizonyára eltörpülnek a Társulat érdemei mellett és annyiban talán még előnyök is, hogy programmot adnak a jövőre.

*

Bizalommal tekintünk Társulatunk jövője elé. A magyar matematikusok és fizikusok a jövőben is bizonyára éppoly tehetséggel és idealizmussal fogják szolgálni Társulatunk céljait, amint azt

eddig tették. Társulatunk és a magyar kultúra fejlődését csak oly események tudják megzavarni, amelyekre a tudósok az egész világon — sajnos — úgyszólván semmi befolyást sem tudnak gyakorolni. Ezért Társulatunk első 50 évének ezen áttekintését annak a reménynek kifejezésével akarjuk berekesztetni, melynek Társulatunk életének 25-ik évében, az első háborús közgyűlésen EÖTVÖS LORÁND adott kifejezést a következő szavakkal: «Reméljük, hogy azok a nemzetek, melyek most egymás ellen küzdenek, megint vállvetve fognak a kultúra épületén dolgozni».

König Dénes.

LES PREMIÈRES CINQUANTE ANNÉES DE LA SOCIÉTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE DE BUDAPEST.

La Société de Mathématiques et de Physique de Budapest fut fondée il y a un demi-siècle, en 1891, par le physicien baron ROLAND EÖTVÖS et par le mathématicien JULES KÖNIG. Son président actuel est GUSTAVE RADOS et ses vice-présidents: LÉOPOLD FEJÉR et BÉLA POGÁNY. Elle tient annuellement 9 à 12 séances et publie un recueil intitulé «Matematikai és Fizikai Lapok» où les auteurs font connaître soit leurs recherches personnelles, soit l'état actuel des recherches relatives à un groupe de problèmes déterminé. Les articles et mémoires, rédigés en hongrois, sont suivis depuis vingt ans environ d'un résumé français, allemand ou anglais. Ce recueil était dirigé, par ordre chronologique, pour les mathématiques par G. RADOS, L. FEJÉR, D. KÖNIG; pour la physique par G. BARTONIEK, R. KÖVESLIGETHY, GY. ZEMPLÉN, A. MIKOLA, B. POGÁNY, R. ORTVAY.

Depuis 1894, la Société organise chaque année un concours de mathématiques pour les jeunes gens ayant passé le baccalauréat dans l'année même. Beaucoup de mathématiciens, qui devaient acquérir une belle réputation plus tard, y ont récolté leur premier succès; tels étaient entre autres GY. ZEMPLÉN (1896), L. FEJÉR (1897), T. KÁRMÁN (1898), A. HAAR (1903), M. RIESZ (1904), F. LUKÁCS (1909), G. SZEGŐ (1912), T. RADÓ (1913), L. RÉDEI (1918), L. KALMÁR (1922). Les problèmes proposés aux 32 premiers concours ont été publiés avec des solutions et des notes sous forme de livre en 1929 par J. KÜRSCHÁK. Depuis 1916, la Société

ouvre tous les ans un concours pareil pour la physique, grâce à une fondation faite par I. KÁROLY.

En 1922, la Société a institué un prix biennal dit «prix JULES KÖNIG», destiné à récompenser les mathématiciens hongrois, autres que les professeurs d'université, qui se sont distingués par leurs travaux originaux dans le domaine des mathématiques pures. Les rapports analysant en détail les titres scientifiques des lauréats sont régulièrement insérés dans le journal de la Société. Voici la liste des lauréats : M. BAUER (1922), G. SZEGŐ (1924), J. DE SZ. NAGY (1926), CH. JORDAN (1928), O. SZÁSZ (1930), E. EGERVÁRY (1932), P. VERESS (1934), L. KALMÁR (1936), ST. LIPKA (1938), L. RÉDEI (1940).

Un grand nombre d'éminents savants étrangers ont fait des conférences aux séances de la Société ; nous citerons parmi eux : G. DARBOUX (Paris), F. KLEIN (Göttingen), P. DEBYE (Berlin-Dahlem), W. SIERPIŃSKI (Warszawa), A. SOMMERFELD (München).

Dénes König.

JELENTÉS

a Társulat jubileuma alkalmából befolyt adományokról.*

Társulatunk alapításának 50-éves jubileuma alkalmából gazdasági életünk vezető vállalataihoz fordultunk avval a kéréssel, hogy támogatásukkal tegyék lehetővé, hogy Társulatunk nagy alapítója által kitűzött céljának : a matematika és fizika ápolásának eleget tehessen.

Kérésünk nem talált süket fülekre, amennyiben több vállalat átérezve a tudományok támogatásának fontosságát, jelentékeny adománnyal sietett segítségünkre.

Az eddig beérkezett adományok a következők :

	Pengő
1. Ganz és Társa Villamossági, Gép-, Vagon- és Hajógyár R.-T.	1000.—
2. Magyar kir. Állami Vas-, Acél- és Gépgyárak.....	500.—
3. Rimamurány-Salgótarjáni Vasmű R.-T.....	1000.—
4. Gamma, Fínommechanikai gépek és készülékek gyára	100.—
5. Danuvia Ipari és Kereskedelmi R.-T.	300.—
6. Magyar Acélárugyár R.-T.	200.—
7. Péti Nitrogén Műtrágyagyár	500.—
8. Láng Lajos Gépgyár R.-T.	200.—
9. Magyar Pamutipar R.-T.	500.—
10. Magyar Brown Boveri Művek, Villamossági R.-T. .	100.—
11. Salgótarjáni Kőszénbánya R.-T.....	500.—
12. Weiss Manfréd Acél- és Fémművei R.-T.	200.—

* Titkári bejelentés a Társulat 1941. január 30-án tartott jubilaris ülésén.

13. Trust, Részvénytársaság Villamos és Közlekedési Vállalatok számára	200.—
14. Széchenyi Tudományos Társaság.....	2000.—
15. Takarékpénztárak és Bankok Egyesülete	1000.—
16. Egyesült Izzólámpa és Villamossági R.-T.	500.—
17. Franklin-Társulat Magyar Irodalmi Intézet és Nyomda	500.—
18. Goldberger Sám. F. és Fiai R.-T.	200.—

Az eddig befolyt adományok összege 9500.— P.

Fogadják a mai nehéz időkben fontos közcélért hozott áldozatkészségükért hálás köszönetünket és ígéretünket, hogy igyekezni fogunk adományukat a hazai tudományosság emelésére legjobb tudásunk szerint gyümölcösöztetni.

Fenti kimutatásban nem téteztett említés egyik tagtársunk nagylelkű alapítványáról, mely más kategóriába tartozik és melyről megfelelő módon közlés fog történni.

Ortvay Rudolf.

KLUG LIPÓT ALAPÍTVÁNYA.

KLUG LIPÓT, a kolozsvári egyetem nyugalmazott tanára, aki alapítása óta tagja a Társulatunknak, 5000 pengőt adományozott a Társulatnak oly alapítvány létesítése céljából, melynek feladata, — az alapítványtevő szavai szerint — hogy «hazánkban a geometria sikeresebb művelésére és terjesztésére szolgáljon». KLUG LIPÓT kíséző iratában ehhez a következőket fűzi hozzá: «alapítványom célja, hogy a Társulat annak kamataiból két-évenként a tiszta geometria terén végzett vizsgálatokat kifejtő fiatalabb magyar kutatókat jutalmazza meg, különösen azokat, akik a tőlem járt utakon kutatnak».

A választmány az alapítvány ügyében egy bizottságot küldött ki, melynek tagjai voltak FEJÉR LIPÓT elnöklete alatt EGERVÁRY JENŐ, KERÉKJÁRTÓ BÉLA és KÖNIG DÉNES. E bizottság javaslatára a Választmány 1941. febr. 27-én tartott ülésén a következőkben állapodott meg.

1. Halásan elfogadja az alapítványt a nagylelkű adományozó által előírt és fentebb idézett célra.

2. A Választmány e cél elérését megkönnyítendő az első két év kamataiból adódó első KLUG LIPÓT jutalommal egy a KLUG LIPÓT tudományos működését ismertető és méltató jelentés szerzőjét fogja kitüntetni.

3. A Választmány kétévenként esetről esetre fog dönteni a felől, hogy a további kétéves ciklusokban befolyó kamatok miképpen fordíttassanak a fentebb említett célra, illetőleg, hogy kit tün-
tessen ki a későbbi KLUG LIPÓT jutalmakkal.

4. A jutalmak odaítéléséről, részletes indokolással, egy-egy előadóülésen fog jelentés tétetni.

TÖBBMÉRETŰ TEREK EGYSZERES BEFEDÉSE KOCKARÁCCSAL.

1. §. Bevezetés.

A mult század végén jelent meg MINKOWSKI Geometrie der Zahlen c. munkája, melyben egy érdekes és azóta sokakat foglalkoztató kérdést vetett fel a következő tételével kapcsolatban:

Ha a valós együtthatós

$$\xi_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \quad (i=1, \dots, n)$$

homogén elsőfokú alakok determinánsa 1, akkor megadhatók $0, \dots, 0$ -tól különböző x_1, \dots, x_n egész számok úgy, hogy ezekkel képezve

$$|\xi_1| \leq 1, \dots, |\xi_n| \leq 1.$$

Ha az egyenlőségi jeleket elhagyjuk, akkor a tétel általában már nem helyes. Ezt könnyen beláthatjuk a következő példa esetében:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1, \\ \xi_2 &= a_{21}x_1 + x_2, \\ &\vdots \\ \xi_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} + x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Hasonló egyszerűen belátható, hogy a tétel azon alakok rendszerére sem helyes, amelyek az (1) alakokból egy unimoduláris, homogén elsőfokú, egészegyütthatós átalakítás alkalmazásával nyerhetők. Mindezen esetekben az egyik alak valamiennyi együtthatója egészszám.

MINKOWSKI azt a kérdést vetette fel, hogy van-e a megadott eseteken kívül más ily kivételes eset is. Bebizonyította, hogy $n=2, 3$ esetben nincs. Azt a sejtését azonban, hogy ez minden

n -re helyes, nem sikerült igazolnia [8, 9].¹ Sejtését a következőképpen fogalmazhatjuk:²

1. Fogalmazás. *Ha a valós együtthatós*

$$\xi_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \quad (i=1, \dots, n)$$

homogén elsőfokú alakok determinánsa 1 és egyik alaknak sem valamenyi együtthatója egész, akkor megadhatók $0, \dots, 0$ -tól különböző x_1, \dots, x_n egészszámok úgy, hogy ezekkel képezve

$$|\xi_1| < 1, \dots, |\xi_n| < 1.$$

Fentebb idézett tételét MINKOWSKI geometriai úton bizonyította és sejtésének is adott geometriai fogalmazást. E fogalmazásban válik a probléma legszemléletesebbé és legérdekesebbé. MINKOWSKI sejtése e szerint:

2. Fogalmazás. *Ha az n -méretű euclidesi térben párhuzamosan elhelyezkedő, egymást nem fedő, egybevágó kockák az egész teret betöltik és középpontjaik pontrácsot alkotnak,³ akkor van e kockák között kettő, melynek egy-egy oldallapja⁴ teljes egészében közös.*

A sejtésnek más fogalmazást adott még többek között L. J. MORDELL [10], jelen dolgozat írója [2] és egy különleges esetre D. DERRY [1].

A sejtést H. JANSEN [3] az $n \leq 6$ esetre, TH. SCHMIDT [14] az $n \leq 7$ esetre, O. H. KELLER [5] az $n \leq 8$ esetre igazolta, dolgozataikat illetően azonban v. ö. O. PERRON [12] megjegyzéseit. Ugyancsak O. PERRON [13] világos és áttekinthető bizonyítást adott az $n \leq 9$ esetre. Minden n -re vonatkozó hiányos bizonyítást adtak, illetve új bizonyítási lehetőségekre mutattak rá B. LEVI [7], S. L. van OSS [11] és C. L. SIEGEL [15].⁵ A sejtést

¹ A szögletes zárójelben álló számok a dolgozat végén álló irodalmi összefoglalásra vonatkoznak.

² Bár e fogalmazás a teljes sejtésnél kevesebbet mond, helyessége esetén a teljes sejtés helyessége egyszerűen következik.

³ Az így elhelyezkedő kockák összességét *kockarácsnak* nevezzük.

⁴ Oldallap: az n -méretű kockát határoló $(n-1)$ -méretű kocka.

⁵ Idézett dolgozatának csak egy lábjegyzete vonatkozik a MINKOWSKI-féle sejtésre.

minden n -re eddig senki sem bizonyította be. A kérdés állásáról összefoglaló képet adott J. F. KOKSMA [6] és L. J. MORDELL [10].

A sejtést lényegesen általánosította O. H. KELLER [4], hogy igazolását ily módon tegye lehetővé. Általánosított sejtésének helyességét az $n \leq 6$ esetre mutatta ki [5]. Dolgozatát illetőleg azonban v. ö. O. PERRON megjegyzését, aki ez általánosított sejtés helyességét ugyancsak az $n \leq 6$ esetben szabatos és áttekinthető módon igazolta [12]. Én is általánosítottam más irányban a sejtést, általánosításomról azonban kimutattam, hogy az csak az $n \leq 3$ esetben helyes [2].

A jelen dolgozatban a MINKOWSKI-féle sejtés helyességét minden n -re igazoljuk. A bizonyítást a sejtésnek általam adott csoportalgebrai fogalmazása segítségével végezzük.

2. §. Csoportalgebrai fogalmazás.

Valamely véges \mathfrak{G} csoport elemei legyenek A_1, \dots, A_r ; a csoport egységelemét 1-el jelöljük. A \mathfrak{G} csoporthoz tartozó *csoportalgebra*⁶ vagy *csoportgyűrű* oly gyűrű, melynek elemei az $a_1 A_1 + \dots + a_r A_r$ kifejezések, ahol a_1, \dots, a_r tetszőleges egészszámok.⁷ E gyűrű műveleteit az $a_1 A_1 + \dots + a_r A_r$ kifejezésekre úgy értelmezzük, mint közönségesen a polinomokra: a csoportelemeket az egészszámokkal felcserélhetőeknek tekintjük, a csoportelemek szorzásánál pedig a csoport műveleti szabályai az irányadók. A csoportalgebra két eleme akkor és csakis akkor egyenlő, ha az ezeknél szereplő a_1, \dots, a_r koordináták páronként egyenlők.

A következőkben a \mathfrak{G} csoport mindig Abel-féle és így a csoportalgebra kommutatív gyűrű lesz. A \mathfrak{G} csoport valamely A elemét és a csoportalgebra $1 \cdot A$ elemét azonosnak tekintjük s így a csoportalgebrát a csoport bővítéseként fogjuk fel. Beszélhetünk tehát a csoportalgebrában pl. két csoportelem szorzata mellett azok összegéről és különbségéről is. A következőkben \mathfrak{G} elemei-

⁶ V. ö. pl. B. L. van der WAERDEN: *Moderne Algebra I.* (1937), 49; M. DEURING: *Algebra*, *Erg. der Math.* IV. 1. (1935), 2.

⁷ Alapgyűrűnek tehát az egészszámok gyűrűjét választottuk.

vel mindig a \mathfrak{G} -hez tartozó csoportalgebrában számolunk a nélkül, hogy ezt mindúntalan hangsúlyoznók.

A csoportelemekkel való számolási módunkról másképen is számot adhattunk volna. Ha a véges, Abel-féle \mathfrak{G} csoport típusa (t_1, \dots, t_s) és a megfelelő alkotó elemek E_1, \dots, E_s , akkor az egész-számok Γ gyűrűjéből megalkotjuk a $\Gamma[E_1, \dots, E_s]$ polinomgyűrűt, e polinomgyűrűben a

$$g = (E_1^{t_1} - 1, \dots, E_s^{t_s} - 1)$$

polinomideált s az ehhez tartozó maradékosztályok $\Gamma[E_1, \dots, E_s]/g$ gyűrűjét. A maradékosztályok e gyűrűje izomorf a fent jellem-zett csoportalgebrával. A csoportelemekkel való számolási módun-kat tehát úgy is jellemezhetjük, hogy helyettük a megfelelő maradékosztályokkal számolunk a $\Gamma[E_1, \dots, E_s]/g$ gyűrűben.

Röviden tehát számolási módunkat úgy is jellemezhetjük, hogy a csoportelemeket az E_1, \dots, E_s alkotóelemekkel fejezzük ki és velük formálisan számolunk a csoportot definiáló

$$E_1^{t_1} = 1, \dots, E_s^{t_s} = 1$$

egyenletek figyelembevételével.

Néhány elnevezést és jelölést vezetünk be a csoportalgebra oly elemeire, amelyek vizsgálatainkban nagy szerepet fognak játszani.

A \mathfrak{G} csoport valamely \mathfrak{H} alcsoportja valamennyi elemének összegét $\Sigma[\mathfrak{H}]$ -val jelöljük. Tehát bármely \mathfrak{H} -ra

$$\Sigma[\mathfrak{H}] \neq 0. \quad (2)$$

Ha A eleme a \mathfrak{H} alcsoportnak, akkor

$$A \cdot \Sigma[\mathfrak{H}] = \Sigma[\mathfrak{H}]. \quad (3)$$

A \mathfrak{G} csoport valamely A elemével képezett

$$S = 1 + A + A^2 + \dots + A^{m-1} \quad (m > 1) \quad (4)$$

összeget \mathfrak{G} -hez tartozó sornak nevezzük. Ha $A^m = 1$, akkor e sort *ciklikus*nak nevezzük, ellenkező esetben *nem-ciklikus*nak mondjuk. Ha a (4) alatti S ciklikus, akkor nyilván

$$S(A-1) = 0. \quad (5)$$

Ha m törzsszám, akkor a sort *törzssornak* nevezzük.

A \mathfrak{G} csoport valamely az egységtől különböző A elemével képezett

$$D = A - 1 \quad (6)$$

kifejezést \mathfrak{G} -hez tartozó *különbségnek* nevezzük. Ha a (4) alatti S sor nem-ciklikus, akkor $A^m - 1$ különbséget S -hez *rendelt különbségnek* mondjuk.

Egy korábbi dolgozatomban [2] bebizonyítottam, hogy az n -méretű térre vonatkozó MINKOWSKI-féle sejtés egyenértékű a következő állítással:

3. Fogalmazás. *Ha a véges, Abel-féle \mathfrak{G} csoportra és a hozzá tartozó S_1, S_2, \dots, S_n sorokra nézve*

$$S_1 S_2 \dots S_n = \Sigma[\mathfrak{G}],$$

akkor az S_1, S_2, \dots, S_n sorok valamelyike ciklikus.

A sejtést ebben az alakjában fogjuk igazolni. A bizonyítást kizárólag csoportalgebrai úton végezzük.

3. §. Csoportalgebrai segédtelek.

Tekintsük a csoportalgebra valamely $B = a_1 A_1 + \dots + a_r A_r$ elemét. A \mathfrak{G} csoport azon A_i elemeit, amelyekre a hozzájuk tartozó koordináta $a_i \neq 0$, B *összetevőinek* nevezzük. A csoportalgebraának valamely zérustól különböző B eleméhez rendeljük a \mathfrak{G} csoportnak ama $\mathfrak{H}(B)$ -vel jelölt alcsoportját, amely B valamennyi összetevőjét tartalmazza s amelynek nincs e tulajdonsággal bíró valódi alcsoportja. Vagyis röviden: jelentse $\mathfrak{H}(B)$ \mathfrak{G} -nek a B összetevői által képezett alcsoportját. E definícióból közvetlenül következik pl. az, hogy a (4), illetve (6) alatti csoportalgebraelemekre:

$$\mathfrak{H}(S) = \mathfrak{H}(A), \quad (7)$$

$$\mathfrak{H}(D) = \mathfrak{H}(A). \quad (8)$$

A zérustól különböző B_1, \dots, B_k elemekhez rendelt $\mathfrak{H}(B_1), \dots, \mathfrak{H}(B_k)$ alcsoportok szorzatát $\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k)$ -val jelöljük, azaz:

$$\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k) = \mathfrak{H}(B_1) \dots \mathfrak{H}(B_k). \quad (9)$$

Vagyis $\mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k)$ jelentse \mathfrak{G} -nek a B_1, \dots, B_k összetevői által képezett alcsoporthát. Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k)$ és $\mathfrak{S}(B_1 \dots B_k)$ élesen megkülönböztetendő (az utóbbi a $B_1 \dots B_k$ szorzat összetevői által képeztetik).

Valamely véges \mathfrak{S} csoport rendszámát $r[\mathfrak{S}]$ -val jelöljük. Egyszerűbb jelölés kedvéért legyen

$$r[\mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k)] = r(B_1, \dots, B_k). \quad (10)$$

A \mathfrak{G} csoport valamely A elemére vonatkozólag tehát $r(A)$ az A csoportelem rendszámát jelenti.

Egy $m > 1$ pozitív egészszám (egymástól nem feltétlenül különböző) törzstényezőinek számát $d(m)$ -el jelöljük; legyen továbbá $d(1) = 0$. Tehát pl. valamely p törzsszámmra

$$d(p) = 1. \quad (11)$$

Nem szorul bizonyításra, hogy tetszőleges m, n pozitív egészszámokra

$$d(mn) = d(m) + d(n). \quad (12)$$

Egyszerűbb jelölés kedvéért legyen

$$d(r[\mathfrak{S}]) = d(\mathfrak{S}) \quad \text{és} \quad d[r(B_1, \dots, B_k)] = d(B_1, \dots, B_k)$$

Az így értelmezett $d(B_1, \dots, B_k)$ függvény fogja a következőkben a legnagyobb szerepet játszani. Segédteteleink is javarészt e függvényre vonatkoznak.

1. Tétel. *A csoportalgebra zérustól különböző B_1, \dots, B_k elemeire nézve*

$$d(B_1, \dots, B_k) \leq d(B_1) + \dots + d(B_k).$$

Ugyanis (9) alapján az alcsoporthok rendszámaira nézve

$$r(B_1, \dots, B_k) \cdot c = r(B_1) \dots r(B_k),$$

ahol c pozitív egészszám. (12) alkalmazásával tehát

$$d(B_1, \dots, B_k) + d(c) = d(B_1) + \dots + d(B_k).$$

Minthogy $d(c) \geq 0$, állításunkat ezzel igazoltuk.

2. Tétel. *A csoportalgebra oly zérustól különböző B_1, \dots, B_k elemeire, amelyekre $B_1 \dots B_k \neq 0$,*

$$d(B_1, \dots, B_k) \geq d(B_1 \dots B_k).$$

Mivel $B_1 \dots B_k$ összetevői B_1, \dots, B_k összetevőiből szorzással keletkeznek, $\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k)$ tartalmazza $B_1 \dots B_k$ valamennyi összetevőjét s így $\mathfrak{H}(B_1 \dots B_k)$ alsoportja $\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k)$ -nak. Rendszámaikra tehát:

$$r(B_1, \dots, B_k) = r(B_1 \dots B_k) \cdot c,$$

ahol c pozitív egészszám. (12) szerint ebből

$$d(B_1, \dots, B_k) = d(B_1 \dots B_k) + d(c).$$

Mivel $d(c) \geq 0$, állításunkat igazoltuk.

3. Tétel. Ha B_1, \dots, B_k és C_1, \dots, C_l a csoportalgebra zérus-tól különböző elemei és $B_1 \dots B_k \neq 0$, akkor

$$d(B_1 \dots B_k, C_1, \dots, C_l) - d(B_1 \dots B_k) \geq d(B_1, \dots, B_k, C_1, \dots, C_l) - d(B_1, \dots, B_k).$$

Tételünket a következő csoportelméleti segédétel alkalmazásával igazoljuk:

Ha $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3$ egy véges, Abel-féle \mathfrak{G} csoport alsoportjai és \mathfrak{H}_1 alsoportja \mathfrak{H}_2 -nek és \mathfrak{H}_3 -nak is, akkor a $\mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_3 / \mathfrak{H}_3$ osztócsoport rendszáma osztója a $\mathfrak{H}_2 / \mathfrak{H}_1$ osztócsoport rendszámának.

Segédételünk igazolására gondoljuk meg a következőket: \mathfrak{H}_1 -nek \mathfrak{H}_2 -ben foglalt mellékcsoportjait \mathfrak{H}_3 -al szorozva \mathfrak{H}_3 -nak mellékcsoportjait nyerjük és az így nyert mellékcsoportok ki-merítik $\mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_3 / \mathfrak{H}_3$ osztócsoportot. A mellékcsoportok ily hozzárendelése a $\mathfrak{H}_2 / \mathfrak{H}_1$ osztócsoportnak a $\mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_3 / \mathfrak{H}_3$ osztócsoportra való homomorf leképezését szolgáltatja. Ennek pedig következménye, hogy az utóbbi rendszáma osztója az előbbiének.

Tételünk esetében legyen

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}(B_1 \dots B_k),$$

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}(B_1 \dots B_k, C_1, \dots, C_l),$$

$$\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k).$$

(9) és 2. tétel bizonyítása szerint \mathfrak{H}_1 valóban alsoportja \mathfrak{H}_2 -nek és \mathfrak{H}_3 -nak is. A segédételünk szerint tehát

$$r(\mathfrak{H}_2 / \mathfrak{H}_1) = c \cdot r(\mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_3 / \mathfrak{H}_3),$$

ahol a c pozitív egészszám, Egyenletünkéből következőleg

$$r(\mathfrak{H}_2) r(\mathfrak{H}_3) = c \cdot r(\mathfrak{H}_1) r(\mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_3).$$

Minthogy $d(c) \geq 0$, (12) következtében

$$d(\mathfrak{S}_2) + d(\mathfrak{S}_3) \geq d(\mathfrak{S}_1) + d(\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3). \quad (13)$$

(9) és a 2. tétel bizonyításában szereplők szerint

$$\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k, C_1, \dots, C_l).$$

Ezt és a csoportok jelentését (13)-ba beírva éppen tételünk állítását kapjuk.

4. Tétel. *Ha \mathfrak{R} tetszőleges alcsoportha \mathfrak{G} -nek, akkor*

$$\mathfrak{S}(\Sigma[\mathfrak{R}]) = \mathfrak{R}.$$

Ugyanis $\Sigma[\mathfrak{R}]$ összetevői éppen \mathfrak{R} elemei. Mivel ezeket \mathfrak{R} tartalmazza és viszont valódi alcsoportha valamennyit nem tartalmazhatja, állításunk helyes.

5. Tétel. *Ha $B \neq 0$, C_1, C_2 a csoportalgebra elemei és $\mathfrak{S}(B)$ tartalmazza C_1 valamennyi összetevőjét, viszont nem tartalmazza C_2 egyetlen összetevőjét sem, továbbá*

$$BC_1 + BC_2 = 0,$$

akkor

$$BC_1 = 0.$$

Feltételeinkből következik, hogy $\mathfrak{S}(B)$ tartalmazza BC_1 valamennyi összetevőjét. Viszont nem tartalmazza BC_2 egyetlen összetevőjét sem, mivel ezek egy $\mathfrak{S}(B)$ -be tartozó és egy nem $\mathfrak{S}(B)$ -be tartozó csoportelem összeszorzásával keletkeznek. Mint-hogy azonban $(BC_1 + BC_2)$ -nek nincs összetevője s így nincs $\mathfrak{S}(B)$ -be tartozó összetevője sem, BC_1 -nek sem lehet összetevője, azaz $BC_1 = 0$.

6. Tétel. *Ha a csoportalgebra zérustól különböző B_1, \dots, B_k elemeire és S törzssorára nézve*

$$B_1 \dots B_k S = 0$$

és

$$B_1 \dots B_k \neq 0,$$

akkor

$$d(B_1, \dots, B_k, S) = d(B_1, \dots, B_k).$$

Állításunkat először a $k = 1$ esetre igazoljuk. Legyen tehát $BS = 0$, $B \neq 0$ és bebizonyítandó, hogy $d(B, S) = d(B)$.

Legyen

$$S = A + \dots + A^{p-1}.$$

Ha $\mathfrak{S}(B)$ tartalmazza A -t, akkor (7) miatt tartalmazza $\mathfrak{S}(S)$ -et is. Tehát

$$\mathfrak{S}(B, S) = \mathfrak{S}(B), \quad (14)$$

amiből

$$r(B, S) = r(B)$$

és állításunk ebből közvetlenül adódik. Kimutatandó tehát csak az, hogy $\mathfrak{S}(B)$ elemként tartalmazza A -t.

Legyen A^h a legalacsonyabb oly hatványa A -nak, amelyet $\mathfrak{S}(B)$ tartalmaz. Ha $h = 1$, állításunk helyes. Feltesszük, hogy $h > 1$ és ellentmondáshoz fogunk jutni.

Mivel p törzsszám és $h > 1$, meghatározhatók a q és t egészszámok úgy, hogy

$$p = qh - t, \quad q > 0, \quad 0 < t < h. \quad (15)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$S_1 = 1 + A + \dots + A^{(q-1)h},$$

$$S_2 = 1 + A + \dots + A^{h-1},$$

$$S_3 = 1 + A + \dots + A^{t-1}.$$

(15) figyelembevételével tehát

$$A^p S_3 = S_1 S_2 - S. \quad (16)$$

Minthogy h értelmezése következtében $\mathfrak{S}(B)$ tartalmazza S_1 valamennyi összetevőjét és nem tartalmazza $(S - S_1)$ egyetlen összetevőjét sem és mivel tételünk feltevése értelmében

$$BS_1 + B(S - S_1) = 0,$$

az 5. tétel szerint

$$BS_1 = 0.$$

Ebből és tételünk feltevéséből (16) felhasználásával

$$BS_3 = A^{-p}[S_2 \cdot BS_1 - BS] = 0. \quad (17)$$

Mivel $\mathfrak{S}(B)$ tartalmazza 1-et, mint egységelemet és (15) miatt nem tartalmazza $S_3 - 1$ egyetlen összetevőjét sem és mivel (17)-ből

$$B + B(S_3 - 1) = 0,$$

az 5. tétel szerint $B = 0$. Ez ellentmond feltevésünknek, tehát tételünk állítása a $k = 1$ esetben helyes.

Legyen most már $k > 1$. Legyen $B = B_1 \dots B_k$ s így a már igazolt (14) szerint

$$\mathfrak{S}(B_1 \dots B_k, S) = \mathfrak{S}(B_1 \dots B_k),$$

vagyis (9) miatt

$$\mathfrak{S}(B_1 \dots B_k) \mathfrak{S}(S) = \mathfrak{S}(B_1 \dots B_k).$$

Mint hogy a 2. tétel bizonyítása értelmében $\mathfrak{S}(B_1 \dots B_k)$ alsorozatja $\mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k)$ -nak, egyenletünket $\mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k)$ -val szorozva:

$$\mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k) \mathfrak{S}(S) = \mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k).$$

Ebből pedig (9) segítségével

$$\mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k, S) = \mathfrak{S}(B_1, \dots, B_k)$$

és a már többször alkalmazott gondolatmenettel tételünk állítása is következik.

7. Tétel. Ha a csoportalgebra zérustól különböző B_1, \dots, B_k elemeire és a D különbségre nézve

$$B_1 \dots B_k D = 0$$

és

$$B_1 \dots B_k \neq 0,$$

akkor

$$d(B_1, \dots, B_k, D) = d(B_1, \dots, B_k).$$

Tételünk bizonyításának gondolatmenete azonos az előző tétel bizonyításáéval.

Először a $k = 1$ esettel foglalkozunk. Legyen tehát $BD = 0$, $B \neq 0$ és bizonyítandó, hogy $d(B, D) = d(B)$.

Legyen $D = A - 1$. Ha $\mathfrak{S}(B)$ tartalmazza A -t, akkor (8) következtében tartalmazza $\mathfrak{S}(D)$ -t is és így

$$\mathfrak{S}(B, D) = \mathfrak{S}(B). \quad (18)$$

Ebből állításunk az ismert módon következik.

$\mathfrak{S}(B)$ azonban tartalmazza A -t, mert különben a feltevésünk miatt fennálló

$$B - BA = 0$$

egyenletből az 5. tétel szerint $B = 0$ következne. Ezzel állításunkat a $k = 1$ esetben igazoltuk.

A $k > 1$ esetben állításunk (18)-ból ugyanúgy következik, ahogyan a 6. tétel megfelelő állítása (14)-ből következett.

8. Tétel. *Ha A a \mathfrak{G} csoportnak eleme, B_1, \dots, B_k a \mathfrak{G} -hez tartozó csoportalgebra zérustól különböző elemei és p törzsszám, akkor*

$$d(B_1, \dots, B_k, A) \leq d(B_1, \dots, B_k, A^p) + 1.$$

Legyen $B = \Sigma[\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k)]$. A 4. tétel szerint

$$\mathfrak{H}(B) = \mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k).$$

(9)-re való tekintettel tehát bizonyítandó állításunk így írható

$$d(B, A) = d(B, A^p) + 1, \quad (19)$$

vagyis (2) folytán elegendő állításunkat a $k=1$ esetre igazolnunk.

Ha $\mathfrak{H}(B, A) = \mathfrak{H}(B, A^p)$, akkor az ismert lépésekkel következik, hogy

$$d(B, A) = d(B, A^p). \quad (20)$$

Ha azonban $\mathfrak{H}(B, A) \neq \mathfrak{H}(B, A^p)$, akkor $\mathfrak{H}(B, A^p)$ valódi alesoportja $\mathfrak{H}(B, A)$ -nak. Képezzük a $\mathfrak{H}(B, A) / \mathfrak{H}(B, A^p)$ osztócsoportot. Mivel feltevésünkéből következőleg $\mathfrak{H}(B, A^p)$ nem tartalmazza A -t, $A\mathfrak{H}(B, A^p)$ valódi mellékcsoport. Minthogy pedig $A\mathfrak{H}(B, A^p)$ -nek p -edik hatványa $\mathfrak{H}(B, A^p)$, következik, hogy e mellékcsoportnak (mint az osztócsoport elemének) rendszáma p . E mellékcsoport által képezett ciklikus alesoport azonban kimeríti az egész osztócsoportot, különben ugyanis ez a ciklikus alesoport $\mathfrak{H}(B, A)$ -nak oly valódi alesoportját szolgáltatná, amely — ellentétben $\mathfrak{H}(B, A)$ értelmezésével — tartalmazná $\mathfrak{H}(A)$ -t és $\mathfrak{H}(B)$ -t is. Tehát a szóbanforgó osztócsoport rendszáma p és így

$$r(B, A) = p \cdot r(B, A^p).$$

(12) és (11) alkalmazásával tehát

$$d(B, A) = d(B, A^p) + 1. \quad (21)$$

(20) és (21) szerint (19) minden esetben helyes. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

A bebizonyított tételnek többször alkalmazandó különleges esetét nyerjük, ha az

$$S = 1 + A + \dots + A^{p-1}$$

alakú nem-ciklikus törzssort és a hozzája rendelt

$$D = A^p - 1$$

különbséget tekintjük. Ezekre ugyanis (7), illetve (8) szerint

$$\mathfrak{S}(S) = \mathfrak{S}(A), \quad \mathfrak{S}(D) = \mathfrak{S}(A^p).$$

(9)-re való tekintettel tehát a bebizonyított tétel szerint (zérustól különböző B_1, \dots, B_k csoportalgebraelemekre és az S nem-ciklikus törzssorhoz rendelt D különbségre)

$$d(B_1, \dots, B_k, S) \leq d(B_1, \dots, B_k, D) + 1. \quad (22)$$

9. Tétel. *Ha a B csoportalgebraelemre és az S nem-ciklikus sorra nézve*

$$BS = 0,$$

akkor az S -hez rendelt D különbségre

$$BD = 0.$$

Legyen S alakja a (4) alatti. Szorozzuk meg a feltételi egyenletet $(A-1)$ -el. Minthogy

$$S(A-1) = D, \quad (23)$$

a szorzás éppen a bizonyítandó egyenlőséget szolgáltatja.

A csoportalgebra olyan elemét, mely zérustól különböző és amelynek nincs negatív koordinátája, *pozitívnak* nevezzük. Ilyen pozitív csoportalgebraelem pl. egy sor és $\Sigma[\mathfrak{S}]$. Világos, hogy pozitív csoportalgebraelemek szorzata is pozitív. Nem szorul bizonyításra az sem, hogy ilyen szorzat esetében a tényezők egy-egy összetevőjének szorzata összetevője a szorzás eredményeként nyert csoportalgebraelemnek.

Minthogy a következő tétel általában csak pozitív csoportalgebraelemre helyes, vizsgálataink későbbi szakaszán — amikor e tételt alkalmazni fogjuk — kénytelenek leszünk pozitív csoportalgebraelemekre szorítkozni.

10. Tétel. *Ha B a csoportalgebra pozitív eleme, S egy nem-ciklikus sora, D a hozzárendelt különbség és*

$$BS = \Sigma[\mathfrak{S}(BS)],$$

akkor

$$BD = 0.$$

Legyen S alakja a (4) alatti és legyen A_1 egy összetevője B -nek. Mivel B és S pozitív csoportalgebraelemek és mivel 1 és A összetevője S -nek, a fentebb mondottak értelmében A_1 és AA_1 összetevője BS -nek. Tehát $\mathfrak{S}(BS)$ tartalmazza A_1 -et és AA_1 -et s így tartalmazza A -t is.

Szorozzuk meg feltételi egyenletünket $(A-1)$ -el. (3) és (23) szerint így éppen a bizonyítandó egyenlőséget nyerjük.

Azt, hogy tételünk tetszőleges B csoportalgebraelemre már nem helyes, a következő példa mutatja: Tekintsük az $A^6=1$ egyenlettel értelmezett hatodrendű ciklikus csoportot. Legyen $B=1-A+A^2$, $S=1+A$ és így $D=A^2-1$. Ekkor

$$BS=1+A^3$$

s így feltételi egyenletünk teljesül, azonban $BD \neq 0$.

4. §. Irreducibilisan eltűnő szorzatok.

Ha C, B_1, \dots, B_k a csoportalgebra elemei és

$$CB_1 \dots B_k = 0,$$

azonban B_1, \dots, B_k bármelyikét hagyjuk is el a szorzatból, az már nem tűnik el, akkor azt mondjuk, hogy a szorzat B_1, \dots, B_k -ban *irreducibilisan tűnik el*.

Ha $C \neq 0$ és $CB_1 \dots B_m = 0$, azonban e szorzat B_1, \dots, B_m -ben nem irreducibilisan tűnik el, akkor nyilván lehet a B_1, \dots, B_m tényezőkből egyet-egyet sorozatosan úgy elhagyni, míg végül is — a mutatók esetleges átcserélése után — egy $CB_1 \dots B_k = 0$ szorzathoz jutunk, amely már B_1, \dots, B_k -ban irreducibilisan tűnik el.

11. Tétel. Ha a C zérustól különböző csoportalgebraelemre s a D_1, \dots, D_m különbségekre

$$CD_1 \dots D_m = 0 \quad (24)$$

és e szorzat D_1, \dots, D_m -ben irreducibilisan tűnik el, akkor

$$m > d(C, D_1, \dots, D_m) - d(C).$$

Tekintsük a

$$g = d(D_1) + \dots + d(D_m) - m \quad (25)$$



kifejezést. Minthogy bármely különbségnek van 1-től különböző összetevője is, $r(D_i) > 1$ és így $d(D_i) > 0$. Következésképp $g \geq 0$.

Tételünket g -re vonatkozó teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

Ha $g = 0$, akkor a fentiek értelmében

$$d(D_1) = \dots = d(D_m) = 1. \quad (26)$$

Mivel a (24) szorzat D_1, \dots, D_m -ben irreducibilisan tűnik el, alkalmazható a $D = D_1$ választással a 7. tétel és e szerint

$$d(C, D_1, \dots, D_m) = d(C, D_2, \dots, D_m). \quad (27)$$

Az 1. tétel szerint azonban

$$d(C, D_2, \dots, D_m) \leq d(C) + d(D_2) + \dots + d(D_m),$$

(26) és (27) következtében tehát

$$d(C, D_1, \dots, D_m) \leq d(C) + (m-1),$$

ez pedig egyértékű a bizonyítandó állítással.

Legyen most már $g > 0$ és tegyük fel, hogy tételünk állítása helyes, ha a (25) jobboldalán álló kifejezés értéke g -nél kisebb. Minthogy $g > 0$, feltehetjük (megfelelő jelölést választva), hogy $d(D_1) > 1$. Legyen $D_1 = A - 1$ és legyen p egy törzsosztója $r(D_1)$ -nek. Legyen továbbá $\bar{D}_1 = A^p - 1$. Minthogy $d(D_1) > 1$ és (8) szerint $r(D_1) = r(A)$, $r(A)$ nem törzsszám, tehát $A^p \neq 1$ és így \bar{D}_1 különbség. Tekintettel arra, hogy $\mathfrak{S}(A^p)$ valódi alcsoportja $\mathfrak{S}(A)$ -nak, $r(A^p)$ valódi osztója $r(A)$ -nak és így $d(A^p) < d(A)$, azaz (8) szerint

$$d(\bar{D}_1) < d(D_1). \quad (28)$$

Szorozzuk meg a (24) feltételi egyenletet $(1 + A + \dots + A^{p-1})$ -el. Mivel D_1 -et e kifejezéssel szorozva \bar{D}_1 -et kapjuk, a

$$C\bar{D}_1 D_2 \dots D_m = 0 \quad (29)$$

egyenletet nyerjük. Ha (29) baloldaláról \bar{D}_1 -et elhagyjuk, a maradék szorzat tételünk feltevése szerint nem tűnik el. Tehát (29) baloldaláról egyes tényezőket esetleg elhagyva, megfelelő mutatóhasználat esetén a

$$C\bar{D}_1 D_2 \dots D_k = 0 \quad (1 \leq k \leq m) \quad (30)$$

$\bar{D}_1, D_2, \dots, D_k$ -ban irreducibilisan eltűnő szorzathoz jutunk. A (30) szorzatra képezve a (25) jobboldalán állónak megfelelő kifejezést, ennek értéke (28) következtében g -nél kisebb. Indukciós feltevésünk értelmében tehát a (30) szorzatra alkalmazható a bizonyítandó tétel és e szerint

$$k > d(C, \bar{D}_1, D_2, \dots, D_k) - d(C). \quad (31)$$

A következőkben két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $k = m$.

Ez esetben (31) így alakul:

$$m > d(C, \bar{D}_1, D_2, \dots, D_m) - d(C). \quad (32)$$

A (30) és (24) szorzat irreducibilitása miatt kétszer alkalmazható a 7. tétel és így

$$d(C, \bar{D}_1, D_2, \dots, D_m) = d(C, D_2, \dots, D_m) = d(C, D_1, \dots, D_m).$$

Ezt figyelembevéve (32) éppen a bizonyítandó állítást szolgáltatja.

2. eset: $k < m$.

Minthogy (8) szerint $\mathfrak{H}(D_1) = \mathfrak{H}(A)$ és $\mathfrak{H}(\bar{D}_1) = \mathfrak{H}(A^p)$, a 8. tétel alapján (9) felhasználásával:

$$d(C, D_1, \dots, D_k) \leq d(C, \bar{D}_1, D_2, \dots, D_k) + 1.$$

(31) alapján azonban

$$k \geq d(C, \bar{D}_1, D_2, \dots, D_k) + 1 - d(C).$$

Két eredményünk összevetéséből tehát

$$k \geq d(C, D_1, \dots, D_k) - d(C). \quad (33)$$

A (24) szorzatot tekinthetjük úgy, hogy az D_{k+1}, \dots, D_m -ben irreducibilisan tűnik el; ekkor C helyébe a (24) irreducibilitása és $k < m$ miatt zérustól különböző $CD_1 \dots D_k$ lép. E szorzatra képezve a (25) jobboldalán állónak megfelelő kifejezést, annak értéke $d(D_1) > 1$ miatt g -nél kisebb. Alkalmazható tehát e szorzatra indukciós feltevésünk értelmében a bizonyítandó tétel:

$$m - k > d(CD_1 \dots D_k, D_{k+1}, \dots, D_m) - d(CD_1 \dots D_k).$$

A 3. tétel szerint tehát

$$m - k > d(C, D_1, \dots, D_m) - d(C, D_1, \dots, D_k).$$

Ezt és (33)-at összeadva a bizonyítandó állítást nyerjük.

Ezzel az indukciós állítást minden esetre igazoltuk és tételünket teljes indukcióval bebizonyítottuk.

12. Tétel. *Ha a zérustól különböző C csoportalgebraelemre és a T_1, \dots, T_m nem-ciklikus törzssorokra és különbségekre*

$$CT_1 \dots T_m = 0 \quad (34)$$

és e szorzat T_1, \dots, T_m -ben irreducibilisan tűnik el, akkor

$$m > d(C, T_1, \dots, T_m) - d(C).$$

Legyen a T_1, \dots, T_m között szereplő törzssorok száma g . Tételünket g -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $g=0$, állításunk a 11. tétel állítása. Legyen tehát $g>0$ és tegyük fel, állításunk helyes, ha a T_1, \dots, T_m között szereplő törzssorok száma g -nél kisebb.

Mivel $g>0$, feltehetjük (megfelelő jelölést választva), hogy T_1 törzssor. Legyen a T_1 -hez rendelt különbség D_1 . A 9. tételt alkalmazva (34)-re:

$$CD_1 T_2 \dots T_m = 0. \quad (35)$$

Ha e szorzatból D_1 -et elhagyjuk, a maradó szorzat (34) irreducibilitása folytán nem tűnik el. Ha tehát (35) baloldaláról egyes tényezőket esetleg elhagyunk, végül is megfelelő mutatóhasználat esetén a

$$CD_1 T_2 \dots T_k = 0 \quad (1 \leq k \leq m) \quad (36)$$

D_1, T_2, \dots, T_k -ban irreducibilisan eltűnő szorzathoz jutunk. Mint-hogy T_1 törzssor, a T_2, \dots, T_k tényezők között legfeljebb $(g-1)$ törzssor lehet. Indukciós feltevésünk értelmében tehát alkalmazható (36)-ra a bizonyítandó tételünk és így

$$k > d(C, D_1, T_2, \dots, T_k) - d(C). \quad (37)$$

A következőkben két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $k = m$.

(37) szerint ez esetben

$$m > d(C, D_1, T_2, \dots, T_m) - d(C). \quad (38)$$

A (36) szorzat irreducibilitása folytán alkalmazható a 7. tétel és e szerint

$$d(C, D_1, T_2, \dots, T_m) = d(C, T_2, \dots, T_m).$$

Másrészt a (34) irreducibilisan eltűnő szorzatra a 6. tételt alkalmazva:

$$d(C, T_1, \dots, T_m) \leq d(C, T_2, \dots, T_m).$$

Ezek figyelembevételével (38) éppen tételünk állítását adja.

2. eset: $k < m$.

A 8. tétel (22) alakja szerint

$$d(C, T_1, \dots, T_k) \leq d(C, D_1, T_2, \dots, T_k) + 1.$$

(37) szerint azonban

$$k \geq d(C, D_1, T_2, \dots, T_k) + 1 - d(C),$$

tehát

$$k \geq d(C, T_1, \dots, T_k) - d(C). \quad (39)$$

A (34) szorzatot felfoghatjuk úgy is, hogy ez T_{k+1}, \dots, T_m -ben irreducibilisan tűnik el: ekkor C szerepét az irreducibilitás miatt zérustól különböző $CT_1 \dots T_k$ játssza. A T_{k+1}, \dots, T_m tényezők között legfeljebb $(g-1)$ törzssor lehet csak, mert T_1 törzssor. Indukciós feltevésünk értelmében alkalmazhatjuk tehát szorzatunkra a bizonyítandó tételt:

$$m - k > d(CT_1 \dots T_k, T_{k+1}, \dots, T_m) - d(CT_1 \dots T_k)$$

és így a 3. tétel szerint

$$m - k > d(C, T_1, \dots, T_m) - d(C, T_1, \dots, T_k).$$

Ezt (39)-hez adva a bizonyítandó állítást nyerjük.

Ezzel indukciós állításunkat minden esetre igazoltuk és tételünket teljes indukcióval bebizonyítottuk.

5. §. Sorok szorzataira vonatkozó tételek.

A csoportalgebra valamely $B = a_1 A_1 + \dots + a_r A_r$ eleme koordinátáinak összegét $s(B)$ -vel jelöljük, vagyis

$$s(B) = a_1 + a_2 + \dots + a_r.$$

A csoportalgebra elemeinek szorzására vonatkozó megállapodásunk értelmében világos, hogy bármely B_1, B_2 csoportalgebraelemekre

$$s(B_1 B_2) = s(B_1) \cdot s(B_2). \quad (40)$$

Ha \mathfrak{H} egy alcsoportja \mathfrak{G} -nek, akkor, mivel $\Sigma[\mathfrak{H}]$ -nak minden el nem tűnő koordinátája 1, erre nézve

$$s(\Sigma[\mathfrak{H}]) = r(\mathfrak{H}). \quad (41)$$

Ezt az $s(B)$ függvényt használjuk következő tételünk bizonyításánál.

13. Tétel. *Ha a zérustól különböző C csoportalgebraelemre és az S_1, \dots, S_m törzssorokra nézve*

$$C = \Sigma[\mathfrak{H}(C)] \quad (42)$$

és

$$CS_1 \dots S_m = \Sigma[\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m)], \quad (43)$$

akkor

$$m = d(CS_1 \dots S_m) - d(C).$$

Tételünket akár az $m = 0$ esetre is kiterjeszthetjük, de akkor állítása semmitmondóvá válik.

A tétel bizonyítása végéig alkalmazzuk (41)-et (42)-re és (43)-ra. Így a (10) szerinti jelölést használva azt nyerjük, hogy

$$s(C) = r(C), \quad (44)$$

$$s(CS_1 \dots S_m) = r(CS_1 \dots S_m). \quad (45)$$

Alkalmazzuk a (40) szabályt (45) baloldalára és vegyük figyelembe (44)-et:

$$r(C) s(S_1) \dots s(S_m) = r(CS_1 \dots S_m).$$

Erre az egyenletre viszont a (12) szabályt alkalmazva

$$d(C) + d[s(S_1)] + \dots + d[s(S_m)] = d(CS_1 \dots S_m). \quad (46)$$

Mivel azonban S_i törzssor és $s(S_i)$ e törzssor tagjainak számát adja, $s(S_i)$ törzsszám, tehát (11) szerint

$$d[s(S_1)] = \dots = d[s(S_m)] = 1.$$

Ha ezt (46)-ban figyelembe vesszük, a tétel állításával egyértékű

$$d(C) + m = d(CS_1 \dots S_m)$$

egyenletet kapjuk.

Ezek után rátérhetünk a következő tétel bizonyítására, amely a MINKOWSKI-féle sejtés igazolásának leglényegesebb segédeszköze s amely bizonyos értelemben ellentettje a most bebizonyított 13. tételnek.

14. Tétel. *Ha C a csoportalgebra oly pozitív⁸ eleme, amely eleget tesz a*

$$C = 1, \\ C \neq \Sigma[\mathfrak{S}(C)]^9$$

feltételek valamelyikének, ha továbbá S_1, \dots, S_m oly nem-ciklikus törzssorok, amelyekre

$$CS_1 \dots S_m = \Sigma[\mathfrak{S}(CS_1 \dots S_m)], \quad (47)$$

akkor

$$m > d(CS_1 \dots S_m) - d(C).$$

Tételünket m -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

Legyen tehát először $m = 1$. Ez esetben külön foglalkozunk a $C = 1$ és $C \neq \Sigma[\mathfrak{S}(C)]$ esettel.

Ha $C = 1$, akkor a (47) feltétel nem is teljesülhet¹⁰ s így nincs mit bizonyítanunk. (47) teljesülése ugyanis ez esetben azt jelentené, hogy

$$S_1 = \Sigma[\mathfrak{S}(S_1)].$$

Alkalmazzuk $B=1$ választással a 10. tételt, így az S_1 -hez rendelt különbséget D_1 -el jelölve $D_1 = 0$ következne. Ez azonban valóban lehetetlen, mert S_1 nem-ciklikus.

Ha $C \neq \Sigma[\mathfrak{S}(C)]$, akkor állításunkat indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy állításunk helytelen, vagyis

$$1 \leq d(CS_1) - d(C),$$

azaz

$$d(CS_1) > d(C). \quad (48)$$

⁸ V. ö. a 10. tétel előtti megjegyzésünket.

⁹ $C = 1$ ezt a feltételt nem elégíti ki, mivel $\mathfrak{S}(1)$ az egységscsoport és így $1 = \Sigma[\mathfrak{S}(1)]$.

¹⁰ Az a tény, hogy (47) ez esetben nem teljesülhet, éppen az igazolandó MINKOWSKI-féle sejtés speciális esete. E sejtés szerint ugyanis, amint azt a későbbiekben kimutatjuk, a $C = 1$ esetben (47) egyetlen m -re sem teljesülhet. A 14. tételnek $C = 1$ esetre vonatkozó része tehát csak úgy értendő, hogy ha esetleg (47) teljesülne, akkor a tétel állításának is teljesülnie kellene.

C és S_1 pozitivitása folytán $\mathfrak{H}(CS_1)$ alsoportként tartalmazza $\mathfrak{H}(C)$ -t, rendszámaikra tehát

$$r(CS_1) = c \cdot r(C),$$

ahol c pozitív egészszám. (12) alkalmazásával tehát

$$d(CS_1) = d(c) + d(C).$$

Ebből (48) alapján következik, hogy $d(c) > 0$, vagyis $c \neq 1$. Tehát $\mathfrak{H}(C)$ valódi alsoportja $\mathfrak{H}(CS_1)$ -nek. Legyen

$$S_1 = 1 + A + \dots + A^{p-1}.$$

$\mathfrak{H}(C)$ nem tartalmazza A -t, mert ellenkező esetben (7)-re való tekintettel tartalmazná $\mathfrak{H}(S_1)$ -et és így nem lehetne valódi alsoportja $\mathfrak{H}(CS_1)$ -nek. Tehát $A\mathfrak{H}(C)$ valódi melléksoportja $\mathfrak{H}(C)$ -nek. Minthogy azonban (47) értelmében

$$CS_1 = \Sigma[\mathfrak{H}(CS_1)], \quad (49)$$

a 10. tétel szerint

$$C(A^p - 1) = 0.$$

Vagyis $C = CA^p$ és így (9) szerint

$$\mathfrak{H}(C) = \mathfrak{H}(C) \mathfrak{H}(A^p).$$

$\mathfrak{H}(C)$ tehát tartalmazza $\mathfrak{H}(A^p)$ minden elemét és így A^p -t is. Ez azonban azt jelenti, hogy az $A\mathfrak{H}(C)$ melléksoportnak — mint a $\mathfrak{H}(CS_1)/\mathfrak{H}(C)$ osztócsoport elemének — rendszáma p . Az osztócsoportnak e melléksoport által képezett ciklikus alsoportja kimeríti az egész osztócsoportot, mert különben ez a ciklikus alsoport $\mathfrak{H}(CS_1)$ -nek oly valódi alsoportját szolgáltatná, amely — ellentétben a 2. tétel bizonyításánál mondottakkal — tartalmazná $\mathfrak{H}(C)$ -t és $\mathfrak{H}(S_1)$ -et is. A $\mathfrak{H}(CS_1)/\mathfrak{H}(C)$ osztócsoport rendszáma tehát megegyezik a szóbanforgó ciklikus alsoport rendszámával, vagyis egyenlő p -vel. A rendszámokra vonatkozólag tehát

$$r(CS_1) = p \cdot r(C). \quad (50)$$

Másrészt (49)-re alkalmazva a (41) szabályt

$$r(CS_1) = s(CS_1)$$

és mivel $s(S_1) = p$, (40) szerint

$$r(CS_1) = p \cdot s(C).$$

Ezt (50)-el összevetve

$$s(C) = r(C). \quad (51)$$

C -nek azonban nem lehet 1-nél nagyobb koordinátája, mert akkor C pozitív voltára való tekintettel CS_1 -nek is lenne 1-nél nagyobb koordinátája, ez pedig ellentmondana (49)-nek. (51) tehát csak úgy állhat fenn, ha C összetevőinek száma $r(C)$ és mindegyikhez mint koordináta 1 tartozik. C minden összetevője azonban eleme a $\mathfrak{S}(C)$ csoportnak és ennek rendszáma $r(C)$, tehát $\mathfrak{S}(C)$ minden eleme összetevője C -nek, azaz — mivel mindegyikhez koordinátaként 1 tartozik — C megegyezik $\Sigma[\mathfrak{S}(C)]$ -vel. Ez ellentmond feltevésünknek s így eredeti állításunk helyes.

Tételünket az $m = 1$ esetben bebizonyítván, tegyük most már fel, hogy $m > 1$ és hogy tételünk minden olyan esetben helyes, amikor a (47) szorzatban szorozóként szereplő törzssorok száma m -nél kisebb.

Jelöljük az S_1 -hez rendelt különbséget D_1 -el. Alkalmazzuk (47)-re $B = CS_2 \dots S_m$ választással a 10. tételt. Ezt megtehetjük, mert B — mint pozitív csoportalgebraelemek szorzata — pozitív. Így tehát

$$CD_1 S_2 \dots S_m = 0. \quad (52)$$

Ha e szorzatból D_1 -et elhagyjuk, a maradó szorzat nem tűnhet el, mert akkor (47) baloldala is eltűnnék, ámde a jobboldal (2) szerint nem tűnhet el. Ha tehát az (52) szorzatból egyes tényezőket esetleg elhagyunk, végül is megfelelő mutatóhasználatot feltételezve a

$$CD_1 S_2 \dots S_k = 0 \quad (1 \leq k \leq m) \quad (53)$$

D_1, S_2, \dots, S_k -ban irreducibilisan eltűnő szorzathoz jutunk. Mint-hogy C feltevésünk értelmében nem zérus, alkalmazható e szorzatra a 12. tétel, vagyis

$$k < d(C, D_1, S_2, \dots, S_k) = d(C). \quad (54)$$

A következőkben két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $k = m$.

(53) szerint ez esetben

$$CD_1 S_2 \dots S_m = 0 \quad (55)$$

D_1, S_2, \dots, S_m -ben irreducibilisan tűnik el, (54) szerint pedig

$$m > d(C, D_1, S_2, \dots, S_m) - d(C). \quad (56)$$

(55) irreducibilitása miatt alkalmazható a 7. tétel s egyben a 2. tételt is alkalmazva

$$d(C, D_1, S_2, \dots, S_m) = d(C, S_2, \dots, S_m) \geq d(CS_2 \dots S_m).$$

Tehát (56) alapján

$$m > d(CS_2 \dots S_m) - d(C). \quad (57)$$

Két alesetet különböztetünk meg.

$$1a. \text{ eset: } CS_2 \dots S_m = \Sigma[\mathfrak{S}(CS_2 \dots S_m)]. \quad (58)$$

Mivel a $CS_2 \dots S_m$ szorzatban szorzóként szereplő törzssorok száma $(m-1)$, indukciós feltevésünk értelmében alkalmazható rá bizonyítandó tételünk és így az (57)-nél többetmondó

$$m - 1 > d(CS_2 \dots S_m) - d(C) \quad (59)$$

relációhoz jutunk. A $(CS_2 \dots S_m)S_1$ szorzatra (47) és (58) következtében alkalmazhatjuk a 13. tételt úgy, hogy a tételbeli C szerepét $CS_2 \dots S_m$ játssza. Így az

$$1 = d(CS_1 \dots S_m) - d(CS_2 \dots S_m)$$

egyenlethez jutunk, amelyet (59)-hez adva állításunkat kapjuk.

$$1b. \text{ eset: } CS_2 \dots S_m \neq \Sigma[\mathfrak{S}(CS_2 \dots S_m)]. \quad (60)$$

A $(CS_2 \dots S_m)S_1$ szorzatra (47) és (60) folytán alkalmazhatjuk tételünknek már bebizonyított $m = 1$ esetét úgy, hogy a tételbeli C szerepét $CS_2 \dots S_m$ játssza, e szorzat ugyanis, mint pozitív csoportalgebraelemek szorzata maga is pozitív. E szerint

$$1 > d(CS_1 \dots S_m) - d(CS_2 \dots S_m),$$

tehát

$$0 \geq d(CS_1 \dots S_m) - d(CS_2 \dots S_m).^{11}$$

Ezt (57)-hez adva tételünk állítását nyerjük.

2. eset: $k < m$.

A 8. tétel (22) alakja szerint s egyben a 2. tételt is alkalmazva.

$$d(C, D_1, S_2, \dots, S_k) + 1 \geq d(C, S_1, \dots, S_k) \geq d(CS_1 \dots S_k). \quad (61)$$

¹¹ Könnyű kimutatni, hogy itt csak az egyenlőség esete foroghat fenn

(54) szerint azonban

$$k \geq d(C, D_1, S_2, \dots, S_k) + 1 - d(C),$$

tehát (61) alkalmazásával

$$k \geq d(CS_1 \dots S_k) - d(C). \quad (62)$$

Ismét megkülönböztetünk két esetet.

$$2a. \text{ eset: } CS_1 \dots S_k = \Sigma[\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_k)]. \quad (63)$$

A $CS_1 \dots S_k$ szorzatban szorzóként szereplő törzssorok száma k , ez feltevésünk szerint kisebb m -nél. Tehát indukciós feltevésünk értelmében alkalmazható e szorzatra a bizonyítandó tétel és így a (62)-nél többetmondó

$$k > d(CS_1 \dots S_k) - d(C) \quad (64)$$

relációhoz jutunk. Másrészt alkalmazni fogjuk a 13. tételt a (47) szorzatra úgy, hogy a tételbeli C szerepét $CS_1 \dots S_k$ játssza; ezt (47) és (63) következtében megtehetjük. A 13. tétel szerint tehát

$$m - k = d(CS_1 \dots S_m) - d(CS_1 \dots S_k)$$

s ezt (64)-hez adva állításunkat kapjuk.

$$2b. \text{ eset: } CS_1 \dots S_k \neq \Sigma[\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_k)]. \quad (65)$$

Alkalmazni fogjuk a (47) szorzatra bizonyítandó tételünket úgy, hogy a tételbeli C szerepét $CS_1 \dots S_k$ játssza, amely szorzat csak pozitív csoportalgebraelemeket tartalmaz tényezőként s így maga is pozitív. Az így felfogott (47) szorzat szorzóként ($m - k$ törzssort tartalmaz, tehát m -nél kevesebbet s így indukciós feltevésünk értelmében, valamint (47)-re és (65)-re való tekintettel a tétel csakugyan alkalmazható. Vagyis

$$m - k > d(CS_1 \dots S_m) - d(CS_1 \dots S_k)$$

s ezt (62)-höz adva állításunkat nyerjük.

Ezzel az $m > 1$ esetre vonatkozó indukciós állításunkat minden esetben igazoltuk és a 14. tételt teljes indukcióval bebizonyítottuk.

6. §. Minkowski sejtésének igazolása.

A 13. és 14. tételben szereplő C az 1 értéket mindkét tétel-nél felveheti, pedig a két tétel állítása bizonyos szempontból

összeférhetetlen. Ez az ellentmondás ad módot arra, hogy MINKOWSKI sejtését igazoljuk. E végből azonban szükséges, hogy a sejtésnek a 3. fogalmazásához hasonló újabb alakot adjunk, amelyben már csak törzssorok szerepelnek.

15. Tétel. *Bármely sor törzssorok szorzatára bontható.*

Tekintsük az

$$S = 1 + A + \dots + A^{m-1}$$

sor és legyen $m = ab$, ahol $a, b > 1$. Ekkor nyilván

$$S = [1 + A + \dots + A^{a-1}] [1 + (A^a) + \dots + (A^a)^{b-1}]. \quad (66)$$

Az S sort tehát két sor szorzatára bontottuk. Ezt az eljárást ismételve végül is törzssorok szorzataként állítjuk elő az S sort.

Egy sor ily törzsfelbontása általában többféleképpen lehetséges. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha (66)-ban a és b szerepét felcseréljük.

16. Tétel. *Ha az S sorra és S_1, \dots, S_k törzssorokra vonatkozólag*

$$S = S_1 \dots S_k,$$

ha továbbá az S_1, \dots, S_k törzssorok valamelyike ciklikus, akkor az S sor is ciklikus.

Legyen

$$S = 1 + A + \dots + A^{m-1}$$

és legyen például az

$$S_1 = 1 + A_1 + \dots + A_1^{p-1}$$

törzssor ciklikus. A következőkben két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $A_1 = 1$.¹²

Ez esetben $S_1 = p$ és így S minden koordinátája osztható p -vel. Legyen A rendszáma, azaz $r(A) = h$. Tegyük fel, hogy S nem-ciklikus, vagyis, hogy m nem osztható h -val. Találhatók tehát q és t egészszámok úgy, hogy

$$m = qh + t, \quad 0 < t < h.$$

¹² Bár ez az eset a következőkben nem érdekel bennünket, a teljesség kedvéért erre is kiterjeszkedünk.

S -nek $(q+1)$ tagja egyenlő 1-el; ezek ugyanis

$$1, A^h, \dots, A^{qh}.$$

Másrészt S -nek q tagja egyenlő A^m -el; ezek ugyanis

$$A^t, A^{h+t}, \dots, A^{(q-1)h+t} = A^{m-h}.$$

S -nek 1-hez, mint összetevőhöz tartozó koordinátája tehát $(q+1)$, A^m -hez tartozó koordinátája pedig q s így mindkettő az 1-nél nagyobb p -vel osztható nem lehet. Kell tehát, hogy S ciklikus legyen.

2. eset: $A_1 \neq 1$.

(5) szerint

$$S_1(A_1 - 1) = 0,$$

tehát

$$(A_1 - 1)S = [S_1(A_1 - 1)] S_2 \dots S_k = 0. \quad (67)$$

Tegyük fel, hogy S nem-ciklikus. Alkalmazható tehát $B = A_1 - 1$ választással (67)-re a 9. tétel, ugyanis feltevésünk miatt $B \neq 0$. E tétel szerint

$$(A_1 - 1)(A^m - 1) = 0,$$

azaz

$$A_1 A^m + 1 = A_1 + A^m.$$

A baloldalon 1 összetevőként szerepel, azonban feltevéseink miatt a jobboldal egyik tagja sem lehet egyenlő 1-el. Ellentmondásra jutottunk s így S -nek ciklikusnak kell lennie.

MINKOWSKI sejtésének jelzett újabb alakja a következő:

4. Fogalmazás. Ha a véges, Abel-féle \mathfrak{G} csoportra és hozzá tartozó S_1, \dots, S_m törzssorokra nézve

$$S_1 \dots S_m = \Sigma[\mathfrak{G}], \quad (68)$$

akkor az S_1, \dots, S_m törzssorok valamelyike ciklikus.

Bebizonyítjuk, hogy a 3. és 4. fogalmazás állítása (röviden: 3. és 4.) egyértékű. Az közvetlenül adódik, hogy ha 3. helyes, akkor a 4. is helyes. Viszont fordítva 4. helyességéből következik 3. helyessége is. Bontsuk fel ugyanis a 3.-ban szereplő sorokat törzssorok szorzatára; ez a 15. tétel értelmében lehetséges. Az így nyert törzssorok között 4. szerint van ciklikus.

Akkor azonban a 16. tétel szerint ciklikus az a 3.-ban szereplő sor is, melynek törzsfelbontásában e ciklikus törzssor szerepel.

Említésreméltó, hogy a 4. fogalmazásban szereplő m szám már nem felel meg az előző fogalmazásokban n -nel jelölt mennyiségnek (a méreetszámnak). Ha tehát a sejtést az adott újabb alakjában tekintjük, annak bizonyítása n -től (a méretszámtól) függetlenül minden esetben egyforma nehézséget okoz.

Mindamellett tételeink segítségével a sejtést ebben az újabb alakjában most már könnyűszerrel igazolhatjuk.

Főeredmény: MINKOWSKI sejtése helyes.

A 4. tételt (68)-ra alkalmazva

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}(S_1 \dots S_m),$$

tehát (68) szerint

$$S_1 \dots S_m = \Sigma[\mathfrak{S}(S_1 \dots S_m)]. \quad (69)$$

Tegyük fel, hogy a sejtés hamis, vagyis, hogy S_1, \dots, S_m egyike sem ciklikus.

Minthogy $1 = \Sigma[\mathfrak{S}(1)]$, alkalmazhatjuk $C=1$ választással (69)-re a 13. tételt. Tehát $d(1) = 0$ miatt

$$m = d(S_1 \dots S_m). \quad (70)$$

Másrészt alkalmazhatjuk (69)-re ugyancsak $C=1$ választással a 14. tételt is és így

$$m > d(S_1 \dots S_m). \quad (71)$$

(70) és (71) ellentmondanak s így a sejtés helyes.

Hajós György.

Irodalom.

1. D. DERRY: Remarks on a conjecture of Minkowski. Amer. J. of Math. **62** (1940), 61—66.
2. HAJÓS GY.: Többmértetű terek befedése kockarácscsal. Mat. és Fiz. lapok **45** (1938), 171—190.
3. H. JANSEN: Lückenlose Ausfüllung des R_n mit gitterförmig angeordneten n -dimensionalen Quadern. Diss. Kiel (1909).
4. O. H. KELLER: Über lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln. Journal für r. u. a. Math. **163** (1930), 231—248.
5. O. H. KELLER: Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln. Journal für r. u. a. Math. **177** (1937), 61—64.

6. J. F. KOKSMA: Diophantische Approximationen. Erg. der Math. IV. 4. (1936), 15—16.
7. B. LEVI: Un teorema del Minkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere. Rend. Circ. Mat. Palermo **31** (1911), 318—340.
8. H. MINKOWSKI: Geometrie der Zahlen (1896), 105—107.
9. H. MINKOWSKI: Diophantische Approximationen (1907), 24—28, 67—75.
10. L. J. MORDELL: Minkowski's theorems and hypotheses on linear forms. C. R. du Congr. Internat. Oslo (1936), I. 226—238.
11. S. L. van OSS: Over een stelling van Minkowski. Hand. 15. Nat. Congr. Amsterdam (1915), 192—193.
12. O. PERRON: Über lückenlose Ausfüllung des n -dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel. Math. Zeitschr. **46** (1940), 1—26, 161—180.
13. O. PERRON: Modularartige lückenlose Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln, Math. Ann. **117**, 415—447 (1940), 609—658 (1941).
14. Th. SCHMIDT: Über lückenlose Zerlegung des n -dimensionalen Raumes in gitterförmig angeordnete Würfel. Schriften des math. Sem. Berlin. I. 6. (1933).
15. C. L. SIEGEL: Neuer Beweis des Satzes von Minkowski über lineare Formen. Math. Ann. **87** (1922), 36—38.

EINFACHE BEDECKUNG MEHRDIMENSIONALER RÄUME MIT WÜRFELGITTER.

In einer früheren Arbeit [diese Zeitschr. **45** (1938), 171—190] habe ich bewiesen, dass die MINKOWSKISCHE Vermutung, nach welcher ein den R_n einfach bedeckendes Würfelgitter zwei an einer ganzen Seitenfläche aneinanderstützende Würfel besitzen muss, mit folgender Behauptung Äquivalent ist: Ist in der aus einer endlichen, abelschen Gruppe \mathfrak{G} gebildeten Gruppenalgebra das Produkt der Reihen

$$1 + A_i + A_i^2 + \cdots + A_i^{\alpha_i - 1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

(wo A_1, A_2, \dots, A_n Elemente von \mathfrak{G} sind) gleich der Summe aller Elemente von \mathfrak{G} , so ist für wenigstens ein i :

$$A_i^{\alpha_i} = 1. \quad (2)$$

In vorliegender Arbeit wird die Richtigkeit dieser Behauptung bewiesen und so die MINKOWSKISCHE Vermutung für jede Dimensionszahl n rechtfertigt.

Es wird bewiesen, dass es genügt als Zahlen α_i nur Primzahlen zuzulassen, d. h. nur «Primreihen» zu betrachten. (Dann entspricht aber n nicht mehr der Dimensionszahl.) Zur Rechtfertigung der in

dieser Form betrachteten Vermutung ist eine Reihe gruppenalgebraischer Hilfssätze nötig.

Jene Untergruppe von \mathfrak{G} , die durch die in den Gruppenalgebraelementen B_1, \dots, B_k vorkommenden Gruppenelementen erzeugt wird, sei mit $\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k)$ bezeichnet. Die Anzahl der (voneinander nicht unbedingt verschiedenen) Primfaktoren der Ordnung dieser Untergruppe wird mit $d(B_1, \dots, B_k)$ bezeichnet. Gilt (2) für die Reihe (1), so heisst sie zyklisch. Die wesentlichsten Hilfssätze sind nun die folgenden:

a) Sind T_1, \dots, T_m nichtzyklische Primreihen und Differenzen der Art $A-1$ (wo A ein Element der Gruppe \mathfrak{G} ist), ist C ein Gruppenalgebraelement, ist weiter $CT_1 \dots T_m = 0$, verschwindet aber dieses Produkt nicht mehr, wenn ein beliebiger der Faktoren T_1, \dots, T_m fortgelassen wird, so gilt

$$m < d(C, T_1, \dots, T_m) - d(C).$$

b) Ist (für das Gruppenalgebraelement C und die nichtzyklischen Primreihen S_1, \dots, S_m) C bzw. $CS_1 \dots S_m$ die Summe aller Elemente der Untergruppe $\mathfrak{H}(C)$ bzw. $\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m)$, so gilt

$$m = d(CS_1 \dots S_m) - d(C).$$

c) Gelten die Voraussetzungen von b) mit der Abänderung, dass C eben nicht gleich der Summe aller Elemente von $\mathfrak{H}(C)$ ist (und dass im Ausdruck, der C mit den Gruppenelementen ausgedrückt herstellt, kein Minuszeichen vorkommt), so ist

$$m < d(CS_1 \dots S_m) - d(C).$$

d) Die Behauptung c) ist auch in dem Falle richtig, wenn $C=1$ ist. Aus der Tatsache, dass dies gewissermassen dem Hilfsatz b) widerspricht, wird auf die Stichhaltigkeit der MINKOWSKISCHEN Vermutung gefolgert.

G. Hajós.

A HILBERT-FÉLE BIZONYÍTÁSELMÉLET CÉLKITÜZÉSEI, MÓDSZEREI ÉS EREDMÉNYEI.¹

Közmondásos a matematika csálthatatlanságába vetett hit: «olyan biztos, mint hogy kétszer kettő négy», mondjuk valamiről annak kifejezésére, hogy nem fér hozzá kétség. Talán csak az orvostudományban bíznak még hasonló mértékben a laikusok. Az orvos, betege érdekében is, csálthatatlannak mondja módszereit; egymás között azonban az orvosok is élesebb kritika alá veszik tudományuk eredményeit. Nekünk matematikusoknak is tisztázunk kell, hogyan is áll a dolog a matematika csálthatatlanságával.

A matematikának az ad tekintélyt a laikus előtt, hogy a valóságra alkalmazva mindig helyes eredményre vezet; bizonyítéka ennek többek között minden mérnöki számítás szerint épített ház, lift, híd, amely nem dől össze, nem szakad le. Ez a tény azonban nem pusztán a matematikán múlik, hanem a környező világnak egy éppenséggel nem magától értetődő tulajdonságán;² e miatt ez a tény másképp nem igazolható, mint empirikusan.

¹ A Kir. Magyar Pázmány Péter Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének kollokviumán 1939. november 3-án tartott előadás második felének részletes kidolgozása. Az előadás első fele a halmazelmélet elemeiről adott áttekintést; ezeket itt ismerteknek teszem fel.

² Valóban, a matematikának a környező világra való minden egyes alkalmazása végelemzésben az idő valamely $f(t)$ függvényének valamely helyen való meghatározását kívánja, a rendelkezésre álló adatok mind az $f(t)$ függvénynek a $t \leq t_0$ helyeken való viselkedésére vonatkoznak, ahol t_0 a jelen pillanat. Ugyanis mindaz, amit a természetről biztosan tudunk, a multa s a jelenre vonatkozik; ezekből kell — megfelelő elmélet felállítása és esetleg az időt explicite nem is tartalmazó matematikai műveletek útján — egy, rendesen a jövőre, esetleg a multa vonatkozó ismeretlen adatot meghatároznunk. Egy cseppet sem magától értetődő, hogy a szóbanforgó $f(t)$ függvények minden egyes esetben

Ha a gyakorlati alkalmazásoktól eltekintünk, a matematika csálthatatlanságán azt kell értenünk, hogy matematikai módszerek nem vezethetnek egymásnak ellentmondó eredményekre. Ebben sokáig nem is volt okunk kételkedni. Először az infinitézimális számítás vezetett olyan módszerekre, amelyekkel, kellő elővigyázat híján, egymásnak ellentmondó eredményekhez lehetett jutni. Maguk az infinitézimális analízis nagy megalkotói, NEWTON és LEIBNIZ, az elméletnek rohamos, a quantumelméletéhez hasonló fejlődése folyamán nem érték rá a «kellő elővigyázat» szabályait pontosan megfogalmazni; ők maguk azonban, s az analízis nagy rendszerezője, EULER is, intuíciójuktól vezetve, elkerültek minden ellentmondásra vezető okoskodást. Azonban az utánuk jövő másod- és harmadrangú matematikusok gyakran követtek el hibákat az analízis fogalmainak, elsősorban a határérték akkoriban rendesen végtelen sor alakjában jelentkező fogalmának pontatlan használatával. Ezek a pontatlanságok váltották ki a sorelmélet kritikáját, ami CAUCHY, majd WEIERSTRASS kezében az egész analízis exakt megalapozásához vezetett, azáltal, hogy a *végtelen kicsi* és *végtelen nagy* pontatlan fogalmainak szerepét a *végtelen sok* (végtelen sorozat) fogalma vette át.

Hasonlóan gyors fejlődésen ment át a matematika a mult század végén, amikor CANTOR az analízis megalapozására használt fogalmak következetes végiggondolásával és továbbbépítésével megalkotta hatalmas művét, a «végtelen sok» tudományát, a halmazelméletet. Ez az elmélet tetszőleges elemekből álló összességekkel, halmazokkal foglalkozik. Jelentősége abban van, hogy egységes rendszerbe foglalja a matematika valamennyi ágát (hasonlóan, mint a MAXWELL-féle elmélet vagy a quantummechanika a fizika

olyan függvénykategóriához tartoznak (pl. olyan differenciálegyenlet megoldásai közé), amelyeknél ilyen feladat megoldása lehetséges. (Az egyik legfontosabb eset az, amikor az derül ki, hogy $f(t)$ konstans.) A különbség e tekintetben a klasszikus fizika és a quantumelmélet között pusztán annyi, hogy az $f(t)$ függvénynek a klasszikus fizikában egy-egy rendszerre vonatkozó jelentése van, míg a quantumelméletben csak olyan $f(t)$ függvények szerepelnek, amelyeknek jelentése statisztikai, tehát sok rendszer együttes viselkedésére vonatkozik.

különböző ágait). Valóban, a halmazelmélet segítségével a matematika többi ágainak alapfogalmai is felépíthetők. Így pl. a természetes számokat véges halmazok számosságainak³ (elemeik számának) tekinthetjük; a számosságok összeadását és szorzását a megfelelő — közös elem nélküli — halmazok egyesítése, ill. a belőlük alkotott párok (két elemű rendezett halmazok) összessége segítségével definiálhatjuk. A negatív számokat a természetes számokból, a törtszámokat pedig az egész számokból alkotott párok segítségével vezethetjük be; az irracionális számokat racionális számok bizonyos halmazaival (DEDEKIND-féle szeletekkel) értelmezhetjük; a komplex számokat viszont valós számokból álló pároknak tekinthetjük. De az analízis egyéb fogalmai is halmazelméleti fogalmak speciális esetei; pl. a végtelen sorozatok speciális rendezett halmazok, a függvények speciális leképezések. Az algebra is bizonyos halmazokkal (testekkel, gyűrűkkel, csoportokkal) foglalkozik; a geometriai alakzatok viszont alapalakzatoknak, pl. pontoknak halmazai s maguk a tér pontjai az analitikus geometria felfogása szerint valós számokból álló háromelemű rendezett halmazok. De nemcsak a matematika különböző *fogalmai* definiálhatók halmazelméleti fogalmakkal, hanem a rájuk vonatkozó *tételek* is bebizonyíthatók a halmazelmélet tételei segítségével, úgyhogy végelemzésben a matematika minden ága a halmazelmélet részének tekinthető. Viszont a halmazelmélet fogalmai (halmaz, rendezés, leképezés stb.) szerepelnek, szerepeltek már jóval CANTOR előtt, a matematika egyéb ágaiban is; sőt számos ág, mint pl. az analízis vagy a topológia, nem is nélkülözheti ezeket a fogalmakat és a velük kapcsolatos halmazelméleti módszereket.

Így megérthetjük, hogy azok a logikai ellentmondások, amelyekhez a halmazelmélet eredeti heurisztikus felfogása, az ú. n. naív halmazelmélet vezetett, nemcsak a halmazelmélet, hanem az egész matematika kritikáját megindították. Ezek közül az ellent-

³ A halmazelmélet minden — véges vagy végtelen sok elemből álló — halmazhoz rendel «számosságot»; két halmazhoz akkor és csak akkor ugyanazt a számosságot, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás létesíthető.

mondások, ú. n. antinómiák közül legismertebb a következő RUSSELL-féle antinómia. Nevezzünk közönségesnek egy halmazt, ha nem fordul elő elemei között; a név arra utal, hogy a legtöbb halmaz ilyen; pl. a természetes számok halmaza, maga nem lévén természetes szám, nem fordul elő elemei között. Az antinómia létrejöttéhez nem szükséges tudnunk, hogy vannak-e más halmazok is, mint közönségesek; megemlíthetjük azonban, hogy a naív halmazelmélet szerint vannak, pl. az összes halmazok halmaza előfordul elemei között, mert definíciója szerint minden halmaz eleme neki s ő maga is halmaz. Már most a RUSSELL-féle R halmaz az összes közönséges halmazok halmaza; s az antinómiához eljutunk, ha arra a kérdésre akarunk válaszolni, vajjon R közönséges halmaz-e, vagy nem. Ha ugyanis R közönséges halmaz, akkor, a közönséges halmazok definíciója szerint, nem fordul elő elemei között, holott, R definíciója szerint, minden közönséges halmaz eleme R -nek és feltevésünk szerint maga R is közönséges halmaz. Ha viszont R nem közönséges halmaz, akkor, a közönséges halmazok definíciója szerint, előfordul elemei között, holott, R definíciója szerint, csak közönséges halmaz lehet eleme R -nek és feltevésünk szerint R nem közönséges halmaz.

A halmazelméletet, a halmaz fogalmának exaktabbá (s egyúttal szűkebbé) tételével,⁴ megszabadíthatjuk ugyan ettől s a többi eddig felmerült antinómiától; ez azonban nem biztosítja azt, hogy újabb ellentmondások nem merülhetnek fel. Sőt, a halmazelmélet antinómiái kétségesse tették, vajjon nem bukkanhatunk-e hasonló ellentmondásra a matematika más területein, pl. az analízisben is. Hiszen azok az ideák, amelyek pl. az analízis felépül, alig mondhatók plauzibilisebbeknek azoknál, amelyek a halmazelmélet területén ellentmondásra vezettek. Sőt, mint említettük, az analízis éppen azáltal szabadult meg régebbi pontatlanságaitól, hogy alapfogalmait végelemzésben halmazelméleti eszközökkel építette fel újból s egyébként is lépten-nyomon dolgozik halmazelméleti módszerekkel. Azonkívül azok az eljárások, amelyeknek elkerülé-

⁴ Ezt az exaktabbá tételt az axiomatikus módszer teszi lehetővé; erre még majd visszatérünk.

sét a halmazelmélet antinómiáinak megszüntetésére filozófiai megfontolások alapján ajánlották, mint pl. valamely dolognak egy olyan összesség segítségével való definiálása, amelynek maga is eleme, nemcsak az analízis számára nélkülözhetetlenek, hanem a matematika minden ágában, még a számelméletben is, lépten-nyomon használatosak.⁵ Így a halmazelmélet antinómiái a matematika minden egyes ágának ellentmondásnélküliségét kétségesse teszik.

Ezzel a kétséggel szembeállíthatjuk azt a tényt, hogy sem a számelméletben, sem az exakt módon felépített analízisben, sem a geometriában nem találtak eddig ellentmondásokat. Nem volna azonban következetes dolog ennél a pusztá empirikus érvnél megállnunk. Hiszen más területen, pl. a számelméletben, még oly kiterjedt tapasztalatok alapján sem fogadunk el egy állítást tételnek, amíg deduktív módszerrel be nem bizonyítottuk. Így pl. a nevezetes GOLDBACH-féle sejtést, amely szerint minden páros szám felbontható két prímszám összegére (ha az 1-et is prímszámnak tekintjük), nem ismerjük el számelméleti tételnek; pedig ameddig a prímszámtáblázatok terjedelme megengedte, kipróbálták helyességét és így jóval több eseten igazolták, mint ahány matematikai bizonyításon tapasztalták eddig, hogy nem vezet ellentmondásra.

A matematika ellentmondásnélküliségének matematikai módszerekkel való bebizonyítása a HILBERT-féle *bizonyításelmélet* fő tárgya. Pontosabban a matematika egyes ágainak ellentmondásnélküliségéről kell beszélnünk; hiszen a matematika fejlődő organizmus, mind újabb és újabb ágai keletkezhetnek. Minden egyes ilyen ágnak, pl. a természetes számok aritmetikájának (számelméletnek), az analízisnek, az elemi geometriának stb. ellentmondásnélkülisége külön-külön bizonyításelméleti probléma.

A bizonyításelmélet első feladata, hogy az e problémákban szereplő fogalmakat pontosan megfogalmazza. Kétségtelen, hogy pontosabb megfogalmazás nélkül is érezzük, mely fogalmak, tételek, problémák tartoznak pl. az aritmetika vagy az analízis körébe; továbbá minden matematikus érez magában képességet arra, hogy

⁵ Így pl. lépten-nyomon előfordul, a számelméletben is, hogy valamely számot mint egy számhalmaz legkisebb elemét definiáljuk.

valamely matematikai meggondolásról eldöntse, helyes-e, vagy nem. Ez a képesség elegendő arra, hogy a matematika egy-egy ágában kutatásokat végezzünk; azonban ahhoz, hogy egy-egy ág ellentmondásnélkülisége problémájához *matematikai* módszerekkel hozzáfoghassunk, elengedhetetlenül szükséges, hogy matematikailag megfogalmazzuk, mit értünk a kérdéses ágon (pl. aritmetikán, elemi geometrián) és matematikailag definiáljunk olyan fogalmakat, mint pl. bizonyítás, ellentmondásnélküliség. Ezt a feladatot a bizonyításelmélet teljesen megoldotta, felhasználván az *axiomatikus kutatások* és a *matematikai logika* eredményeit. A bizonyításelméletnek ez a vívmánya, amelyet teljes egészében HILBERTnek köszönhetünk, ismeretelméleti szempontból magában véve is nagyjelentőségű dolog és — hasonlóan a matematika más területein szerepelt olyan feladatokhoz, amelyek addig pontos megfogalmazás nélkül is kézzelfoghatóknak tűnt fogalmak exakt megfogalmazását kívánják — cseppet sem volt olyan könnyű feladat, mint amilyennek utólag látszik. Meg sem lehetett volna oldani az axiomatikus módszernek oly fejlett álláspontról való felfogása nélkül, amelyre HILBERT a geometria alapjaira vonatkozó kutatásai kapcsán jutott; továbbá a matematikai logika eredményeinek a bizonyításelméleti cél szempontjából megfelelő átalakítása és finomítása nélkül, amely munkában BERNAYST említi HILBERT segítőtársaként.

Csak e vívmány birtokában foghatott hozzá a bizonyításelmélet tulajdonképpeni feladatához: az egyes matematikai diszciplinák ellentmondásnélkülisége kérdésének megoldásához. E téren maga HILBERT az alapvető ideák, a számelmélet, az analízis, sőt a halmazelmélet ellentmondásnélküliség-bizonyítása alapgondolatának megadására szorítkozott, a részletes kidolgozást tanítványaira bízva, akik — s minden bizonyításelméleti kutató HILBERT tanítványának számítható — nagyon sok gondolatot merítettek eddig is és bizonyára meríteni fognak a jövőben is HILBERT alapvető bizonyításelméleti munkáiból.⁶ A részletek kidolgozása közben kide-

⁶ L. elsősorban: D. HILBERT, *Neubegründung der Mathematik, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 (1922) 157—177. oldal; *Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Annalen*, 88 (1923), 151—165. oldal; *Über das*

rült, hogy a cél (megmutatni, hogy, HILBERT szavaival, a matematika feltevésnélküli tudomány) korántsem olyan közel, mint ahogy HILBERT látta. Előre nem látható, habár látszólag nem elvi, hanem csak technikai természetű, mégis lényeges nehézségek merültek fel. E nehézségek miatt a bizonyításelmélet az ellentmondásnélküliség terén még aránylag kevés eredményt ért el; egyik legnevezetesebb eredménye a természetes számok aritmetikájának ellentmondásnélkülisége, amit nem egészen négy éve bizonyított be — ACKERMANN, NEUMANN JÁNOS és HERBRAND részleteredményei után — GENTZEN. Nagyon fontos és meglepő eredményeket ért el azonban a bizonyításelmélet más idevágó kérdések terén, amennyiben felfedte az axiomatikus módszer egyes nem is sejtett hiányait; ezek az eredmények egyúttal feltárták a matematika további ágai ellentmondásnélküliségének bizonyítása elé tornyosuló nehézségek okát is.

1. Az axiomatikus módszer.

Annak exakt megfogalmazására, hogy mit értsünk aritmetikán, analízisen, geometrián stb., segítségére jött a bizonyításelméletnek e tudományágak axiomatikus felépítése. A geometria axiomatikus tárgyalását már a régi görögök megkezdték és meglepően magas fokig fejlesztették. Céljuk az volt vele, hogy a szemléletnek, ennek a geometriai kutatáshoz nélkülözhetetlen, de kétségtelenül szubjektív elemeket is tartalmazó eszköznek szerepét szabályozzák. E célból EUKLIDÉS, a görögök geometriájának nagy rendszerezője, néhány, véleménye szerint a szemlélet alapján mindenki által evidensnek tartott tételt tett rendszere kiindulópontjává; ezeket nevezte axiómáknak.⁷ A geometria többi tételeit ezekből pusztán

Unendliche, *Math. Annalen*, **95** (1926), 161—190. oldal; Die Grundlagen der Mathematik, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **6** (1928), 65—85. oldal; Probleme der Grundlegung der Mathematik, *Math. Annalen*, **102** (1930), 1—9. oldal.

⁷ Hogy EUKLIDÉS az axiómákat valóban mindenki által elfogadott tényeknek tekintette, mutatja a *κοινὰ ἔννοια* (közös ideák) elnevezés is, amellyel egy részüket illeti. Más részüket *αἰτιώματα* (követelmények, posztulátumok) névvel látja el; hogy e szétválasztásban milyen szempont vezette, nincs kellően tisztázva.

logikai úton, a szemléletre való újabb hivatkozás nélkül igyekezett hebizonyítani. Hogy ezt a tervet — mai szemmel nézve — nem vitte egészen következetesen keresztül, hanem egy-két helyen öntudatlanul is újból felhasznált a szemléletből vett tényeket, nem róható fel hibájául; ezt a hiányt későbbi axiómarendszerek teljesen pótolták.⁸

De a matematika többi ágaira vonatkozóan is rávezette a kutatókat hasonló eljárás szükségességére a következő megfontolás. Valamely fogalom definiálásánál, valamely tétel bebizonyításánál más fogalmakra, ill. tételekre hivatkozunk. E fogalmakat ismét újabb fogalmak segítségével definiálhatjuk s e tételeket újabb tételek segítségével bizonyíthatjuk be; azonban, ha sem a circulus vitiosus hibájába nem akarunk esni, sem a soha végre nem hajtható végtelen regresszusba nem akarunk belefogni, meg kell valahol állnunk a definiálásban is, a bizonyításban is; azaz bizonyos fogalmakat, ú. n. *alapfogalmakat*, már ismerteknek, bizonyos tételeket, ú. n. *axiómákat*, már elfogadottaknak kell tekintenünk. Az alapfogalmak segítségével a kérdéses diszciplína minden más fogalmát definiálhatjuk, az axiómák segítségével minden más tételét bebizonyíthatjuk; azonban az alapfogalmakról semmi mást nem használhatunk fel, mint amit az axiómák kimondanak róluk, azokat mintegy az axiómák segítségével implicite definiáljuk — már amennyire ezek egyáltalában meghatározzák őket.

Az alapfogalmak és az axiómák választása bizonyos fokig önkényes; mindenesetre célszerű, de nem logikai szükségszerűség, hogy lehetőleg egyszerűeknek, kézzelfoghatóknak válasszuk őket. Így pl. az *elemi geometriában* a pont, egyenes, sík fogalmát, az illeszkedés (rajtalevés, átmenés), a középfekvés és az egybevágóság relációját választhatjuk alapfogalmakul, axiómákul pedig

⁸ A geometria első teljesen kielégítő axiómarendszerét HILBERT állította össze; l. *Grundlagen der Geometrie* c. művét (7. kiadás: Leipzig és Berlin, 1930). A magyar nyelvű irodalomban KERÉKJÁRTÓ BÉLA, *A geometria alapjairól*, I. kötet (Szeged, 1937) nyújtja az euklidesi elemi geometria axiomatikus felépítését; tárgyalása több szempontból egyszerűbb HILBERTÉNÉL.

olyanszerű tételket, mint pl.⁹, hogy bármely két különböző ponthoz van egy és csakis egy velük illeszkedő (rajtuk átmenő) egyenes; egy egyenessel illeszkedő (rajta levő) három pont közül mindig egy és csakis egy fekszik a másik kettő között; továbbá a háromszögek valamelyik egybevágósági tételét; a párhuzamosság jól ismert axiómáját; a folytonosság DEDEKIND-féle axiómáját, amely szerint, ha egy egyenes pontjait úgy osztjuk két halmazba, α -ba és β -ba, hogy mindegyikbe legalább két pont jusson és α két pontja között ne feküdjék β -nak pontja, akkor van oly pont, amely α -nak bármely tőle különböző pontja és β -nak bármely tőle különböző pontja között fekszik. De van olyan felépítése is a geometriának, amely a ponton kívül a mozgást és egy pontnak egy mozgás által egy másik pontba való átvivését választja alapfogalomnak, az egyenes, sík és egybevágóság fogalmait pedig ezek segítségével definiálja; e felépítésnél egyik axióma lehet pl. az, hogy három különböző ponthoz végtelen sok olyan mozgás van, amelyek az első kettőt önmagába viszik át, a harmadikat pedig csupa különböző pontokba.¹⁰

A természetes számok aritmetikájának első axiómarendszerét, GRASSMANN előmunkálatai után, PEANO adta meg.¹¹ Alapfogalmul a természetes szám s a 0 fogalmát és azt a műveletet választja, amely valamely a természetes számot a következő a' ($=a+1$) számba visz át. Axiómái: 1. a 0 természetes szám; 2. ha a természetes szám, a' is az; 3. ha $a'=b'$, akkor $a=b$; 4. ha a természetes szám, akkor $a' \neq 0$; 5. ha a természetes számok valamely halmazának eleme 0 és valahányszor a eleme, mindannyiszor a' is, akkor e halmaznak minden természetes szám eleme (teljes indukció axiómája).

⁹ A geometria — s később a halmazelmélet — meglehetősen terjedelmes axiómarendszeréből csak példaképpen sorolok fel néhány jellegzetes axiómát; néhol — egyszerűség kedvéért — meg is változtatom az axiómák eredeti szövegét.

¹⁰ A síkgeometria ilyen felépítésére vonatkozólag I. HILBERTnek a 8. lábjegyzetben idézett művében «Anhang IV»-et.

¹¹ G. PEANO, Sul concetto di numero, *Rivista di matematica*, 1 (1891), 1—10. oldal.

A *halmazelméletet* — egyrészt a halmaz fogalmának az antinómiák elkerüléséhez szükséges exaktabbá tétele, másrészt bizonyos, az általa bebizonyított jólrendezési tétellel kapcsolatban felmerült kérdések tisztázása céljából — ZERMELO¹² építette fel axiomatikusan. Axiómarendszerét többek között FRAENKEL¹³ és NEUMANN JÁNOS¹⁴ fejlesztették tovább. A ZERMELO—FRAENKEL-féle axiómarendszer alapfogalmai a halmaz fogalma és az elemként tartalmazás relációja. E rendszerben az egyik axióma, a végtelenség axiómája, egy speciális végtelen halmaznak, $Z = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}, \dots\}$ -nek létezését kívánja meg (ahol 0 az üres halmaz, amelynek az a definíciója, hogy nincs eleme; $\{a\}$ azt a halmazt jelenti, amelynek a az egyetlen eleme; Z elemei $0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}, \dots$). A többi axióma — a meghatározottság axiómájától eltekintve, amely szerint, ha két halmaz elemei ugyanazok, akkor a halmazok is azonosak — azt mondja ki, hogy ha bizonyos halmazok léteznek, akkor belőlük bizonyos újabb halmazok is képezhetők; pl. bármely két halmazhoz, a -hoz és b -hez, van oly $\{a, b\}$ halmaz, amelynek a és b és csak ezek elemei (páraxióma); minden a halmazhoz és minden T tulajdonsághoz van olyan halmaz, amelynek elemei a -nak T tulajdonságú elemei és csak ezek (részhalmazaxióma); minden a halmazhoz van oly halmaz, amelynek elemei a részhalmazai (hatványhalmaz-axióma); nem akarom említés nélkül hagyni a nevezetes kiválasztási axiómát sem.

A *valós számok aritmetikájának* axiómarendszerét is többféleképpen választhatjuk. Egyik mód, s ez az aritmetikának felépítése szempontjából kényelmes, alapfogalmakul a valós szám, összeadás, szorzás fogalmát és a «kisebb» relációt választani, axiómákul pedig azokat a tételeket, amelyek a valós számok halmazát rendezett

¹² E. ZERMELO, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I, *Math. Annalen*, **65** (1908), 261—281. oldal.

¹³ A. FRAENKEL, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Math. Zeitschrift*, **22** (1925), 250—273. oldal; *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre* (Leipzig és Berlin, 1927).

¹⁴ J. VON NEUMANN, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **154** (1925), 219—240. oldal; Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Zeitschrift*, **27** (1928), 669—752. oldal.

testként jellemzik, s ezeken kívül a DEDEKIND-féle alaptulajdonságot. A bizonyításelmélet szempontjából jobban kezelhető axiómarendszert kapunk, ha a PEANO-féle axiómarendszert bővítjük ki a halmazelmélet olyan részével, amely lehetővé teszi, hogy a valós számokat DEDEKIND-féle szeletek segítségével vezessük be. Könnyű látni, hogy ehhez elegendő a páraxiómának (amelyet a racionális számok bevezetéséhez használunk) és a részhalmazaxiómának megfelelően specializált alakja; pl. az utóbbi így szól: bármely T tulajdonsághoz van oly halmaz, amely azokat és csakis azokat a természetes számokból alkotott rendezett párokat¹⁵ tartalmazza, amelyek T tulajdonságúak. Az *analízis* szokásos felépítéséhez elegendő a függvényfogalmat mint alapfogalmat és egy bizonyos rá vonatkozó, a részhalmazaxiómához analóg axiómát hozzávennünk az előbbi axiómarendszerhez.¹⁶

Talán feltűnt az olvasónak, hogy ezekben az axiómákban az alapfogalmakon és néhány elkerülhetetlen, még tisztázandó, logikai fogalmon kívül a halmaz fogalma is szerepel. A halmaz-

¹⁵ Ha a valós számokat nem racionális, hanem természetes számok halmazai segítségével vezetjük be (erre módot ad az a tény, hogy pl. minden 0 és 1 közötti irracionális számot egyértelműen meghatároz azon természetes számok halmaza, ahányadik helyen a kérdéses szám diadikus kifejtésében az 1 számjegy szerepel), akkor e helyett elegendő bármely T tulajdonsághoz a T tulajdonságú természetes számok halmazának létezését megkívánnunk.

¹⁶ V. Ö. J. VON NEUMANN, Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math. Zeitschrift*, 26 (1927), 1—46. oldal; l. különösen a 18. oldalon a «Funktionsaxiom»-ot. Hogy ez az axióma elegendő-e az analízis felépítéséhez, vagy az ottani 6. és 7. lábjegyzetben említett további függvényaxiómák közül az első is szükséges, az attól függ, hogy milyen terjedelemben akarjuk az analízist felépíteni. A folytonos függvények elméletéhez elegendő az eredeti függvényaxióma, a tetszőleges valós függvényekéhez kell a kérdéses további axióma is. Ha nem ragaszkodunk az analízis szokásos felépítéséhez, hanem a folytonos függvényeket természetes számok halmazaival vezetjük be (hogy ez lehetséges, legfeljebb a szokásosnál komplikáltabb tárgyalásra vezet, mutatja az a halmazelméleti tény, hogy a folytonos függvények kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetők a természetes számokból álló halmazokhoz), akkor a függvényaxióma helyett használhatjuk a megelőző lábjegyzetben említett speciális részhalmazaxiómát, ill. a további függvényaxióma helyett a halmazelmélet részhalmazaxiómájának megfelelő további speciális esetét is.

elmélet felépítésénél ez a fogalom alapfogalom. Ha a többi axiómarendszer esetében a halmaz fogalmát a halmazelméletből ismertnek tesszük fel, akkor tulajdonképpen csak relatív axiomatizálást végeztünk a halmazelméletre vonatkozóan; ez a gyakran alkalmazott eljárás csak félmunka és a bizonyításelmélet szempontjából értéktelen, mert ha így járnánk el, akkor nem foghatnánk hozzá pl. az aritmetika ellentmondásnélkülisége kérdéséhez addig, amíg a halmazelméleté nincs tisztázva. Egy másik eljárás az volna, hogy a halmaz (és a tartalmazás) fogalmának a kérdéses diszciplinában szükséges *speciális esetét* (pl. a geometria folytonossági axiómájánál a ponthalmaz fogalmát, a teljes indukció axiómája esetén a természetes számokból álló halmazét) hozzá vesszük az alapfogalmakhoz, az axiómákhoz pedig a halmazelmélet axiómáinak megfelelő speciális esetét. Tulajdonképpen ezt az eljárást követtük a valós számok aritmetikájának axiomatizálásánál. Egy harmadik mód abban áll, hogy a halmaz fogalmát a tulajdonság logikai fogalmával helyettesítjük. Pl. a teljes indukció axiómáját úgy fogalmazhatjuk, hogy ha a 0 rendelkezik valamely T tulajdonsággal s ha, valahányszor megvan ez a T tulajdonsága valamely a természetes számnak, megvan a' -nek is, akkor minden természetes szám rendelkezik a T tulajdonsággal.¹⁷ A tulajdonság fogalmának a matematikai logika nyújtotta tisztázása után (amelyre a részhalmaz-axióma, ill. ennek más axiómarendszerekben szükséges speciális esetei miatt is szükség van) ez a harmadik mód bizonyul legegyszerűbbnek a bizonyításelmélet szempontjából.

¹⁷ Hasonló módon átfogalmazható a DEDEKIND-féle folytonossági axióma is úgy, hogy halmaz helyett tulajdonságról legyen benne szó. Azonban nem mindig sikerül ilyen módon kiküszöbölnünk az axiómákból a halmaz fogalmát. Például nem sikerül a halmaz fogalmát a tulajdonságával pótolni a geometria folytonossági axiómájának HILBERT-féle alakjában (Vollständigkeitsaxiom), amely szerint a pontok, egyenesek és síkok halmaza nem bővíthető úgy és az illeszkedés, közöttfekvés és egybevágóság relációja nem terjeszthető ki a bővített halmazokra úgy, hogy az axiómarendszer összes többi axiómája érvényben maradjon. Hasonló megjegyzés érvényes ennek a teljességi axiómának specializált alakjára is (Axiom der linearen Vollständigkeits, a 8. lábjegyzetben idézett mű 30. oldalán).

Mármost valamely matematikai diszciplína axiomatikus felépítése pontos definícióját szolgáltatja annak, hogy mi tartozik a kérdéses diszciplínába; pl. a természetes számok aritmetikája azon tételek összessége, amelyek a PEANO-féle axiómáknak pusztán logikai következményei (l. azonban még a 47. lábjegyzetet); s az aritmetika ellentmondásnélküliségét bebizonyítani annyit jelent, mint megmutatni, hogy ezeknek az axiómáknak nincs két olyan logikai következménye, amelyek egymás tagadásai. Hogy ennek bebizonyításához hozzáfoghassunk, még a «tétel», «következmény», «tagadás» fogalmát kell exakt módon megfogalmaznunk. Ezt az exakt megfogalmazást a matematikai logika teszi lehetővé.

A matematikai logikának itt első sorban két ága jön tekintetbe: az elemi logika (vagy logikai aritmetika, ítéletkalkulus), és a logikai függvénykalkulus (logikai függvénytan, predikátumkalkulus) egy része, az ú. n. szűkebb függvénykalkulus.

2. Elemi logika.

A matematikai logika — ha eltekintünk egyes arab filozófusok folytatás nélkül maradt fogalomalkotásaitól — LEIBNIZRE ¹⁸ vezethető vissza; csak azért nem mondhatjuk, hogy egyidős az infinitézimális számítással, mert azt ARCHIMEDESIG szokás visszavezetni. LEIBNIZ célja az volt, hogy a tudomány számára a köznyelv pontatlanságaitól megtisztított nemzetközi nyelvet szerkesszen, amely e mellett szavak helyett olyan elemekből — a matematikaiakhoz hasonló formulákból — épül fel, amelyek a tudomány exakt mondanivalóihoz jobban símulnak, mint a szavak. LEIBNIZ kezdeményezését, eleinte a közben felmerült algebrai analógiáktól vezetve, különösen BOOLE, PEIRCE és SCHRÖDER folytatták; majd FREGE, PEANO, RUSSELL, HILBERT és tanítványaik fejlesztették tovább a matematikai logikát, a matematika exakt megalapozásának szükségleteit tartva szem előtt. ¹⁹

¹⁸ G. W. LEIBNIZ, *Dissertatio de arte combinatoria etc., Opera philosophica quae exstant omnia*, edidit J. E. ERDMANN, 1 (Berlin, 1840), 6—44. oldal; *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis, ugyanott*, 94—97. oldal.

¹⁹ A matematikai logikát a bizonyításelmélethez szükséges formájá-

A matematika egyes körébe vágó ítéleteket igazaknak, másokat hamisaknak deklarál; más szóval, egyes ítéletekhez az «igaz», másokhoz a «hamis» logikai értékeket rendeli hozzá. A matematikai logika e két logikai értékkel, természetük mélyebb kutatását a filozófusoknak engedve át, hasonló módon számol, mint az aritmetika a számokkal. Algebrai analógiák miatt e két értéket sokáig az «1» és «0» jelekkel jelölték; ha a matematikai logikát a matematikára akarjuk alkalmazni, célszerű a logikai értékek számára a matematika jeleitől különböző jeleket bevezetni, pl. «↑»-t az «igaz», «↓»-t a «hamis» számára.

Az elemi logika oly műveletekkel (függvényekkel) foglalkozik, amelyeknek független változói²⁰ is, értékei is az ↑ és ↓ értékeken futnak át. Ilyen műveletet úgy adhatunk meg, hogy valamennyi — véges számú — helyen megadjuk értékét; pl. az

$$X \left\{ \begin{array}{c|c|c} & \overbrace{\begin{array}{cc} \uparrow & \downarrow \end{array}}^Y & \\ \hline \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \right.$$

táblázat az ú. n. *konjunkció* műveletét definiálja, amelynek értéke, $X \& Y$ (« X és Y »), tehát akkor és csak akkor ↑, ha $X = Y = \uparrow$. Hasonlóan definiálhatjuk «egyszeregyükkel» a többi műveleteket; így

$$X \left\{ \begin{array}{c|c|c} & \overbrace{\begin{array}{cc} \uparrow & \downarrow \end{array}}^Y & \\ \hline \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \end{array} \right.$$

ban tárgyalja D. HILBERT—W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik* (2. kiadás: Berlin, 1938), valamint, bizonyításelméleti alkalmazásaival együtt, D. HILBERT—P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, I (Berlin, 1934). Mindkét mű ajánlható a matematikai logika elsajátítására. A matematikai logikának 1935-ig bezárólag teljes irodalmát adja ALONZO CHURCH, *A Bibliography of Symbolic Logic*, *The Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), 121—218. oldal és *Additions and Corrections to A Bibliography of Symbolic Logic*, *ugyanott*, **3** (1938), 178—212 oldal.

²⁰ Az ↑ és ↓ értékeken átfutó, ú. n. (elemi) logikai változókat latin nagy betűkkel fogom jelölni.

a *diszjunkció*, $X \vee Y$ (« X vagy Y »),

		$\overbrace{\begin{array}{ c c } \hline \uparrow & \downarrow \\ \hline \end{array}}$	
$X \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right.$	\uparrow	\uparrow	\downarrow
	\uparrow	\uparrow	\downarrow
	\downarrow	\uparrow	\downarrow
	\downarrow	\uparrow	\uparrow

pedig az *implikáció*, $X \rightarrow Y$ (« X -ből Y ») definíciója. Lehet többváltozós műveletről is beszélni; pl. egy háromváltozós művelet definíciójához nyolc helyen kell megadni az értékét. Viszont az

X	\uparrow	\downarrow
\overline{X}	\downarrow	\uparrow

táblázat egyváltozós műveletet definiál, a *negáció* \overline{X} («nem X ») műveletét. Az elnevezések azokra a szócskákra utalnak, amelyeknek szerepét ezek a műveletek a matematikára való alkalmazásban (és egyéb alkalmazásokban is) átveszik. Pl. ha két ítéletet az «és» szócskával kötünk össze, a kapott ítélet logikai értéke $X \& Y$ lesz, ahol X és Y rendre az eredeti ítéletek logikai értéke; hasonlóan, \overline{X} annak az ítéletnek logikai értéke, amely valamely X logikai értékű ítéletből a «nem» szócska alkalmazásával keletkezik. A «vagy» szócskát a köznyelvben többféle értelemben szokás használni; a diszjunkció definíciója ezt a többértelműséget a matematikában használatos értelemmel (amely szerint pl. «2 kisebb vagy egyenlő 3-mal» igaz ítéletnek számít) előnyben részesítésével szünteti meg. Az implikáció esetében e mellett még egy egyszerűsítő kiterjesztést is végzünk azáltal, hogy azt, hogy egy ítéletből egy másik következik, igaznak deklaráljuk minden esetben, amikor vagy az első hamis, vagy a második igaz, akár van «tartalmi összefüggés» a két ítélet között, akár nincs; ugyanis a bizonyításelmélet számára a következés fogalmából csak az az egy tény lesz fontos, hogy az, hogy egy igaz ítéletből következik egy hamis, sohasem lehet igaz.²¹

²¹ Más célokra szokás e mellett az ú. n. *materialis implikáció* mellett egy, a következmény klasszikus logikai (és köznapi) fogalmának jobban megfelelő ú. n. *szoros implikációt* (strict implication) is figyelembe venni; ez azonban már nem a fenti értelemben vett elemi logikai művelet, hiszen logikai értéke nem pusztán elő- és utótagjának logikai értékétől függ. E szoros implikáció bevezetése axiomatikusan történhetik; I. C. I. LEWIS—C. H. LANGFORD, *Symbolic Logic* (New York, 1932), Appendix II.

Amint egy műveletet azáltal definiálhatunk az elemi logikában, hogy értékét minden helyen megadjuk, ugyanúgy egy műveleti szabályt azáltal bizonyíthatunk be, hogy érvényességét minden egyes (véges számú) helyen igazoljuk. Ily módon könnyen verifikálhatjuk pl. a következő törvényeket:

$$X \& Y = Y \& X, X \vee Y = Y \vee X \text{ (kommutatív törvények) ;}$$

$$(X \& Y) \& Z = X \& (Y \& Z), (X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z) \\ \text{(asszociatív törvények) ;}$$

$$(X \& Y) \vee Z = (X \vee Z) \& (Y \vee Z), (X \vee Y) \& Z = (X \& Z) \vee (Y \& Z) \\ \text{(disztributív törvények),}$$

amelyeken a már említett algebrai analógia alapul (lényeges eltérés azonban az algebrától, hogy itt mindkét disztributív törvény érvényes).

A felsorolt műveletek segítségével, a (többszámú) interpolációs formula analogonjaként könnyen felírhatjuk az X_1, X_2, \dots, X_n változók olyan kifejezését, amely adott helyeken adott logikai értékeket vesz fel; minthogy az összes lehetséges helyek száma véges (2^n) és egy műveletet az ezeken a helyeken felvett értékei meghatározzák, adódik, hogy a felsorolt négy művelet segítségével bármely, akárhány változós logikai műveletet kifejezhetünk. A könnyen verifikálható

$$X \& Y = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{X \rightarrow \overline{Y}}, X \vee Y = \overline{\overline{X} \& \overline{Y}} = \overline{(X \rightarrow Y) \rightarrow Y},$$

$$X \rightarrow Y = \overline{X \& \overline{Y}} = \overline{X} \vee Y$$

törvények mutatják, hogy e célra már a negáció és az $X \& Y, X \vee Y, X \rightarrow Y$, műveletek *egyike* is megfelel.²²

Megemlítem még az

$$(X \& Y) \rightarrow Z = X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \quad (1)$$

törvényt, amely mutatja, hogyan lehet olyan implikációt, amelynek előtagja konjunkció, pusztán implikációkkal kifejezni:

²² Kifejezhetjük a logikai műveleteket egyetlenegy kétváltozós művelet segítségével is: akár az $X|Y = \overline{X \& Y}$, akár az $X||Y = \overline{X \vee Y}$ művelet segítségével; I. H. M. SHEFFER, A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with Application to Logical Constants, *Transactions of the American Math. Society*, **14** (1913), 481—488. oldal.

A felsorolt műveletek segítségével változókból felépített kifejezések, ú. n. *elemi logikai formulák* között fontos szerepet játszanak a bizonyításelméletben azok, amelyeknek értéke a változók minden értékrendszerénél \uparrow . Az ilyen formulákat identikusan igaz formuláknak, röviden *identitásoknak* nevezzük. Ilyenek pl.

$$X \rightarrow X; X \vee \bar{X}; X \& \bar{X};$$

$$X \rightarrow (Y \rightarrow X); (\bar{X} \rightarrow \bar{Y}) \rightarrow (Y \rightarrow X); (X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)); (2)$$

további ilyen identitásokat kapunk, ha a fentemlített törvények bal- és jobboldalát (vagy megfordítva) az implikáció jelével kötjük össze. Identitásból újabb identitást kapunk, ha változói helyébe tetszőleges formulákat helyettesítünk (természetesen ugyanazon változó helyébe, ha több helyen is előfordul, mindenütt ugyanazt a formulát). Az implikáció definíciójából közvetlenül adódik továbbá, hogy ha \mathfrak{A} és $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ identitások,²³ akkor \mathfrak{B} is az; azt az operációt, amely \mathfrak{A} -ból és $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ -ből \mathfrak{B} -t adja, leválasztásnak nevezzük. Érdekes eredmény, hogy meg lehet adni véges számú olyan identitást, amelyből minden identitást meg lehet kapni helyettesítések és leválasztások segítségével;²⁴ ezt a tényt — nyilvánvaló analógia folytán — az elemi logika axiomatizálhatóságának, a kérdéses véges számú identitást (amelyeket többféleképpen választhatunk) az elemi logika axiómáinak, a helyettesítést és leválasztást az elemi logika következtetési szabályainak nevezzük. Ha csak az implikáció és negáció segítségével felépülő identitásokra szorítkozunk, a (2) formulák egy axiómarendszert adnak ezek számára.

Adott formuláról mindig el tudjuk dönteni, identitás-e, vagy nem; elég ehhez valamennyi (véges számú) helyen kiszámítani az értékét. Ha a változók száma nagy, akkor ez az eljárás hosszadalmas; vannak gyorsabban célhoz vezető módszerek is.

²³ Német nagybetűk nem logikai változókat jelölnek, hanem tetszőleges formulákat.

²⁴ E. L. Post, Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, *American Journal of Math.*, **43** (1921), 163—185. oldal; egyszerűbb bizonyítás tekintetében I. L. KALMÁR, Über die Axiomatisierbarkeit der Aussagenkalküls, *Acta Scientiarum Math.*, **7** (1934—35), 222—243. oldal.

3. Logikai függvénykalkulus.

A matematikában lépten-nyomon előfordulnak olyan ítéletek, amelyek egy vagy több betűt (változót) tartalmaznak s logikai értékük e változóktól függ; pl. « x osztója y -nak», « P a Q és R között fekszik» stb. Maguk a változók a legkülönbözőbb halmazokon futnak át, pl. a természetes számok halmazán, a sík pontjainak halmazán stb. Az ilyen ítéletek logikai értéke tehát olyan függvény, amelynek változói egy adott H halmazon futnak át, értékei pedig logikai értékek. Az ilyen ú. n. *logikai függvényekkel* foglalkozik a logikai függvénykalkulus. A szűkebb függvénykalkulusban a H halmazt fixnek tekintjük és *individuum-tartománynak*, elemeit pedig *individuumoknak* ²⁵ nevezzük. Az egyváltozós logikai függvényeket *tulajdonságoknak*, predikátumoknak, a többváltozós logikai függvényeket *relációknak* is szokás nevezni; az elnevezés okát eléggé megvilágítják a következő példák, amelyekben H a pozitív egész számok halmaza:

$$F(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \text{ páros szám,} \\ \downarrow, & \text{ha } x \text{ páratlan szám;} \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \text{ primszám,} \\ \downarrow, & \text{ha } x \text{ összetett szám;} \end{cases}$$

$$K(x, y) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x < y, \\ \downarrow, & \text{ha } x \geq y; \end{cases}$$

$$D(x, y) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \text{ osztója } y\text{-nak,} \\ \downarrow, & \text{ha } x \text{ nem osztója } y\text{-nak;} \end{cases}$$

$$S(x, y, z) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } z = x + y, \\ \downarrow, & \text{ha } z \neq x + y; \end{cases}$$

$$P(x, y, z) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } z = xy, \\ \downarrow, & \text{ha } z \neq xy. \end{cases}$$

Más példák: legyen H a sík pontjainak halmaza, $L(x, y, z)$ akkor és csak akkor \uparrow , ha x, y, z egy egyenesen vannak; $M(x, y, z)$ akkor és csak akkor \uparrow , ha y az x és z közé esik.

Logikai függvényekre az elemi logika műveleteit alkalmazva,

²⁵ Az individuumokon átfutó változókat latin kisbetűkkel fogjuk jelölni.

újabb logikai függvényeket kapunk; pl. $F(x) \& G(x)$, ahol F és G a fent definiált függvények, akkor és csak akkor \uparrow , ha $x=2$; $K(x, y) \vee K(y, x)$ akkor és csak akkor \uparrow , ha $x \neq y$.

A függvénykalkulus azonban foglalkozik két speciális, logikai függvényekre vonatkozó függvényoperációval, ú. n. quantorral is; ezek definíciója:

$$(x)F(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } F(x) \text{ az a függvény, amelynek értéke} \\ & \text{minden helyen } \uparrow, \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

és

$$(\mathbf{E}x)F(x) = \begin{cases} \downarrow, & \text{ha } F(x) \text{ az a függvény, amelynek értéke} \\ & \text{minden helyen } \downarrow, \\ \uparrow & \text{különben.} \end{cases}$$

A (x) -et általános, $(\mathbf{E}x)$ -et egzisztenciális quantornak nevezzük; kiejtésük: «minden x -re», ill. «van oly x , hogy». E quantorok többváltozós függvényre alkalmazva eggyel kevesebb változós függvényt adnak; pl. $(\mathbf{E}x)P(x, y, z)$ akkor és csak akkor \downarrow , ha y és z olyan természetes számok, hogy minden x helyen $z \neq xy$, azaz ha y nem osztója z -nek; tehát

$$(\mathbf{E}x)P(x, y, z) = D(y, z);$$

hasonlóan (figyelembevéve, hogy H a pozitív egész számok halmaza)

$$(\mathbf{E}x)S(x, y, z) = K(y, z);$$

$(\mathbf{E}x)P(x, x, y)$ akkor és csak akkor \uparrow , ha y négyzetszám; $(x)P(x, y, x)$ akkor és csak akkor \uparrow , ha $y=1$. A (x) , $(\mathbf{E}x)$ quantorok alkalmazásával keletkező kifejezések tehát x -től nem függenek; x bennük ú. n. kötött változó (éppúgy, mint az analízis $\int_a^b f(x) dx$ kifejezésében).

A függvénykalkulus *formulái* azok a kifejezések, amelyek elemi logikai változókból és logikai függvényekből az elemi logika műveletei és quantorok segítségével épülnek fel; pl.

$$(x)((\mathbf{E}y)F(x, y) \rightarrow (z)G(y, z, u) \vee X).$$

Egy ilyen formula értéke függ *a)* az individuumtartomány választásától; *b)* a benne szereplő logikai függvények és az elemi logikai változók helyére teendő logikai értékek választásától; *c)* a quan-

torral le nem kötött, ú. n. szabad változók ²⁶ helyére teendő individuumok választásától. Megint azok a formulák lesznek fontosak számunkra, amelyeknek értéke ezek minden választásánál \uparrow ; ezeket nevezzük a függvénykalkulus identitásainak. Ilyenek maguk az elemi logika identitásai is; ezeken kívül pl.

$$(x)F(x) \rightarrow F(a), \quad (3)$$

$$F(a) \rightarrow (E x)F(x); \quad (4)$$

a quantorok definíciója ugyanis azonnal adja, hogy ezek értéke az individuumtartomány, az F egyváltozós logikai függvény és az a individuum minden választásánál \uparrow . További példák

$$(E x)(y)F(x,y) \rightarrow (y)(E x)F(x,y);$$

$$(x)F(x) \& (x)G(x) \rightarrow (x)(F(x) \& G(x));$$

ellenben pl.

$$(y)(E x)F(x,y) \rightarrow (E x)(y)F(x,y)$$

nem identitás, mert értéke \downarrow lesz, ha pl. az individuumtartomány a természetes számok halmaza, továbbá $F(x,y)$ a fenti $K(y,x)$.

Itt már nem ismeretes olyan eljárás, amelynek segítségével adott formuláról mindig eldönthetjük véges számú lépésben, vajjon identitás-e; az ily eljárás meghatározására vonatkozó probléma az ú. n. eldöntés-probléma. Ez a probléma, noha számos speciális esete megoldásra talált (pl. olyan formulák esetére, amelyekben minden quantor a formula elején van és hatásköre a formula végéig terjed ²⁷ s a quantorok közül csak kettő egzisztenciális s

²⁶ Jegyezzük meg, hogy ugyanaz a változó lehet egy formula egyik helyén szabad, másik helyén kötött változó; pl. az utoljára említett formulában y a \rightarrow előtt kötött, utána szabad változó. A formula áttekinthetősége szempontjából célszerű bizonyos betűket (pl. x, y, z, u, v, w) csak kötött, másokat (pl. a, b, c, d, e) csak szabad változók jelölésére használni; ezt a 19. lábjegyzetben idézett HILBERT—BERNAYS-féle könyv szigorúan keresztülviszi.

²⁷ Az olyan formulákat, amelyekben minden quantor elől van és az egész utána következő formularészre vonatkozik, praenex formuláknak nevezik. Minden formulához található olyan praenex formula, amelynek mindig ugyanaz az értéke, mint az eredetinek, úgyhogy az eldöntés-probléma szempontjából a praenexség nem lényeges megszorítás.

azok is szomszédosak²⁸), általánosságban, mint CHURCH nemrég bebizonyította,²⁹ megoldhatatlan.

A bizonyításelmélet szempontjából célszerű a formula és az identitás fogalmának még két általánosítását figyelembe vennünk. Minden individuumtartományban definiálható a következő logikai függvény:

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \text{ ugyanaz az individuum, mint } y, \\ \downarrow & \text{különben.} \end{cases}$$

Mármost egy formulát, amelyben ez a speciális függvény is előfordul, akkor nevezünk identitásnak, ha az individuumtartomány, a formulában Δ -n kívül szereplő logikai függvények és az elemi logikai változók helyére teendő logikai értékek, végül a szabad változók helyébe teendő individuumok bármely választásánál, ha azonkívül Δ épp a fent definiált logikai függvényt jelenti, \uparrow a formula értéke. Pl.

$$\Delta(a, a), \quad (5)$$

$$\Delta(a, b) \rightarrow (F(a) \rightarrow F(b)) \quad (6)$$

$$(\mathbf{E}x)(y) \Delta(x, y) \ \& \ (\mathbf{E}x)F(x) \rightarrow (x)F(x)$$

²⁸ Az eldöntés-probléma e speciális esetének megoldására vonatkozólag l. K. GÖDEL, Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik, *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, 2 (1932), 27—28. oldal; L. KALMÁR, Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Math. Annalen*, 108 (1933), 466—484. oldal; K. SCHÜTTE, Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, 109 (1933—34), 572—603. oldal.

²⁹ A. CHURCH, A Note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), 40—41. és 101—102. oldal. — Az eldöntés-probléma általános megoldása olyan eljárás megadásában állna, amely minden formulához hozzárendel egy, véges számú lépésben meghatározható, logikai értéket, mégpedig az \uparrow -at, ha a formula identitás, a \downarrow -at, ha nem. CHURCH azt, hogy ilyen hozzárendelés nem lehetséges, nem úgy mutatja meg, hogy olyan formulát ad meg, amelyről nem lehet véges számú lépésben eldönteni, hogy identitás-e, vagy nem, hanem úgy, hogy minden olyan véges számú lépésben végrehajtható eljáráshoz, amely minden formulához egy-egy logikai értéket rendel hozzá, megad egy-egy formulát, amelyről el tudja dönteni, hogy identitás-e, vagy nem; de megmutatja, hogy ha identitás, akkor éppen a \downarrow , ha meg nem identitás, akkor az \uparrow értéket rendelte hozzá a szóbanforgó eljárás.

ilyen identitások (a legutóbbi azért, mert az implikáció \uparrow , ha előtagja \downarrow , bármi is legyen utótagja; ha pedig előtagja \uparrow , azaz az előtagban szereplő konjunkció mindkét tagja \uparrow , akkor az individuumtartomány egyrészt egyetlenegy elemből áll, másrészt $F(x)$, ha x ezt az elemet jelenti, nem \downarrow , tehát az individuumtartomány bármely (egyetlen) helyén \uparrow , úgyhogy az implikáció utótagja s vele az egész implikáció \uparrow .

Tovább általánosíthatjuk még a formula fogalmát úgy is, hogy megengedjük, hogy ú. n. *matematikai függvények*, azaz olyan függvények is szerepeljenek benne, amelyeknek változói individuumokon futnak át és értékei is individuumok.³⁰ Ilyen matematikai függvény pl. a természetes számok individuumtartományán az $x+y$, vagy az $x.y$ függvény, vagy a sík pontjainak halmazán az az $f(x, y)$ függvény, amelynek értéke az x és y pontok felezőpontja. A formulákban a logikai függvények argumentumaiban individuumváltozókból és matematikai függvényekből összetett tetszőleges *kifejezések* állhatnak; pl.

$$(x)(\mathbf{E}y)(F(x, f(x, g(x, y))) \vee G(f(x, y), g(f(x, y), f(y, x))) \rightarrow \Delta(f(x, y), g(y, y)))$$

ilyen általános értelemben vett formula. Egy ilyen formulát akkor nevezünk identitásnak, ha az individuumtartomány, a benne szereplő logikai és matematikai függvények, az elemi logikai változók helyébe teendő logikai értékek és a szabad változók helyébe teendő individuumok bármely választásánál (azonban, ha a Δ függvény is szerepel benne, ennek fent megadott definíciójánál) \uparrow az értéke. Pl.

$$(x)F(x, f(x)) \rightarrow (x)(\mathbf{E}y)F(x, y)$$

identitás. Az ilyen általánosított identitásokra vonatkozó eldöntéskérdés probléma visszavezethető az eredeti eldöntéskérdésre, de vele együtt megoldhatatlan.

Az ú. n. bővített függvénykalkulus az individuumtartományok egy egész seregén definiált logikai függvényekkel, a reájuk vonatkozó quantorokkal és az ezekből felépíthető formulákkal foglal-

³⁰ Az ilyen függvényeket latin kisbetűvel, míg a logikai függvényeket latin nagybetűvel jelöljük.

kozik; ezek közül az individuumtartományok közül az első, H_1 , tetszőleges, de fix; a következő, H_2 , a H_1 -en definiált logikai függvények halmaza; H_3 a H_2 -n definiált logikai függvények halmaza stb.³¹ Ezzel nem foglalkozunk itt részletesebben.

Mármost a matematikai logika segítségével pontosabban megfogalmazhatjuk az axiomatizálásban szereplő fogalmak jelentését. Minden axiomatizálással egy összességet szándékozunk jellemezni, pl. a PEANO-féle axiómákkal a természetes számok halmazát, a geometria axiomatizálásával a tér pontjainak, egyeneseinek és síkjainak halmazát.³² Az alapfogalmak e halmazon mint individuumtartományon definiált logikai vagy matematikai függvények. Az előbbiekre példák a geometria axiómarendszerében a «pont», «egyenes», «sík» predikátumai (ezek közül pl. az első az az egyváltozós logikai függvény, amely akkor és csak akkor \uparrow , ha argumentuma pont), az «illeszkedés», a «közöttfekvés» és az «egybevágóság» relációja (pl. a harmadik az a négyváltozós $F(x, y, z, u)$ logikai függvény, amely akkor és csak akkor \uparrow , ha x, y, z és u pontok s az xy szakasz egybevágó a zu szakasszal); a PEANO-féle axiómákban a «természetes szám» predikátuma; a halmazelmélet axiómáiban a «halmaz» predikátuma és az «elemként tartalmazás» relációja. Az utóbbiakra példa a PEANO-féle axiómákban az a' függvény. Alapfogalomként speciális individuum is szerepelhet, mint pl. itt a 0; az ilyeneket beleérthetjük a matematikai függvények közé, mint 0-változós függvényeket.

Maguk az axiómák s általánosan az axiomatizált diszciplína tételei az alapfogalmakból elemi logikai műveletek és quantorok segítségével összetehető bizonyos formulák \uparrow értékűségét fejezik ki. Az axiómák és tételek így módon való felírásának, az ú. n. formali-

³¹ A bővített függvénykalkulusnak a matematika RUSSELLTŐL származó ú. n. *logicsztikus* felépítésénél jut fontos szerep. E felépítés a matematika minden egyes tételét mint a bővített logikai függvénykalkulus identitását kapja meg.

³² A halmazelmélet axiómarendszere is egy összességet: a halmazok (és, az eredeti ZERMELO-féle axiómarendszer esetén, a nem halmazjellegű elemek) összességét jellemzi. Ezen a tényen semmit sem változtat az, hogy maga ez az összesség az axiomatikus halmazelméletben nem halmaz.

zálásnak ³³ módját illusztrálják a következő példák. Ha $N(x)$ a «természetes szám» predikátuma (\uparrow , ha x természetes szám, különben ³⁴ \downarrow), továbbá $\Delta(a, b)$ helyett, mint szokásos, $a=b$ -t és $\Delta(a, b)$ helyett $a \neq b$ -t írunk, akkor az első négy PEANO-féle axióma azt fejezi ki, hogy a következő formulák értéke mindig \uparrow :

$$\begin{aligned} N(0), \\ N(a) \rightarrow N(a'); \\ a' = b' \rightarrow a = b; \\ N(a) \rightarrow a' \neq 0. \end{aligned}$$

Ha $P(x)$ a «pont», $L(x)$ az «egyenes» predikátuma, $C(x, y)$ az «illeszkedés» relációja, akkor az az axióma, hogy két ponton egy és csak egy egyenes megy át, úgy fejezhető ki, hogy a következő formula értéke bármely a és b mellett \uparrow :

$$\begin{aligned} P(a) \& P(b) \& a \neq b \rightarrow (E x)(L(x) \& C(a, x) \& C(b, x) \& \\ & \& (y)(L(y) \& C(a, y) \& C(b, y) \rightarrow y = x)) \end{aligned}$$

az $(E x)$ után következő konjunkció első három tagjának \uparrow értékűsége azt fejezi ki, hogy x az a -val is, b -vel is illeszkedő egyenes; a negyedik tagé pedig azt, hogy ha valamely y is ilyen egyenes, akkor azonos x -szel, azaz, hogy csak egy ilyen egyenes van).

A tetszőleges tulajdonságokról szóló axiómáknak olyan formulák felelnek meg, amelyekben *tetszőleges* (egyváltozós) logikai függ-

³³ A formalizálás a bizonyításelmélet szempontjából csak segéd-eszköz az ellentmondásnélküliség exakt megfogalmazásához és bebizonyításához. Más felfogás, különösen a logicizmus felfogása szerint a formalizálás öncél: a logicisták szerint a matematika csak a formalizálással éri el az exaktság teljes fokát. Ez a felfogás PEANORA vezethető vissza; I. G. PEANO, *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Torino, 1889); *I principii di geometria, logicamente esposti* (Torino, 1889); *Formulaire de mathématiques* (Torino, 1895—1908).

³⁴ Ha az axiómarendszerrel jellemzett individuumtartomány a természetes számok összessége, akkor $N(x)$ mindig igaz; ekkor az első két PEANO-féle axiómára nincs is szükség és a negyedik is az egyszerűbb $a' \neq 0$ formulával formalizálható. Más a helyzet, ha pl. a valós számok összességét akarjuk axiomatikusan jellemezni, s a PEANO-féle axiómák axiómarendszerünknek csak egy részét képezik; ez esetben vannak individuumtartományunknak más elemei is, mint természetes számok s az $N(x)$ predikátumra valóban szükség van.

vény (ú. n. függvényváltozó) van; pl. a teljes indukció axiómája úgy fejezhető ki, hogy az

$$F(0) \& (x)(F(x) \rightarrow F(x')) \rightarrow (x)(N(x) \rightarrow F(x))$$

formula értéke, a folytonosság DEDEKIND-féle axiómája pedig azt, hogy ha M a «közöttfekvés» relációja, az

$$\begin{aligned} & (E x)(E y)(E z)(E u)(x \neq y \& z \neq u \& F(x) \& F(y) \& \overline{F(z)} \& \overline{F(u)}) \& \\ & \& (x)(y)(z)(F(x) \& F(y) \& M(x, z, y) \rightarrow F(z)) \rightarrow (E u)(x)(y) (F(x) \& \\ & \& \overline{F(y)} \& x \neq u \& y \neq u \rightarrow M(x, u, y)) \end{aligned}$$

formula értéke az F függvényváltozó bármely választásánál \uparrow .

Az axiómák erős megszorítást jelentenek az individuumtartományra és az alapfogalmakra nézve. Hiszen egy axiómarendszer éppen azt jelenti, hogy nem tetszőleges individuumtartományról van szó, s az alapfogalmakat reprezentáló logikai és matematikai függvények nem tetszőlegesek, hanem olyanok, hogy minden egyes axióma³⁵ értéke (a szabad változók és a függvényváltozók bármely választásánál) \uparrow legyen.

Mármost legyenek $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ egy axiómarendszer axiómáit, \mathfrak{B} pedig az axiomatizált diszciplína egy tételét ilyen módon formalizáló formulák. Mit jelent az, hogy a kérdéses tétel pusztán logikai úton (a nélkül, hogy másra, mint az axiómákra hivatkoznánk, a nélkül, hogy az alapfogalmakról mást felhasználnánk, mint amit az axiómák kifejeznek) következik az axiómákból? Azt, hogy minden olyan individuumtartományban és az alapfogalmaknak megfelelő logikai és matematikai függvények minden olyan választásánál, amelyeknél $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \dots = \mathfrak{A}_n = \uparrow$, egyúttal $\mathfrak{B} = \uparrow$. Nevezzük az individuumtartomány és az alapfogalmaknak megfelelő logikai és matematikai függvények választását röviden *modellnek* és egyelőre tegyük fel, hogy sem $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$, sem \mathfrak{B}

³⁵ Egyszerűbb kifejezésmód kedvéért néha az axiómákat formalizáló formulákat azonosítjuk az axiómákkal; hasonlóan, az axiomatizált diszciplína tételeit formalizáló formulák és maguk e tételek között sem teszünk különbséget.

nem tartalmaznak szabad változókat,³⁶ sem pedig függvényváltozókat, úgyhogy $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ határozott értékeket vesznek fel, mihelyt a modellt megadjuk. Akkor a fenti tulajdonság úgy is kifejezhető, hogy az

$$\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \dots \& \mathfrak{A}_n \rightarrow \mathfrak{B} \quad (7)$$

formula értéke bármely modellben \uparrow , más szóval: (7) identitás. Hiszen (7) értéke biztosan \uparrow , ha $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ közül csak egy is \downarrow , mert akkor az implikáció előtagja \downarrow ; tehát (7) akkor és csak akkor identitás, ha értéke mindig \uparrow akkor is, ha $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \dots = \mathfrak{A}_n = \uparrow$, azaz ekkor $\mathfrak{B} = \uparrow$.

Pl. a $0' \neq 0'''$ (közönséges jelöléssel: $1 \neq 3$) tétel pusztán logikai úton következik az első négy PEANO-féle axiómából. Ez azt jelenti, hogy ha H bármilyen halmaz, $N(x)$ bármilyen H -n értelmezett egyváltozós logikai és x' bármilyen H -n értelmezett egyváltozós matematikai függvény, továbbá 0 a H halmaz bármely elemét jelöli, ha továbbá $N(0) = \uparrow, N(a) \rightarrow N(a') = \uparrow, \Delta(a', b') \rightarrow \Delta(a, b) = \uparrow$ és $N(a) \rightarrow \overline{\Delta(a', 0)} = \uparrow$ a H halmaz bármely a, b elemére, akkor $\overline{\Delta(0', 0''')} = \uparrow$. Ezt a tényt másképp úgy is kifejezhetjük, hogy az

$$\begin{aligned} N(c) \& (x)(N(x) \rightarrow N(x')) \& (x)(y)(\Delta(x', y') \rightarrow \Delta(x, y)) \& \\ & \& (x)(N(x) \rightarrow \overline{\Delta(x', c)}) \rightarrow \overline{\Delta(c', c''')} \end{aligned} \quad (8)$$

formula értéke a H halmaz, ennek c eleme s az $N(x)$ logikai és x' matematikai függvény bármely választásánál \uparrow , azaz a (8) formula identitás. Itt ismét $\Delta(x, y)$ -t írtunk $x = y$ helyett (mert az $=$ jelet a logikai értékek egyenlőségének jelölésére használtuk); továbbá 0 helyett c -t írtunk annak kitüntetésére, hogy H bármely elemét jelölheti; a PEANO-féle axiómákat pedig az a, b szabad változók helyett az x, y kötött változókkal formalizáltuk (l. a 36. lábjegyzetet).

³⁶ Szabad változó jelenlétén könnyen segíthetünk úgy, hogy helyébe általános quantorral kötött változót teszünk; pl. a második PEANO-féle axiómát $(x)(N(x) \rightarrow N(x'))$ alakban írhatjuk. Függvényváltozók jelenlétén hasonló módon csak akkor segíthetnénk, ha a bővített függvénykalkulust vennők alapul; ez esetben pl. a teljes indukció axiómáját $(F)(F(0) \& (x)(F(x) \rightarrow F(x')) \rightarrow (x)(N(x) \rightarrow F(x)))$ alakban írhatnók.

A (7) formula az (1) törvény (és a konjunkció asszociatív törvénye) ismételt alkalmazásával így is írható:

$$\mathfrak{A}_1 \rightarrow (\mathfrak{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\mathfrak{A}_n \rightarrow \mathfrak{B}) \dots); \quad (9)$$

a \mathfrak{B} tétel³⁷ tehát akkor és csak akkor következménye az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ axiómáknak, ha (9) identitás. Jegyezzük meg, hogy \mathfrak{B} a (9) formulából rendre $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ leválasztásával adódik; azaz diszciplínánk minden tételét megkaphatjuk leválasztás segítségével az axiómákból és egy identitásból. Fordítva, az axiómákból és identitásokból leválasztásokkal adódó bármely \mathfrak{B} formula következménye az axiómáknak, hiszen ha olyan modellt választunk, amelyben $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \dots = \mathfrak{A}_n = \uparrow$, valamennyi identitás értéke is \uparrow lesz (mint minden modellben), tehát $\mathfrak{B} = \uparrow$ lesz, mert ha valamely modellben $\mathfrak{F} = \uparrow$ és $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G} = \uparrow$, akkor $\mathfrak{G} = \uparrow$.

Ily módon a következmény fogalmát sikerült exakt módon megfogalmaznunk; ez a megfogalmazás azonban még mindig nem kielégítő. Ugyanis szerepel benne az identitás fogalma, amit végeredményben halmazelméleti eszközökkel definiáltunk. Azonkívül, minthogy nem áll rendelkezésünkre módszer annak eldöntésére, hogy egy adott formula identitás-e, a következmény e fogalma nem teljesíti azt a magától értetődő kívánságot, hogy ha valaki ilyen értelemben következtet, ellenőrizhessük, vajjon helyesen következtetett-e? Hiszen hivatkozhatott olyan formula identitásvoltára, amelyről nem tudjuk megállapítani, az-e; pl. közvetlenül nem evidens, hogy a (8) formula, ill. a belőle az (1) törvény ismételt alkalmazásával keletkező

$$\begin{aligned} N(c) \rightarrow ((x) (N(x) \rightarrow N(x')) \rightarrow ((x)(y) (\mathcal{A}(x', y') \rightarrow \mathcal{A}(x, y)) \rightarrow \\ \rightarrow ((x)(N(x) \rightarrow \overline{\mathcal{A}(x', c)}) \rightarrow \overline{\mathcal{A}(c', c''')))) \end{aligned}$$

formula identitás. Ezért döntő tény a bizonyításelmélet szempontjából, hogy az identitás fogalmát definiálhatjuk halmazelméleti fogalmakra való hivatkozás nélkül is és hogy ez a definíció egyúttal

³⁷ Emlékeztetek arra, hogy « \mathfrak{B} tétel» röviden a helyett a tétel helyett áll, amely azt fejezi ki, hogy \mathfrak{B} értéke mindig \uparrow ; hasonlóan « \mathfrak{A}_i axióma» rövid kifejezés ahelyett, hogy «az az axióma, a mely úgy fejezhető ki, hogy \mathfrak{A}_i értéke mindig \uparrow ».

módot ad az identitásoknak egy ellenőrizhető eljárással való származtatására. A függvénykalkulusnak a halmazelmélettől való ily függetlenítéséhez vezet az elemi logika axiomatizálhatóságának a függvénykalkulusra való, GÖDEL-től³⁸ származó kiterjesztése.

Nyilvánvaló, hogy identitásokból leválasztással is, helyettesítéssel is, megint identitások keletkeznek. A helyettesítés többféle lehet: elemi logikai változó vagy logikai függvény helyébe tetszőleges formulát,³⁹ szabad individuumváltozó vagy matematikai függvény helyébe tetszőleges, szabad változókból és matematikai függvényekből összetett kifejezést helyettesíthetünk; ha több

³⁸ K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **37** (1930), 349—360. oldal. A szóbanforgó tételt GÖDEL-féle teljességi tételnek szokás nevezni; ugyanis a függvénykalkulus axiómarendszere már GÖDEL dolgozata előtt ismeretes volt (abban a formában, ahogyan itt szerepel, BERNAYS-tól származik; l. a 19. lábjegyzetben idézett HILBERT—ACKERMANN-féle mű 1. kiadását, Berlin, 1928, 53—54. oldal); GÖDEL eredményében az volt az új, hogy minden identitás megkapható a szövegben részletezett módon.

³⁹ Egy \mathfrak{A} formulában egy $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ logikai függvény helyébe egy \mathfrak{F} formulát helyettesíteni úgy kell, hogy \mathfrak{A} -nak minden egyes $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ alakú része helyébe, ahol a_1, a_2, \dots, a_n tetszőleges, szabad változókból és matematikai függvényekből összetett kifejezések, azt a formulát helyettesítsük, amely \mathfrak{F} -ből úgy keletkezik, hogy benne x_1 helyébe a_1 -t, x_2 helyébe a_2 -t, \dots , x_n helyébe a_n -et helyettesítsük. \mathfrak{F} -ben nem kell, hogy valamennyi x_i effektíve szerepeljen (ha valamelyik nem szerepel, akkor a megfelelő a_i helyettesítése természetesen elmarad); szerepelhetnek benne egyéb változók is, de nem szabad, hogy valamelyik további szabad változója ugyanúgy legyen jelölve, mint \mathfrak{A} -ban egy olyan kötött változó, amelyhez tartozó quantor hatáskörében előfordul valamelyik $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ugyanis, ha e megszorítást nem tennők, identitásból nem mindig jutnánk identitáshoz; például $(x)(y)(F(x) \vee G(x, y)) \rightarrow (x)(F(x) \vee (y)G(x, y))$ identitás, de a belőle $F(x)$ helyébe $\overline{G(x, y)}$ helyettesítésével keletkező $(x)(y)(\overline{G(x, y)} \vee G(x, y)) \rightarrow (x)(\overline{G(x, y)} \vee (y)G(x, y))$ formula nem az, mert az implikáció előtagja indentitás, utótagja pedig nem (pl. hamis lesz, ha individuumtartományának a természetes számok halmazát, $G(x, y)$ -nak az $x = y$ logikai függvényt választjuk, az y szabad változó helyébe pedig (az implikáció utótagjában szereplő $\overline{G(x, y)}$ -ban) 1-et teszünk. Hasonlóan értendő és hasonló megszorításnak van alávetve a matematikai függvények helyébe való helyettesítés.

helyen szerepel, akkor mindenütt ugyanazt. Kötött változó helyébe tetszőleges kötött változót helyettesíthetünk; itt nem fontos, hogy mindenütt ugyanazt, csak az, hogy egy-egy quantor alkalmazásával keletkező formularészben ugyanazt a kötött változót helyettesítsük helyébe.⁴⁰

De könnyen átláthatjuk azt is, hogy identitásból identitást kapunk a következő operációkkal is. Legyen \mathfrak{F} olyan formula, amelyben valamely a szabad változó nem szerepel, $\mathfrak{G}(a)$ olyan formula, amelyben szerepelhet a , végül $\mathfrak{G}(x)$ úgy keletkezzék $\mathfrak{G}(a)$ -ból, hogy a helyébe mindenütt x -et teszünk benne. Akkor, ha $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}(a)$ identitás, $\mathfrak{F} \rightarrow (x)\mathfrak{G}(x)$ is az, és ha $\mathfrak{G}(a) \rightarrow \mathfrak{F}$ identitás, $(Ex)\mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{F}$ is az. Nevezzük e két operációt, amelyek a mondott feltételek mellett $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}(a)$ -t $\mathfrak{F} \rightarrow (x)\mathfrak{G}(x)$ -be, ill. $\mathfrak{G}(a) \rightarrow \mathfrak{F}$ -t $(Ex)\mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{F}$ -be viszik át, quantorkövetkeztetésnek.

Mármost GÖDEL említett axiomatizálhatósági tétele azt mondja ki, hogy minden identitás megkapható az elemi logika identitásai-ból és véges számú további identitásból, mégpedig (3), (4), (5), (6)-ból,⁴¹ helyettesítések, leválasztások és quantorkövetkeztetések segítségével. Az elemi logikai identitásokat,⁴² továbbá (3), (4), (5), (6)-ot, a függvénykalkulus axiómáinak vagy logikai axiómáinak, a helyettesítést, leválasztást és quantorkövetkeztetést pedig következtetési szabályoknak nevezzük.

E szerint nem szűkítjük (se nem bővítjük) az identitás fogalmát, ha halmazelméleti definíciója helyett így definiáljuk: olyan for-

⁴⁰ Pl. a $(x)F(x) \vee (Ex)\overline{F(x)}$ formulából x helyére y -nak helyettesítésével a $(y)F(y) \vee (Ex)\overline{F(x)}$, $(x)F(x) \vee (Ey)\overline{F(y)}$ és $(y)F(y) \vee (Ey)\overline{F(y)}$ formulák bármelyike keletkezik; mind identitás, mert az eredeti formula az volt. Ezzel szemben az $F(a) \vee \overline{F(a)}$ identitásból a helyére b -nek helyettesítésével csak az $F(b) \vee \overline{F(b)}$ formula keletkezik; ez identitás, míg az $F(a) \vee \overline{F(b)}$, $F(b) \vee \overline{F(a)}$ formulák nem azok.

⁴¹ Ha az identitás eredeti fogalmánál maradunk, azaz matematikai függvényeket s a $A(x, y)$ függvényt nem tartalmazó formulákra szorítkozunk, akkor az (5) és (6) formulák elmaradnak és a helyettesítés fogalmát is megfelelőképpen szűkíthetjük. Az általános esetet könnyen visszavezethetjük erre az esetre.

⁴² Vethetjük helyettük az elemi logika egy tetszőleges axiómarendszerét.

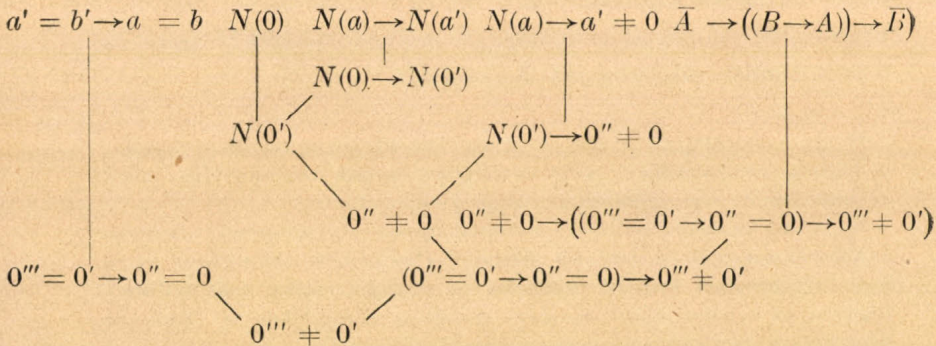
mula,⁴³ amely a függvénykalkulus axiómáiból a következtetési szabályok ismételt alkalmazásával adódik. S ha megkívánjuk, hogy valahányszor valaki egy axiómarendszerből való következtetés alkalmával arra hivatkozik, hogy valamely formula identitás, le is hozza a függvénykalkulus axiómái és következtetési szabályai segítségével, akkor mindig ellenőrizhetjük, vajjon helyesen hozta-e le. Természetesen kiindulhattunk volna az identitások e definíciójából is, azonban ez önkényesnek látszott volna és semmiképpen sem lett volna indokolt az identitások így nyert fogalmát használni fel a következmény fogalmának definiálására. Miután azonban a függvénykalkulus halmazelméleti bevezetése és a GÖDEL-féle axiomatizálhatósági tétel ugyancsak halmazelméleti bizonyítása⁴⁴ motiválta ezt a definíciót, nincs többé szükségünk halmazelméletre a bizonyításelmélet szempontjából, hanem a bizonyításelmélet kiindulópontjával választhatjuk a következő definíciót: a \mathfrak{B} tétel következménye az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ axiómáknak, ha leválasztásokkal megkapható $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ -ből és olyan formulákból, amelyek a logikai axiómákból a következtetési szabályok segítségével előállíthatók. Könnyen látható, hogy ehhez szükséges és elegendő, hogy \mathfrak{B} előállítható legyen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ -ből és a logikai axiómákból a következtetési szabályok ismételt alkalmazásával, úgy azonban, hogy az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ -ben szereplő logikai és matematikai függvények helyébe (amelyek az alapfogalmakat reprezentálták) nem végzünk helyettesítést. Ez a megszorítás abból származott, hogy feltettük, hogy $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ nem tartalmaznak tetszőleges individuumokat jelentő szabad változókat, sem tetszőleges tulajdonságot jelentő függvényváltozókat; ha ettől a megszorítástól elállunk, a definíciót úgy kell módosítanunk, hogy ezek helyébe is

⁴³ Formulán itt elegendő az (indexszel ellátott vagy a nélküli) $a, b, c, \dots x, y, z, \dots; f, g, h, \dots; F, G, H, \dots$ betűkből, zárjelekből, vesszőkből és a $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \mathbf{E}$ jelekből bizonyos könnyen megadható szabályok szerint felépített véges jelsorozatot érteni, tekintet nélkül arra, mit jelentenek e jelek s a formulák.

⁴⁴ Magától értetődik, hogy egy halmazelméleti fogalomnak egy másik fogalommal való egyenértékűségét nem is lehet halmazelméleti módszerek nélkül bebizonyítani.

szabad helyettesítenünk, csak az alapfogalmakat reprezentáló függvények helyébe nem.

Nevezzünk az $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n)$ axiómarendszerből való *levezetésnek* olyan véges formulasorozatot, amelynek minden tagja vagy $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$, vagy a logikai axiómák egyike, vagy pedig a sorozat előző tagjaiból a következtetési szabályok egyikével keletkezik; akkor még úgy is kimondhatjuk az előbbi definíciót, hogy a \mathfrak{B} formula *következménye* az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ axiómáknak, ha van a belőlük álló axiómarendszerben olyan levezetés, amelynek \mathfrak{B} a végformulája. A levezetés formuláit lineáris elrendezés helyett sokszor célszerűbb egy (faalakú, véges) gráf szögpontjaihoz írni, úgyhogy ennek élei mutassák, hogy a kérdéses formula mely formulákból keletkezett a következtetési szabályok valamelyikével.⁴⁵ Pl. a $0''' \neq 0'$ formula (egyik) levezetése az első négy PEANO-féle axiómából álló axiómarendszerben a következő:

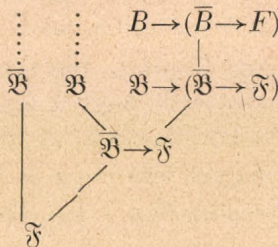


Feltűnő, hogy a (3), (4), (5), (6) formulákra itt nem volt szükség, csak az $\bar{A} \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow \bar{B})$ elemi logikai identitásra. Ez annak felel meg, hogy $0''' \neq 0'$ (azaz $3 \neq 1$) nagyon egyszerű következménye a PEANO-féle axiómáknak. A már említett $0' \neq 0'''$ formula levezetéséhez már a (6) formula is szükséges (ebből ugyanis mindenekelőtt az $a = b \rightarrow b = a$ formulát kell levezetnünk);

⁴⁵ A gráf-terminológia nagyon alkalmas a bizonyításelmélet sokszor bonyolult megfontolásainak szemléltetésére s ezzel érthetőbbé tételére. Maga HILBERT is alkalmaz hasonló geometriai terminológiát, amennyiben levezetés-ábráról, levezetés-fonalakról stb. beszél.

komplikáltabb aritmetikai tételek levezetéséhez a (3), (4), (5) formulákra, valamint quantorkövetkeztetésre is (és természetesen a teljes indukció axiómájára, továbbá a 47. lábjegyzetben szereplő axiómákra is) szükség van.

Mármost egy axiómarendszert akkor mondunk *ellentmondásosnak*, ha van olyan \mathfrak{B} formula, hogy \mathfrak{B} is, $\overline{\mathfrak{B}}$ is levezethető a mondott értelemben a kérdéses axiómarendszerben. Ekkor bármely \mathfrak{F} formula levezethető; ugyanis \mathfrak{B} és $\overline{\mathfrak{B}}$ levezetéséből és a $B \rightarrow (\overline{B} \rightarrow F)$ elemi logikai identitásból az oldalt látható vázlat szerint (egy helyettesítéssel és két leválasztással) \mathfrak{F} levezetéséhez juthatunk. Eszerint valamely axiómarendszer ellentmondásnélküliségének bebizonyításához elegendő *egy* olyan \mathfrak{B} formulát találnunk, amelyről meg tudjuk mutatni, hogy nem lehet levezetés végformulája.⁴⁶ Pl. a természetes számok aritmetikájának axiómarendszere⁴⁷ esetén a $0 \neq 0$ formulát választhatjuk \mathfrak{B} gyanánt.



⁴⁶ Ez a körülmény lényeges egyszerűsítést jelent az ellentmondásnélküliség vizsgálatában; végeredményben annak köszönhetjük, hogy az implikációt úgy definiáltuk, hogy $\downarrow \rightarrow \uparrow = \uparrow$.

⁴⁷ A természetes számok aritmetikájának felépítéséhez alkalmas axiómarendszernek a fentebb felsorolt PEANO-féle axiómákon kívül még tartalmaznia kell az összeadás és szorzás, esetleg más rekurzív függvények definíciójául szolgáló rekurziós formulákat is. Ezek az összeadásra és a szorzásra nézve a következők:

$$a + 0 = a,$$

$$a + b' = (a + b)';$$

$$a \cdot 0 = 0,$$

$$a \cdot b' = a \cdot b + a.$$

PEANO ezeket a formulákat használta az aritmetika felépítéséhez, de nem tekintette őket axiómáknak, hanem evidensnek vette, hogy van olyan $x + y$, ill. $x \cdot y$ függvény, amely teljesíti őket. Ezt a tényt — a bővített függvénykalkulus alkalmazása mellett — valóban be is lehet bizonyítani a PEANO-féle axiómák alapján (I. R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen* (Braunschweig, 1888; *Gesammelte Math. Werke*, 3. kötet, Braunschweig, 1932, 335—391. oldal, különösen 361—372. oldal); E. LANDAU, *Grundlagen der Analysis* (Leipzig, 1930), 4—5. és

A bizonyításelmélet HILBERT által megfogalmazott célkitűzése: mindenekelőtt az eddig létrejött matematikai diszciplínák (aritmetika, analízis, geometria, halmazelmélet stb.) axiómarendszerének ellentmondásnélküliségét bebizonyítani; majd valahányszor a matematikának újabb ága keletkezik, azt is axiomatizálni és ellentmondásnélküliségét bebizonyítani. Foglalkozik a bizonyításelmélet emellett még a kérdéses axiómarendszerekkel kapcsolatos egyéb, a levezetés fent megadott fogalma segítségével ugyancsak megfogalmazható kérdésekkel, mint pl. az axiómarendszer függetlenségének és teljességének kérdésével is.

4. Az ellentmondásnélküliség bizonyítására szolgáló módszerek.

A legrégebbi módszer, amellyel ellentmondásnélküliséget bizonyítottak, a *modell-módszer* vagy *szótár-módszer*. Ez abban áll, hogy mindenekelőtt megadunk egy megfelelezést, «szótárt», amely a vizsgált **A** axiómarendszernek minden alapfogalmához hozzárendeli egy másik **B** axiómarendszer egy-egy (alap- vagy definiált⁴⁸) fogalmát; természetesen ugyanolyan természetűt, azaz logikai függvényhez ugyanannyi szabad változót tartalmazó formulát, matematikai függvényhez ugyanannyi változót tartalmazó kifejezést. E megfelelezés segítségével az **A** axiómarendszer minden formulájához hozzárendelhetjük a **B** rendszer egy formuláját; olyan formulák, amelyekben az alapfogalmak nem szerepelnek, pl. a logikai axiómák, önmagukba mennek át. Legyenek az **A** rendszer $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ axiómáinak megfelelő formulák $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$.

14—15. oldal); hasonlóan be lehet bizonyítani a rekurzív definíció lehetőségét, a szűkebb függvénykalkulus alapulvétele mellett is, a PEANO-féle axiómarendszer olyan bővítésében, amelyben az aritmetikai függvények is az alapulvett individuumtartományhoz tartoznak és megfelelő axiómák állnak rendelkezésre ezek képezéséről. Magában a fent megfogalmazott PEANO-féle axiómarendszerben ki sem tudunk fejezni olyan tételt, hogy van olyan függvény, amelynek egy bizonyos tulajdonsága van.

⁴⁸ Az alapfogalmaknak matematikai vagy logikai függvények felelnek meg a formalizálásnál; a definiált fogalmaknak pedig ezekből összetett kifejezések vagy formulák.

Tegyük fel, hogy a $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ formulák mind következményei **B** axiómáinak. Akkor bármely, **A** axiómáiból kiinduló levezetésből kaphatunk egy **B**-beli levezetést a következő eljárással. Mindenekelőtt az adott levezetés minden egyes formuláját pótoljuk a **B** rendszer megfelelő formulájával; azután az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ -ből keletkezett $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ «föle» írjuk ezek levezetését. Ily módon valóban levezetést kapunk, mert, mint megjegyeztük, a logikai axiómák önmagukba mennek át s, mint könnyen belátható, ha bizonyos formulákból egy újabb formula a következtetési szabályok egyikével adódik, ugyanez áll megfelelőikre is. A kapott levezetés végformulája az eredeti levezetésének megfelelője.

Ha mármost feltesszük, hogy **B** ellentmondásnélküli, akkor adódik, hogy **A** is az. Mert ha volna két **A**-beli levezetés, amelynek végformulája \mathfrak{F} , ill. $\overline{\mathfrak{F}}$, akkor belőlük a mondott eljárással oly két **B**-beli levezetés keletkeznék, amelyeknek végformulája \mathfrak{G} , ill. $\overline{\mathfrak{G}}$, ahol \mathfrak{G} az \mathfrak{F} megfelelője.

A leírt módszerről azt is szokás mondani, hogy a **B** rendszerben *modellt* konstruáltunk az **A** rendszer számára. Ilyen eljárást már BOLYAI JÁNOS alkalmazott, amikor az euklidesi párhuzamosság axiómája tagadásával keletkező geometriai rendszerében modellt konstruált az euklidesi geometria részére, pontnak pontot, egyenesnek paraciklust, síknak paraszférát feleltetvén meg. Célja ezzel nem ellentmondásnélküliség bizonyítása, hanem a BOLYAI-geometriának az euklidesi geometria tételei segítségével való gyorsabb felépítése volt; nem is volna nagyon érdekes az az eredmény, amit e módszer az ellentmondásnélküliség kérdésében adna, t. i. az, hogy ha a BOLYAI-féle geometria ellentmondásnélküli, akkor az euklidesi is az. Sokkal fontosabb tény ennek megfordítása, t. i. ha az euklidesi geometria ellentmondásnélküli, akkor a BOLYAI-féle is az. Erről a tényről BOLYAI is meg volt győződve és ezt Appendixe címében is kifejezte; bebizonyítása a BOLYAI-geometriának az euklidesi geometriában konstruált CAYLEY—KLEIN-féle modelljével adható.⁴⁹ Ez a modell, ha egyszerűség kedvéért a sík-

⁴⁹ A. CAYLEY, A Sixth Memoir upon Quantics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **149** (1859), 61—90. oldal (*Collected*

geometriára szorítkozunk, pontnak egy kör belsejében fekvő pontot, egyenesnek e kör húrját felelteti meg; a közöttfekvés fogalma önmagába megy át, az AB és CD szakaszok egybevágósága pedig az $UABU'$ és $VCDV'$ pontnégyesek projektív vonatkozásába, ahol U , U' és V , V' a megfelelő hűrok végpontjai. E megfelekezés az euklidesi geometria axiómáit, a párhuzamosság axiómájának kivételével, az euklidesi geometria tételeibe viszi át. E szerint a párhuzamosság axiómája nem bizonyítható be az euklidesi geometria többi axiómája alapján, feltéve, hogy azok ellentmondás nélküli axiómarendszert alkotnak.

A modell-módszerrel sikerült HILBERTnek az euklidesi geometria ellentmondás nélkülségét a valós számok aritmetikájára visszavezetni; az alkalmazott megfelekezés az, amellyel az analitikus geometria feleltet meg geometriai fogalmaknak aritmetikaiakat. Ha a folytonosság axiómáját elhagyjuk és bizonyos, körök és egyenesek metszéspontjának létezésére vonatkozó axiómákkal pótoljuk,⁵⁰ akkor ugyane módszerrel visszavezethetjük a geometria ellentmondás nélkülségét az algebrai számok aritmetikájának egy bizonyos axiómarendszerére. Viszont ugyancsak e módszerrel sikerül a racionális s az algebrai számok aritmetikájának ellentmondás nélkülségét a természetes számok aritmetikájára visszavezetni; az ehhez szükséges megfelekezés arra emlékeztet, amelynek segítségével a racionális s az algebrai számok halmazának megszámlálhatóságát szokás bebizonyítani.⁵¹ Hasonló, a halmazelmélet-

Math. Papers, 2, Cambridge, 1889, 561—592. oldal és KÁRMÁN FERENC magyar fordításában: Az algebrai alakokról, hatodik értekezés, *Math. és Phys. Lapok*, 6 (1897), 195—242. oldal); F. KLEIN, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen*, 4 (1871), 573—625. oldal. L. még HILBERTnek a 8. lábjegyzetben idézett műve 38. oldalát.

⁵⁰ L. KERÉKJÁRTÓ, 8. lábjegyzetben idézett mű, 145. oldal. EUKLIDES sohasem használta a folytonosság axiómáját, hanem a kérdéses metszéspontok létezését evidensnek vette. A szó szoros értelmében vett *elemi* geometriai tételek bizonyításához nincs szükség a folytonosság axiómájára, mindenütt lehet pótolni hasonló jellegű egyszerűbb axiómával.

⁵¹ Itt azonban sokkal egyszerűbb megfelekezésről van szó, mint a kérdéses halmazelméleti tételnél; mert itt csak a véges számú alapfogalomnak kell egy-egy fogalmat megfeleltetnünk. Pl. az összeadásnak,

ből ismert megfeleltetés segítségével, visszavezethetjük az analízis axiómarendszere egy töredékének ellentmondásnélküliségét a valós számok aritmetikájáéra; ez a töredék elegendő az ú. n. klasszikus analízisnek felépítéséhez, amely magában foglalja a komplex változós függvénytant s a folytonos függvények elméletét, csupán a valós függvénytannak patológikus függvényekkel foglalkozó ágát nem.

A modell-módszer egyik legutóbbi és talán legmélyebb alkalmazását GÖDEL adta, megmutatván, hogy ha a halmazelmélet axiómarendszere ellentmondásnélküli, akkor nem lehet benne megcáfolni a CANTOR-féle $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ kontinuum-hipotézist.⁵² E célból a ZERMELO—FRAENKEL-féle axiómarendszeren belül adott olyan modellt, amelyben a halmazelmélet axiómáin kívül a CANTOR-féle hipotézis, sőt ennek $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ általánosítása is, bebizonyítható tételek. E modell abban áll, hogy a «halmaz» fogalmának a «logikailag jellemezhető halmaz» fogalmát felelteti meg; a tartalmazás relációja önmagába megy át. A logikailag jellemezhető halmaz fogalmához a következőképpen jutunk. Egy M halmaz valamely N részhalmazát akkor nevezzük «közvetlenül jellemezhetőnek», ha van olyan, szabad és kötött változókából, az azonosság $a=b$ és a tartalmazás \in relációjából az elemi logika műveleteivel és quantorokkal felírható $\mathfrak{R}(u; a_1, a_2, \dots, a_n)$ formula és M -nek olyan m_1, m_2, \dots, m_n elemei, hogy M valamely u eleme akkor és csak akkor eleme \mathfrak{R} -nek, ha $\mathfrak{R}(u; m_1, m_2, \dots, m_n) = \uparrow$. Pl. minden véges $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ részhalmaz közvetlenül jellemezhető: \mathfrak{R} -et elegendő $u = a_1 \vee \vee u = a_2 \vee \dots \vee u = a_n$ -nek választani; de maga M is közvetlenül jellemezhető részhalmaza magának: \mathfrak{R} legyen $u = u$ ($n=0$). Mármost legyen M_0 a $\{0\}$ halmaz, s ha M_β a $\beta < \alpha$ rendszámokra már értelmezve van, M_α az $M_{\alpha-1}$ közvetlenül jellemezhető részhal-

amely az algebrai számok axiómarendszerében alapfogalom, egy pusztán számelméleti eszközökkel definiált $\sigma(x, y)$ függvény felel meg, amely egyébként az $a_i + a_j = a_{\sigma(i,j)}$ tulajdonsággal bír, ahol a_n az algebrai számok egy bizonyos megszámlálásánál az n -edik algebrai szám.

⁵² K. GÖDEL, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis, *Proceedings of the National Academy Washington*, **24** (1938), 556—557; Consistency-Proof for the Generalized Continuum-Hypothesis, *ugyanott*, **25** (1939), 220—224. oldal.

mazainak halmaza, ill. az összes M_β -k ($\beta < \alpha$) egyesítési halmaza a szerint, hogy α elsőfajú szám-e, vagy limesszám. Logikailag jellemezhető egy halmaz, ha valamelyik M_α -nak eleme. Ez a fogalom felírható a halmazelmélet alapfogalmai segítségével; hiszen a logikai műveletek és a quantorok is definiálhatók ezekkel. GÖDEL a ZERMELO—FRAENKEL-féle axiómák segítségével (a kiválasztási axiómát fel sem használva) megmutatja, hogy ha «halmaz» helyébe «logikailag jellemezhető halmaz»-t teszünk, valamennyi ZERMELO—FRAENKEL-féle axióma, a kiválasztási axiómát is beleértve, bebizonyítható tételbe megy át, de ráadásul még az általánosított CANTOR-féle sejtés is (pl. a ZERMELO-féle $Z = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \dots\}$ megszámlálható halmaz azon részhalmazait, amelyek logikailag jellemezhetők, sikerül effektíve, \mathcal{Q} típusban jólrendeznie). A helyzet itt az, hogy a ZERMELO—FRAENKEL-féle axiómarendszer nem határozza meg eléggé a halmaz fogalmát, egy bizonyos tágasságot hagy számára; GÖDEL azt mutatta meg, hogy ha e fogalmon az axiómák által megengedett legszűkebb fogalmat, logikailag jellemezhető halmazt, értünk, akkor *igaz* a jólrendezési tétel is (a logikailag jellemezhető halmazokat sikerül valóban jólrendezni) és az általánosított CANTOR-féle sejtés is.

A modell-módszer mindig csak *relatív* ellentmondásnélküliség-bizonyításra használható; azaz mindig csak olyan eredményre vezet, hogy egy **A** axiómarendszer ellentmondásnélküli, ha egy bizonyos másik **B** axiómarendszer az. *Abszolút* ellentmondásnélküliség-bizonyításhoz más módszerekre van szükség.

A legegyszerűbb ilyen módszerre rávezet bennünket a következő heurisztikus meggondolás, amelyet gyakran hoznak fel egy-egy diszciplína ellentmondásnélküliségének igazolására. Az axiómák igazak; igaz tételekből csak igaz következhetik; tehát minden bebizonyítható tétel igaz; márpedig két egymásnak ellentmondó állítás közül az egyik hamis. A hiba ebben a meggondolásban ott van, hogy valamely matematikai diszciplína ítéleteinek igaz vagy hamis voltát épp a kérdéses diszciplína axiómarendszere segítségével definiáljuk; igaz egy ítélet, ha levezethető, hamis, ha megcáfolható, azaz, ha tagadása vezethető le. A fenti meggondolásban

felhasználtuk, hogy egy ítélet nem lehet igaz is, hamis is; ez pedig épp az axiómarendszer ellentmondásnélkülisége.

Megeshetik azonban, hogy sikerül valahogyan (a levezethetőség fogalmától függetlenül) hozzárendelni egy axiomatizált diszciplína formuláihoz az \uparrow és \downarrow logikai értékeket úgy, hogy 1. ha egy \mathfrak{F} formulához az \uparrow -at rendeltük, akkor a \downarrow -at nem rendeltük hozzá; 2. ha \mathfrak{F} -hez az \uparrow -at rendeltük, akkor az $\overline{\mathfrak{F}}$ -hoz a \downarrow -at rendeltük; 3. az axiómákhoz az \uparrow -at rendeltük; 4. ha bizonyos formulákhoz az \uparrow -at rendeltük s egy további formula a következő szabályok egyikével keletkezik belőlük, akkor ehhez is az \uparrow -at rendeltük. Ez esetben a fenti meggondolás alkalmas az axiómarendszer ellentmondásnélküliségének bebizonyítására. Ez az ú. n. *értékelési módszer* KÖNIG GYULÁtól származik.⁵³ Bár az az axiómarendszer, amelyre alkalmazta, csak az aritmetika egy töredékének felépítésére alkalmas (quantorok nem állnak benne rendelkezésre), mégis nagyjelentőségű, hogy ezzel, HILBERTet megelőzve, az első abszolút ellentmondásnélküliség-bizonyításhoz jutott.

Olyan axiómarendszerre, amelyben általános és egzisztenciális ítéletek szabadon kombinálva kifejezhetők quantorok segítségével, HERBRAND és PRESBURGER⁵⁴ adaptálták az értékelési módszert. Ilyen axiómarendszerek esetén a logikai értékeknek formulákhoz való hozzárendelése két lépésben történik; először minden quantort tartalmazó formulához hozzárendelünk egy quantornélkülit, mintegy «kiintegrálva» a benne szereplő quantorokat; azután a quantornélküli formulákhoz rendelünk logikai értékeket. Ezt a *kiintegrálási módszert* PRESBURGER arra az axiómarendszerre alkalmazta, amely a PEANO-féle axiómákból úgy keletkezik, hogy

⁵³ J. KÖNIG, *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre* (Leipzig, 1914), 110—122. és 181—184. oldal.

⁵⁴ J. HERBRAND, *Recherches sur la théorie de la démonstration, Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, No. 33* (1930), különösen Chapitre IV; M. PRESBURGER, *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt, Comptes rendus du I. Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves*, 1929 (1930), 92—101. oldal.

az összeadás rekurzív definícióját hozzájuk csatoljuk, de a szorzásét vagy komplikáltabb függvényekét nem; a kiintegrálást az teszi lehetővé, hogy e rendszer minden egzisztencia-problémája úgy fejezhető ki, hogy van-e egy numerikusan adott együtthatókkal bíró, lineáris egyenletekből, egyenlőtlenségekből és numerikusan adott modulusú lineáris kongruenciákból álló rendszernek megoldása; ennek szükséges és elegendő feltétele pedig «zárt alakban», azaz quantorok nélkül is felírható. Ha a szorzás rekurzív definícióját is hozzávesszük, akkor nem várható, hogy ilyen kiintegrálás lehetséges, mert akkor olyan formulákhoz is jutunk, amelyek mindmáig megoldatlan problémát fejeznek ki; pl. a GOLDBACH-féle sejtés a

$$(x) (Ey) (Ez) (x + x = y + z \ \& \ (u) (v) (y = uv \rightarrow (y = u \vee y = v)) \ \& \ (u) (v) (z = uv \rightarrow (z = u \vee z = v)))$$

formula \uparrow értékűségét mondja ki. Sőt, mint GÖDEL megmutatta,⁵⁵ minden, akármilyen komplikált rekurzív függvények segítségével fogalmazható probléma kifejezhető pusztán összeadással és szorzással.

A quantorokat mindig pótolhatjuk a HILBERT-féle ε -szimbolummal. Ezt HILBERT az egyetlen

$$F(a) \rightarrow F(\varepsilon_x F(x)) \quad (9)$$

axiómával jellemzi, amiből látszik, hogy $\varepsilon_x F(x)$ csak annyiban van meghatározva, hogy ha van egyáltalában olyan a elem, amelyre $F(a) = \uparrow$, $\varepsilon_x F(x)$ az ilyen elemek egyikét jelenti, egyébként határozatlan; ha nincs ilyen a elem, akkor $\varepsilon_x F(x)$ teljesen határozatlan. Világos az ε -szimbolumnak a kiválasztási axiómával való kapcsolata: ha azon x -ek halmaza, amelyekre $F(x) = \uparrow$, nem üres, $\varepsilon_x F(x)$ e halmaznak, ha pedig üres, az egész individuumtartománynak «kitüntetett elemét» jelenti. Az ε -szimbolum segítségével a quantorok definiálhatók: $(Ex)F(x)$ definíciója $F(\varepsilon_x F(x))$, $(x)F(x)$ -é pedig $F(\varepsilon_x \bar{F}(x))$. E definíciót alkalmazva a (4) axióma a (9) axiómával azonos, a (3) pedig belőle elemi logikai identitás segítségével,

⁵⁵ K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **38** (1931), 173—198. oldal, különösen Satz VII, 191—193. oldal.

helyettesítéssel és leválasztással adódik; azonkívül a quantorkövetkeztetések is visszavezethetők a (9) axióma segítségével helyettesítésekre és leválasztásokra. Így az ε -szimbolum lényegesen egyszerűsíti az axiomatikus apparátust; azonban magát a nehézséget nem szünteti meg; az ε -t tartalmazó formulák értékelésére előbb az ε -okat kell eliminálnunk belőlük, ami szintén csak nagyon egyszerű axiómarendszerek esetén sikerül.

Az értékelési módszer fontos módosítását fogalmazta meg NEUMANN JÁNOS, felhasználva bizonyos, HILBERTTŐL származó gondolatokat.⁵⁶ NEUMANN megjegyzése szerint nem szükséges egy fix értékelést (logikai értékek hozzárendelését) meghatározni az összes formulák számára; elegendő egy olyan utasítást megadnunk, amely, valahányszor adva van egy levezetés, az abban szereplő formulákhoz rendeli hozzá egyértelműen a logikai értékek egyikét; hogy melyiket, az függhet a formulán kívül a kérdéses levezetéstől is. Ha a hozzárendelés olyan, hogy a fenti 1., 3. és 4. feltételek egy-egy levezetésen belül teljesülnek, továbbá egy \mathfrak{F} & $\overline{\mathfrak{F}}$ alakú formulához mindig a \downarrow értéket rendeljük (ha ugyan egyáltalában szerepel levezetés formulájaként; épp azt akarjuk megmutatni, hogy nem szerepelhet), akkor adódik, hogy az ilyen alakú formulák nem vezethetők le, tehát a rendszer ellentmondás nélküli. Ha az értékelést kiintegráláson, ill. az ε -szimbolum eliminálásán át adjuk meg (HILBERTNÉL ez utóbbi formában szerepel a módszer), akkor a kiintegrálás, ill. eliminálás módja függhet attól a levezetéstől, amelyben a kiintegrálandó, ill. ε -t tartalmazó formula szerepel.

Az így módosított értékelési módszerrel NEUMANN⁵⁶ és ACKERMANN,⁵⁷ majd annak továbbfejlesztésével HERBRAND,⁵⁸ olyan axiómarendszerek ellentmondásnéküliségét mutatták meg, ame-

⁵⁶ L. a 16. lábjegyzetben idézett munkát.

⁵⁷ W. ACKERMANN, Begründung des «tertium non datur» mittels der HILBERTSchen Theorie der Widerspruchsfreiheit, *Math. Annalen*, **93** (1925), 1—36. oldal.

⁵⁸ L. az 54. lábjegyzetben idézett munkát; továbbá: J. HERBRAND, Sur la non-contradiction de l'arithmétique, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **166** (1932), 1—8. oldal.

lyek a PEANO-féle axiómarendszerből rekurzív definíciók hozzávételével, de a teljes indukció axiómájának megszüktetésével keletkeznek; pl. HERBRANDnál akármilyen komplikált rekurzív definíciók meg vannak engedve, de a teljes indukció axiómájának F függvényváltozója helyébe csak olyan formulát szabad helyettesíteni, amely nem tartalmaz quantort. Ez az axiómarendszer practice elegendő a számelmélet felépítéséhez; hiszen az általános quantort szabad változók használatával pótolhatjuk, az egzisztenciális quantort pedig többnyire sikerül azáltal elkerülnünk, hogy azt a számot, amelynek létezését állítjuk, effektíve megadjuk rekurzíve definiált függvények segítségével; pl. azt a tételt, hogy végtelen sok primszám van, a helyett, hogy úgy fejeznők ki, hogy tetszőleges n -hez van n -nél nagyobb primszám, úgy fogalmazzuk, hogy $n!+1$ legkisebb 1-nél nagyobb osztója⁵⁹ n -nél nagyobb primszám. Kétségtelen, hogy ez az eljárás lényegesen komplikálja a számelmélet felépítését és az sem eleve evidens, hogy minden tételt át lehet így fogalmazni. Ezért kívánatos volt, HERBRAND eredménye után is, minden megszorítás nélkül megmutatni a természetes számok aritmetikájának ellentmondásnélküliségét.

Ezt a feladatot GENTZEN oldotta meg.⁶⁰ GENTZEN a levezetés egy másik, a köznapi nyelven kifejezett következtetésmódokhoz jobban símuló definíciójából indul ki, azonban át lehet alakítani meggondolását úgy, hogy a régi definíciót vesszük alapul;⁶¹

⁵⁹ Valamely a szám legkisebb 1-nél nagyobb osztója a -nak rekurzióval definiálható függvénye.

⁶⁰ G. GENTZEN, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Math. Annalen*, **112** (1936), 493—565. oldal; Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, Neue Folge, **4** (1938), 19—44. oldal.

⁶¹ A GENTZEN-féle bizonyításnak egy ilyen átalakítása szerepel egy rövidesen közlendő dolgozatomban. Legutóbb, a GENTZEN-féle bizonyítás egyik lényeges gondolatát átvéve, ACKERMANN a régi (a mindenkori levezetéstől függő) értékelési módszerrel is bebizonyította a természetes számok aritmetikájának ellentmondásnélküliségét; I. W. ACKERMANN, Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, *Math. Annalen*, **117** (1940), 162—194. oldal.

ezáltal egyszerűbb is lesz és a régebbi ellentmondásnélküliség-bizonyításokhoz való viszonya is világosabban kitűnik. A továbbiakban, amikor GENTZEN ellentmondásnélküliség-bizonyításáról referálok, egy ilyen átalakítására gondolok.

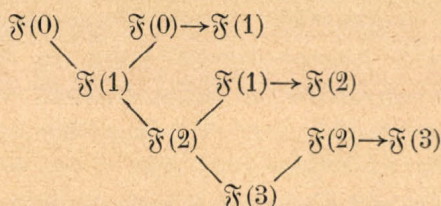
GENTZEN módszere egy speciális levezetés-transzformáción alapul. Levezetésnek más levezetéssé való átalakítása szerepel az ellentmondásnélküliség bizonyításának régebbi módszereinél is. A modell-módszer is ilyen transzformáción alapul; de míg ott egy **A** axiómarendszerhez tartozó levezetést egy másik **B** axiómarendszerhez tartozó levezetésbe transzformáltunk, itt a transzformált levezetés is ugyanahhoz az axiómarendszerhez tartozik, mint az eredeti. Előkészítő lépésként szerepelnek ilyen értelemben vett transzformációk az értékelési módszernél is; ott célszerű a levezetést, az értékelés megadása előtt, úgy átalakítani, hogy valamennyi szükséges helyettesítést mindjárt az axiómákon elvégezzük és az így keletkezett formulákból pusztán a többi következtetési szabály segítségével jutunk el a végformulához.

Mármost közelfekvő az a gondolat, hogy axiómarendszerünk ellentmondásnélküliségét egy olyan levezetés-transzformáció megadásával mutassuk meg, amely minden levezetéshez, hacsak az nem nagyon egyszerű, egy ugyanazon végformulával bír, de bizonyos szempontból egyszerűbb levezetést rendel. Az egyszerűsítés például abban állhatna, hogy a levezetésben szereplő quantorok számát vagy az alkalmazott teljes indukciók számát csökkentjük. Hiszen abban az esetben, ha egy quantor sem szerepel a levezetésben, vagy ha egy teljes indukciót sem alkalmazunk benne, KÖNIG GYULA, ill. ACKERMANN és NEUMANN JÁNOS már említett módszerei elintézik az ellentmondásnélküliség kérdését.

Nem várhatjuk, hogy bármely formula levezetését sikerül ilyen értelemben egyszerűsíteni; azonban az ellentmondásnélküliség szempontjából elegendő olyan levezetésekre szorítkoznunk, amelyek végformulája numerikus, azaz sem kötött, sem szabad változót nem tartalmaz; hiszen elegendő azt megmutatnunk, hogy egy speciális *numerikus* formula, pl. $0 \neq 0$, nem lehet levezetés végformulája. Ilyen numerikus végformulájú leveze-

tések esetében a következő két egyszerűsítési lehetőségre gondolhatunk.

Ha az utolsó, a levezetésben alkalmazott «lényeges» következtetés egy teljes indukció alkalmazása⁶² volt, akkor a teljes indukcióval bebizonyított $\mathfrak{F}(n)$ tételnek tulajdonképpen csak egy numerikus speciális esetére, pl. $\mathfrak{F}(3)$ -ra van szükségünk. Egy ilyen speciális eset azonban *teljes indukció nélkül* is adódik a teljes indukció premisszáiként szereplő $\mathfrak{F}(0)$ és $\mathfrak{F}(n) \rightarrow \mathfrak{F}(n')$ formulákból, pl. $\mathfrak{F}(3)$ a következő séma szerint:



(ez az a mód, amivel a teljes indukció jogosultságát heurisztikusan szoktuk igazolni).

Ha az utolsó «lényeges» következtetés egy quantorkövetkeztetés volt, pl. $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}(a)$ -ról következtettünk $\mathfrak{F} \rightarrow (x)\mathfrak{G}(x)$ -re, s ugyanez a $(x)\mathfrak{G}(x)$ szerepel a levezetésben, a végformulától «lényeges» következtetéssel el nem választva, a $(x)\mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{G}(a)$ logikai axióma (pontosabban: logikai axiómából helyettesítéssel keletkező formula) kapcsán, akkor az eredeti levezetés helyett két egyszerűbb részlevezetést végezhetünk, két esetet különböztetvén meg a szerint, hogy $\mathfrak{G}(a)$ igaz-e, vagy hamis; az első esetben a $(x)\mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{G}(a)$ logikai axiómát lehet megtakarítani, a második esetben pedig a quantorkövetkeztetést.⁶³

⁶² A GENTZEN-féle bizonyítás szempontjából célszerű a teljes indukciót nem (függvényváltozót tartalmazó) axiómának, hanem a logikaiaktól különböző «aritmetikai» következtetési szabálynak tekinteni, amely az $\mathfrak{F}(0)$ és $\mathfrak{F}(n) \rightarrow \mathfrak{F}(n')$ formulákból az $\mathfrak{F}(n)$ formulához vezet (n szabad változó). Ez a teljes indukciós következtetési szabály egyenértékű a teljes indukció axiómájával; l. pl. HILBERT—BERNAYS, a 19. lábjegyzetben idézett mű, 265—267. oldal.

⁶³ Formálisan úgy történik a két eset megkülönböztetése, hogy az egyik részlevezetésben $\mathfrak{G}(a)$ -t, a másikban $\overline{\mathfrak{G}(a)}$ -t írjuk a levezetés for-

Mindkét egyszerűsítő transzformáció szerepelt már HILBERT göttingai előadásában (az utóbbi kissé más formában, quantor helyett az ε -szimbolumra vonatkozólag); azonban csak eléggé egyszerű levezetések esetén látszik azonnal, hogy célravezetnek, azaz a levezetést még tovább egyszerűsítik. Hiszen ha például az első transzformációnál $\mathfrak{F}(n) \rightarrow \mathfrak{F}(n')$ -t eredetileg teljes indukciók sorozatával vezettük le, akkor a teljes indukciók száma megháromszorozódik,⁶⁴ mert a transzformáció után $\mathfrak{F}(0) \rightarrow \mathfrak{F}(1)$ -et, $\mathfrak{F}(1) \rightarrow \mathfrak{F}(2)$ -t és $\mathfrak{F}(2) \rightarrow \mathfrak{F}(3)$ -at külön-külön le kell vezetnünk; hasonlóan megháromszorozódik az $\mathfrak{F}(n) \rightarrow \mathfrak{F}(n')$ levezetésében szereplő quantorok száma is. A másik transzformációnál pedig egy komplikáltabb levezetésből két egyszerűbb levezetést hoztunk létre, tehát a szemügyre vett quantorkövetkeztetést «megelőző» lényeges következtetések számát megkétszereztük. Igaz ugyan, hogy a transzformáció után *ugyanazt* a lényeges következtetést kell végeznünk többször, ez azonban nem változtat azon, hogy az «egyszerűsödés» nem mérhető a levezetésben szereplő lényeges következtetések számának csökkenésével.

GENTZEN lényegesen új ideája, hogy a levezetések komplikáltságát nem a bennük szereplő teljes indukciók és quantorkövetkeztetések *számával* méri, egyáltalában nem véges természetes számmal, hanem egy *transzfinit rendszámmal*, amely a levezetésben szereplő következtetések összekapcsolódásának módjától is függ.

mulái elé implikációs előtagként. Könnyű helyreállítani e változtatás után a levezetés-jelleget. A levezetés valamely alkalmas későbbi helyén egyesítjük a két részlevezetést, amennyiben a $\mathfrak{G}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{H}$ és $\mathfrak{G}(\alpha') \rightarrow \mathfrak{H}$ alakú formulákból és a $(G \rightarrow H) \rightarrow ((\overline{G} \rightarrow H) \rightarrow H)$ elemi logikai identitásból helyettesítés és két leválasztás segítségével eljuthatunk az eredeti levezetésben szereplő \mathfrak{H} formulához. A $\mathfrak{G}(\alpha)$ implikációs előtag alkalmazásával keletkező részlevezetésben az eredeti $(x)\mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{G}(\alpha)$ logikai axióma szerepét a $\mathfrak{G}(\alpha) \rightarrow ((x)\mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{G}(\alpha))$ formula veszi át; ez az $F \rightarrow (G \rightarrow F)$ identitásból keletkezik helyettesítéssel. A másik részlevezetésben a quantorkövetkeztetést azáltal takaríthatjuk meg, hogy $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}(\alpha)$ -ból helyettesítéssel $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}(\alpha)$ -t kapjuk, ebből s az $(F \rightarrow G) \rightarrow ((G \rightarrow (F \rightarrow H)) \rightarrow H)$ identitásból helyettesítéssel és leválasztással megkaphatjuk $\mathfrak{G}(\alpha) \rightarrow (\mathfrak{F} \rightarrow (x)\mathfrak{G}(x))$ -et.

⁶⁴ Ha $\mathfrak{F}(3)$ helyett $\mathfrak{F}(100)$ -ra volna szükségünk, megszázsorozódna.

Ez a transzfinit szám effektíve felírható, mielőtt a levezetés fel van írva; mindig kisebb, mint az első $\epsilon_0 = \omega^{\omega}$ epszilon-szám. GENTZEN megmutatja, hogy minden numerikus végformulájú levezetés vagy egyszerűsíthető a helyettesítéseknek a levezetés elejére való áthelyezése, majd az előbb említett két transzformáció egyikének alkalmazásával, abban az értelemben, hogy a kérdéses transzformáció csökkenti a komplikáltságot kifejező rendszámot; vagy pedig, ha e transzformációk nem alkalmazhatók a levezetés egyszerűsítésére (pl. ha a levezetés komplikáltsági foka már 0), akkor az értékelési módszerrel direkt meg lehet mutatni, hogy végformulája nem lehet $0 \neq 0$ (vagy más hamis numerikus formula). Minthogy rendszámok csökkenő sorozata csak véges számú tagból állhat, e transzformációk iterált alkalmazása után előbb-utóbb bekövetkezik az értékelési módszer alkalmazási lehetősége.

A GENTZEN-féle eredmény, figyelembevételével a modell-módszer nyújtotta eredményeket is, a természetes számok aritmetikája ellentmondásnélküliségén kívül szolgáltatja a racionális és az algebrai számok elméletének, továbbá a folytonossági axióma nélküli elemi geometriának ellentmondásnélküliségét is. Remélhető, hogy a módszer ki lehet terjesztetni az analízisre is; ez esetben az egyszerűsítés megmutatása feltétlenül sokkal bonyolultabb lesz (a második számosztály lényegesen magasabb rendszámáig kell elmenni) és nincs kizárva, hogy olyan bonyolult, hogy emberileg lehetetlen áttekinteni.

5. Az ellentmondásnélküliség bizonyításának jelentősége.

Sokszor kérdezik, hogy mi okunk van egy ilyen ellentmondásnélküliség-bizonyítás elfogadására. A legegyszerűbb válasz erre az, hogy ugyanaz az okunk, mint akármilyen más matematikai bizonyítás, mint például az algebra alaptétele, vagy a zárt görbékre vonatkozó JORDAN-féle tétel bizonyításának elfogadására. Ha a matematika más ágaiban nem vagyunk szkeptikusak, nincs okunk az aritmetika ellentmondásnélküliségében sem kételkednünk GENTZEN bizonyítása után.

A halmazelmélet antinómiái létrehoztak olyan kritikai irányokat

is, amelyek elsősorban az antinómiák elkerülésére, ezenfelül azonban az e közben felvetődött szempontok konzekvens keresztülviteleire is, azt kívánják, hogy bizonyos következtetési módokat kerüljünk el, még annak árán is, hogy ezáltal megcsonkítjuk a klasszikus matematikát. E kritikai irányokra való tekintettel fontos megjegyezni, hogy a bizonyításelmélet nyújtotta ellentmondásnélküliség-bizonyítások még a legradikálisabb ilyen kritikai iránynak, az ú. n. intuicionizmusnak tilalmait sem hágják át (míg pl. a JORDAN-tétel bizonyításai áthágják azokat).

A legtöbb matematikus azonban úgy gondolkodik ebben a kérdésben, hogy a matematika többi ágaiban nem tart ugyan helyénvalónak semmiféle kételkedést, azonban a bizonyításelméletet sokkal szkeptikusabban kezeli, mert ha már egyszer bebizonyítják neki valamely axiómarendszer ellentmondásnélküliségét, látni akarja, mennyiben jelent ez haladást, mennyiben ad olyasmit, amit eddig nem tudott. E tekintetben arra hivatkozhatunk, hogy az említett ellentmondásnélküliség-bizonyításokat úgy lehet megfogalmazni, hogy azok egy-egy módszert adnak nekünk, egy-egy képességet közölnek velünk, egy-egy eljárásra tanítanak bennünket, amelynek segítségével minden olyan állítólágos levezetéspárban, amelynek végformulái egymás negációi, meg tudunk jelölni egy hibát,⁶⁵ azaz egy olyan formulát, amely nem a megengedett következtetési szabályok egyikével adódott azokból a formulákból, amelyekből a levezetés-gráf szerint adódnia kellett volna, ill. amely nem azonos az axiómák egyikével sem. Ha valaki elolvasta és megértette pl. a GENTZEN-féle bizonyítást, akkor nemcsak azzal gazdagodott, hogy reprodukálni tudja, hanem azzal a biztonságérzettel is, hogy elsajátított egy ilyen hibamegtaláló eljárást az aritmetikára nézve. Tulajdonképpen minden ellentmondásnélküliség-bizonyítást ilyen eljárás megadásának alakjába kellene önteni; hogy ezt nem mindig teszik, annak pusztán az az oka, hogy ilyen alakban sokkal több helyet venne igénybe.

⁶⁵ Ha a nagy FERMAT-tétel állítólágos bizonyítását ellenőrizzük, az *első* hibát szoktuk megkeresni. Itt a dolog természetéből folyik, hogy az eljárás az *utolsó* hibát szolgáltatja; hiszen azt kell kihasználni, hogy a levezetések *végén* egymásnak ellentmondó formulák állnak.

Gyakran abban a formában is felvetik a kérdést, hogy egy-egy ellentmondásnélküliség-bizonyítás mit használ fel, mire hivatkozik. A válasz erre: csupa olyan képességet, amelyről mindenki érzi, hogy rendelkezik vele s amelyek egyébként mindenféle matematikai tevékenységhez szükségesek; mint például hogy egy adott, véges számú jelből álló sorozatban (pl. formulában) vagy meg tudom keresni az első olyan jelet, amely egy adott jellel megegyezik (pl. az első kezdőzárójelet), vagy konstatálni tudom, hogy egyáltalában nem fordul benne elő ilyen jel; hogy két ilyen jelsorozatról meg tudom állapítani, része-e egyik a másiknak; hogy egy adott ilyen jelsorozatban tudok valamely jel helyébe, mindenütt, ahol előfordul, egy másik adott jelet vagy jelsorozatot helyettesíteni stb. Ilyen egyszerű képességekre visszavezethetők komplikáltabb tevékenységek is, mint például adott rekurziós egyenletekkel definiált függvénynek numerikusan megadott helyhez tartozó értékének kiszámítása (pl. numerikusan megadott természetes számok összeadása, szorzása); azonban a visszavezetés megint csak meghosszabbítaná az ellentmondásnélküliség bizonyítását; helyette elegendő közvetlenül konstatálnunk, hogy a kérdéses komplikáltabb képességgel is rendelkezünk. Ezenkívül a modell-módszerrel végzett ellentmondásnélküliség-bizonyítások azt is felhasználják, hogy egy bizonyos másik **B** axiómarendszer már ellentmondásnélküli, pontosabban azt, hogy e másik axiómarendszerre nézve már rendelkezünk hibamegtaláló képességgel. A többi módszer nem használ fel ilyenszerű hipotézist; ezeknél tehát nincs értelme annak a kérdésnek, hogy ezek milyen axiómarendszer ellentmondásnélküliségét használják fel. Viszont nem szabad szem elől tévesztenünk azt, hogy a modell-módszer is felhasznál mászt is, mint a kérdéses másik **B** axiómarendszer ellentmondásnélküliségét; t. i. azt, hogy rendelkezünk a szótár segítségével való «defordítás» képességével. A többi módszernél elmarad valamely másik axiómarendszer ellentmondásnélküliségére való hivatkozás, viszont e helyett nagyobb mértékben kell felhasználnunk egyéb képességeink meglétét.

A felemlített ellentmondásnélküliség-bizonyítások közül a GEN-

TZEN-féle hivatkozik a legkomplikáltabb képességre, t. i. arra, hogy ha megértettünk egy eljárást, amely minden adott ε_0 alatti $\alpha > 0$ rendszámhoz egy kisebb β rendszámot rendel és konstatáltuk, hogy rendelkezünk azzal a képességgel, hogy ezt az eljárást adott α esetén mindig végre tudjuk hajtani, akkor adott α -ból kiindulva tudjuk addig iterálni ezt az eljárást, amíg 0-hoz nem jutunk. (A rendszámokat, valamely normálelőállításukat véve alapul, épp úgy véges jelsorozatoknak tekinthetjük, mint a formulákat; egyébként pótolhatnók őket természetes számokkal, csak a «kisebb» reláció helyébe kellene egy másik, tisztán számelméletileg definiálható relációt tennünk, amely a természetes számokat ε_0 típus szerint rendezzi.) Ezt a képességet is sikerül, habár komplikált módon, sokkal egyszerűbb képességekre visszavezetni, amelyekről érezzük, hogy rendelkezünk velük.

Más kérdés megint az, hogy milyen axiómarendszerben mondható el egy-egy ellentmondásnélküliség-bizonyítás. Ha a bizonyításelméletet axiomatizáljuk, elvesz az eredményeit meggyőzővé tevő képesség-fogalmazás; a felhasznált «alap-képességek» helyébe objektív formába öntött tételek jönnek, mint pl. ha valamely véges jelsorozatban előfordul egy jel, akkor van egy első hely, ahol előfordul; vagy hogy ε_0 -nál kisebb rendszámok esökkenő sorozata mindig véges. Mégis fontos módszer a bizonyításelmélet axiomatizálása olyan kérdések vizsgálatánál, hogy be lehet-e egy adott axiómarendszer ellentmondásnélküliségét bizonyítani adott módszerekkel. E téren GÖDEL nagyjelentőségű eredménye ⁶⁶ azt mondja, hogy egy elég kifejezőképes és elég szabályos **A** axiómarendszer ellentmondásnélkülisége bizonyításához nem elegendők olyan módszerek, amelyek magán az **A** axiómarendszeren belül kifejezhetők. Ez az eredmény, a GENTZEN-féle bizonyításra alkalmazva, többek között azt adja, hogy az ott szereplő rendszám-hozzárendelés nem pótolható véges számoknak (vagy egy ε_0 -nál kisebb rendszám alatti transzfinit számoknak) a levezetésekhez való hozzárendelésével. A GENTZEN-féle bizonyítás előtt úgy látszott, hogy GÖDEL tétele egyáltalában lehetetlenné teszi az aritmetika ellentmondás-

⁶⁶ L. az 55. lábjegyzetben idézett munkát.

nélküliségének bizonyítását. Ma is sokan kételkednek a GENTZEN-féle módszernek az analízisre való kiterjeszthetőségében arra hivatkozva, hogy a második számosztály elmélete felépíthető az analízis axiómarendszere segítségével. A helyzet azonban az, hogy nem várható, hogy az analízis, vagy akár a halmazelmélet axiómarendszere segítségével a természetes számok minden egyes speciális (esetleg komplikált számelméleti utasításokkal megadott) jólrendezéséről meg lehessen mutatni, hogy valóban jólrendezés; az természetesen kérdéses, hogy egy olyan jólrendezésre vonatkozólag, amelyről ezt nem lehet megmutatni, sikerül-e bennünket valami módon meggyőzni, hogy rendelkezünk a megfelelő «végigiterálás» képességgel. A GÖDEL-féle tétellel kapcsolatos gondolkörrel azonban nem foglalkozhatom részletesebben.⁶⁷

Ha a GENTZEN-féle ellentmondásnélküliség-bizonyítást axiomatizáljuk, az az axióma, amely túllép az aritmetika axiómarendszerén, az ϵ_0 -típusú transzfinit indukció axiómája lesz. Viszont az aritmetika axiómáit és következtetésmódjait nem használjuk ki teljesen. Ez különösen a logikai axiómákra és következtetési szabályokra vonatkozik. Ugyanis az ellentmondásnélküliség-bizonyítás minden egyes lépése egy-egy képességünket tárja fel; már pedig nem minden logikai tételnek (identitásnak) felel meg képesség s nem minden következtetésmódnak az, hogy bizonyos képességek másokat involváljak. Például a harmadik kizárása elvének az a képesség felelne meg, hogy bármely feladatot vagy meg tudunk oldani, vagy meg tudjuk mutatni, hogy képtelenség, hogy valaki megoldotta; már pedig ezzel a képességgel nyilván nem rendelkezünk általánosan.

Felvethető viszont a fordított kérdés is: ha a bizonyításelmélet eredményei azért meggyőzőek, mert közvetlenül konstatált meglevő képességeinkre hivatkozó meggondolások eredményezték azokat, nem lehet-e a matematika más ágainak is hasonló meggyőző

⁶⁷ E kérdésekről dr. PÉTER RÓZSA tartott 1940. március 8-án előadást az Elméleti Fizikai Intézet kollokviumán; előadása a *Mat. és Fiz. Lapok* ugyane füzetében jelenik meg, közvetlenül e dolgozat után (120—143. oldal).

erőt kölcsönözni azáltal, hogy tételeit olyan formába öntjük, hogy mindegyik egy-egy képességünk meglétét fejezze ki. Ez a program a már említett, KRONECKERRE visszavezethető, BROUWER által kiépített *intuicionizmus* programja. Természetes, hogy ha ez a képesség-fogalmazás már a logikában sem sikerült minden tételnél, még kevésbbé sikerülhet a matematikában. A numerikus számtan terén még maradék nélkül sikerül ez az átfogalmazás; például annak intuicionista bizonyítása, hogy $2 \cdot 2 = 4$, egy olyan képesség közlésében áll, amellyel, valahányszor valaki megad nekünk két kételemű és egy négyelemű halmazt, az előbbiekből alkotott rendezett párokat az utóbbinak elemeihez kölcsönösen egyértelműen hozzá tudjuk rendelni. De az egész számok általános aritmetikájában sem lépnek fel lényeges nehézségek; mindössze néhány bizonyításmódot kell elkerülnünk, például két szám, a és b , legnagyobb közös osztója létezésének azt a bizonyítását, amely ezt a legnagyobb közös osztót mint a legkisebb $ax + by$ alakú pozitív számot adja meg, mert az a képességünk nincs meg általában, hogy végtelen sok természetes szám közül megkeressük a legkisebbet (ezzel szemben az euklideszi algoritmussal való bizonyítás csupa olyan képességre hivatkozik, amellyel valóban rendelkezünk). Már a valós számok aritmetikájában, méginkább az analízisben és a halmazelméletben, több nehézséget okoz az intuicionista átfogalmazás; így pl. nincs meg az a képességünk, amivel két tetszőleges (pl. racionális intervallumok szűkülő sorozatával megadott) valós számról eldöntsük, hogy melyik a nagyobb; ennél fogva az intuicionisták nem fogadják el azt a tételt, hogy két különböző valós szám közül az egyik nagyobb a másiknál. Hasonlóan elvetik többek között a korlátos számhalmazok felső határának létezéséről, folytonos függvény maximumának eléréséről szóló tételeket. Az intuicionista analízis és halmazelmélet e szerint szegényebb, mint a klasszikus; ⁶⁸ egyben lényege-

⁶⁸ Ezt nem úgy kell értenünk, hogy az intuicionista analízis minden tétele a klasszikus analízisben is előfordul, viszont azonban nem; csak úgy, hogy a klasszikus analízis tételeinek nagy része nem fordul elő az intuicionista analízis tételei között. Ugyanis vannak olyan intuicionista

sen komplikáltabb annál, pl. a megszámlálható halmaz fogalma helyébe nyolc különböző fogalmat tesz annak megfelelően, hogy a természetes számok halmazára való kölcsönösen egyértelmű leképezés képessége helyett ennek mely, ezt a klasszikus halmazelmélet szempontjából pótoló részképességével rendelkezünk (pl. a természetes számok halmazának egy végtelen részére való kölcsönösen egyértelmű leképezés képességével). A logikának — a mellett, hogy egyes tételeit, mint pl. a harmadik kizárása elvét, elvetik az intuicionisták — érdekes módon alárendelt szerepe van az intuicionista matematikában. Ugyanis minden egyes képesség esetén közvetlenül be kell, hogy láthassuk azt, hogy rendelkezünk vele, a nélkül, hogy egyszerűbb képességekre visszavezetnők; már pedig a logika az intuicionisták szemében pusztán ezt a visszavezetést szolgálja s így a képesség bírásáról való meggyőződést megkönnyítő, azonban elvileg nélkülözhető segédeszköz.

Az intuicionizmus ismertetése azonban nem feladatomban;⁶⁹ ennyire is csak a bizonyításelmélettel való kapcsolatai miatt mentem bele. Az intuicionizmus és a bizonyításelmélet még egy évtizede két, egymással élesen szembenálló filozófiai felfogás termé-

tételek, amelyek a klasszikus analízisben nem igazak; pl. hogy egy valamely zárt intervallum minden helyén értelmezett függvény egyenletesen folytonos az intervallumban. Hogy ilyen tételek adódhatnak az intuicionista matematikában, annak az az oka, hogy a tétel feltételei itt sokkal többet kívánnak, mint a klasszikus analízisben; pl. az intuicionista felfogás szerint csak akkor mondjuk, hogy egy függvény értelmezve van egy intervallum minden helyén, ha rendelkezünk egy eljárással, amelynek birtokában, ha valaki szukcesszíve mind pontosabban és pontosabban megadja a független változó értékét, mi szukcesszíve mind pontosabban meg tudjuk adni a függvényértéket, a nélkül, hogy ehhez végig kellene várnunk a független változó megadásának egész végtelen processzusát, ami lehetetlenséget kívánna tőlünk; már pedig ilyen eljárás nyilván csak folytonos függvények esetén lehetséges.

⁶⁹ Kitűnő összefoglalása az intuicionizmusnak (s egyben a bizonyításelmélet alapfogalmainak is): A. HEYTING, *Mathematische Grundlagenforschung, Ergebnisse der Math.*, 3 (1934), 375—449. oldal. A bizonyításelmélet részletesebb tanulmányozására a 19. lábjegyzetben idézett HILBERT—BERNAYS-féle mű (II. kötetével: Berlin, 1939, együtt) ajánlható.

kének látszott; megalkotóik, BROUWER és HILBERT, heves vitákat vívtak. Azonban e viták a gondolatok tisztázásához vezettek; kiderült, hogy okuk nagyrészt az volt, hogy ugyanazokon a szavakon mást-mást értettek, kiki a maga programjába illő dolgot; kiderült, hogy a bizonyításelmélet és az intuicionizmus két különböző, egymást kiegészítő feladatkört tölt be. Ma már a köztük levő nézeteltérés egy-két prioritási kérdéstől eltekintve arra szorítkozik, hogy az intuicionizmus által elvetett, de a bizonyításelmélet által ellentmondásnélkülinek talált (vagy találandó) diszciplinák BROUWER szerint jelentés nélküli formulákkal való játékok, míg HILBERT kezdettől fogva meg volt győződve arról, hogy minden matematikai fogalomnak és tételnek van jelentéstartalma, ha nem is képességünkre vonatkozik.

Kalmár László.

ZIELSETZUNGEN, METHODEN UND ERGEBNISSE DER HILBERTSCHEN BEWEISTHEORIE.*

Die sprichwörtliche Unfehlbarkeit der Mathematik wurde zuerst durch jene Fehlschlüsse erschüttert, zu denen die Infinitesimalmethoden Anlaß gaben. Durch die exakte Begründung der Analysis durch CAUCHY und WEIERSTRASZ wurde die Möglichkeit solcher Fehlschlüsse eliminiert; doch ergab sich durch die Entdeckung der Antinomien der Mengenlehre wiederum eine ähnliche Lage. Da die Methoden der Mengenlehre auch für die übrige Mathematik unentbehrlich sind, ergibt sich die Notwendigkeit einer Neubegründung der Mathematik nebst exaktem Beweis der Widerspruchsfreiheit ihrer verschiedenen Zweige, wie Arithmetik, Analysis, Mengenlehre, Geometrie usw. Dies ist der Hauptzweck der HILBERTSCHEN Beweistheorie. Dazu sind zunächst Begriffe, wie Widerspruchsfreiheit, Arithmetik usw. exakt zu fassen. Zu diesem Zwecke stützt sich die Beweistheorie auf die Ergebnisse der Axiomatik und der mathematischen Logik.

* Ausarbeitung des zweiten Teiles eines Vortrags gehalten am 3. November 1939. im Kolloquium des Instituts für Theoretische Physik der Universität zu Budapest. Der erste Teil — eine Übersicht über die Elemente der Mengenlehre — wurde hier weggelassen.

Die axiomatische Methode besteht in einer bewußten Grenzsetzung des Definierens und Beweisens, indem gewisse Sätze einer Theorie als Axiome, die darin vorkommenden Begriffe als Grundbegriffe erklärt werden und sämtliche weitere Begriffe der Theorie durch jene definiert, sämtliche weitere Sätze durch die Axiome bewiesen werden. Durch Angabe eines Axiomensystems kann ein Zweig der Mathematik exakt abgegrenzt werden.

Die Zweige der mathematischen Logik, die für die Beweistheorie in erster Linie in Betracht kommen, sind der Aussagenkalkül und der engere Funktionenkalkül. Ersterer behandelt Funktionen, deren Argumente und Werte die beiden logischen Werte «wahr» und «falsch» durchlaufen; letzterer aber Funktionen über einer beliebigen Menge (Individuenbereich), die logische Werte als Funktionswerte annehmen. Die «Quantoren» *alle* und *es gibt* sind spezielle Funktionaloperationen über solche Funktionen; sie spielen eine ähnliche Rolle, wie die Integration in der Analysis.

Mit Hilfe dieser Methoden ist es möglich, eine exakte Definition des für die Axiomatik grundlegenden Begriffes «aus gewissen Prämissen folgt ein gewisser Satz» zu geben, die zugleich den herkömmlichen Inhalt dieses Begriffes deckt. Der Mengenbegriff, der zunächst durch den Funktionenkalkül in diese Definition einspielt und scheinbar unentbehrlich ist, läßt sich mit Hilfe des sogenannten GÖDELSCHEN Vollständigkeitssatzes eliminieren.

Mittels des Begriffes der Folgerung lassen sich Begriffe, wie Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit usw. ohne weiteres scharf fassen; damit ist der erste, grundlegende, Schritt gegen dem gesetzten Ziel der Beweistheorie getan.

Zum Beweise der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems verfährt die Beweistheorie über verschiedene Methoden. Die älteste Methode ist die des *Konstruierens eines Modells* für das betrachtete Axiomensystem innerhalb eines anderen; diese Methode kann nur relative Widerspruchsfreiheit (d. h. unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit eines anderen Axiomensystems) liefern. Außer den klassischen Anwendungen dieser Methode (Zurückführung der Widerspruchsfreiheit der BOLYAISCHEN Geometrie auf die der EUKLIDISCHEN; Zurückführung der Widerspruchsfreiheit der Geometrie auf die der Analysis) kann man die GÖDELSCHEN Entdeckung aufführen: Widerspruchsfreiheit der durch Auswahlaxiom und verallgemeinertem Kontinuumsatz erweiterten Mengenlehre unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre ohne diese.

Die einfachste Methode, die einen absoluten Widerspruchsfreiheits-

satz liefern kann, die *Wertungsmethode* geht auf J. KÖNIG zurück. Sie besteht in einer Zuordnung von logischen Werten den Aussagen (Formeln) des Axiomensystems, die den Axiomen den Wert «wahr» zuordnet, dergleichen den Folgerungen aus Sätzen, denen bereits «wahr» zugeordnet wurde, während einander widersprechenden Aussagen nie gleichzeitig den Wert «wahr» zuordnet. Diese Methode wurde von J. KÖNIG auf ein Bruchstück der Arithmetik angewendet; weitere Bruchstücke der Arithmetik wurden durch dieselbe Methode, kombiniert mit einer Elimination der Quantoren mittels «*Ausintegrieren*», von HERBRAND und PRESBURGER behandelt. Ein anderes Hilfsmittel zur Elimination der Quantoren wird durch den HILBERTSchen ε -Symbol geliefert; um aber eine Wertung angeben zu können, bedarf man einer Methode zur *Elimination* des ε -Symbols, was ebenfalls nur bei sehr einfachen Axiomensystemen, in erster Linie bei Bruchstücken der Arithmetik, ausgeführt werden kann.

Eine Erweiterung der Wertungsmethode wurde — nachdem diese Erweiterung von HILBERT und ACKERMANN in einer anderen Form bereits angewandt wurde — von J. v. NEUMANN formuliert. Die erweiterte, sogenannte *Teilwertungsmethode* erfordert statt einer festen Zuordnung von logischen Werten den Aussagen eine Anweisung, die nach Angabe eines Beweises (von dem es zu zeigen ist, daß er nicht zu einem Widerspruch führt) eine solche, vom betrachteten Beweis abhängige, Zuordnung für die im Beweise vorkommenden Formeln definiert. Durch diese Methode wurde die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik unter gewissen Einschränkungen betreffend der Verwendung der vollständigen Induktion von NEUMANN, ACKERMANN und HERBRAND bewiesen.

Die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik ohne irgendwelche Einschränkungen wurde zuerst von GENTZEN (dann aber auch von ACKERMANN mittels älteren HILBERTSchen Ansätzen, die auf die Teilwertungsmethode hinauskommen) bewiesen. GENTZEN'S Methode beruht auf einer speziellen *Beweistransformation*, die einem jeden Beweis der Arithmetik mit einer numerischen Gleichung als Resultat, falls er nicht genügend einfach ist um eine direkte Anwendung der Wertungsmethode zuzulassen, einen in gewisser Hinsicht einfacheren Beweis derselben numerischen Gleichung zuordnet. Die Vereinfachung besteht entweder in einer «Auflösung» einer vollständigen Induktion, oder in einer Fallunterscheidung, die eine Vereinfachung in Schlüssen im Zusammenhang mit Quantoren bewirkt. Daß wirklich eine Vereinfachung vorliegt, zeigt sich durch eine geeignete Zuordnung von transfiniten Ordnungszahlen (unterhalb der ersten ε -Zahl), als «Kompliziertheitsgraden» zu den Beweisen, indem nämlich bei der fraglichen Beweistransformation der Kompliziertheitsgrad abnimmt. Durch einen transfiniten Induktions-

schluß ergibt sich die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik. Die Ausdehnung der GENTZENSCHEN Methode auf die Analysis scheint nicht unmöglich, aber mit fast unüberwindbaren technischen Schwierigkeiten behaftet zu sein.

Die Frage, was man durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis gewinnt, läßt sich dahin beantworten, daß man dadurch eine Fähigkeit erwirbt, in einem beliebig vorgelegten Scheinbeweis, der sich angeblich im betrachteten Axiomensystem abspielt und zu einem Widerspruch führt, einen Fehler aufzudecken. Dabei werden einfachere Fähigkeiten vorausgesetzt, deren Bestehen man unmittelbar fühlt. Es ist zwar möglich, den Widerspruchsfreiheitsbeweis so umzugestalten, daß man sich statt Fähigkeiten auf Axiomen von «objektiverem» Inhalt beruft; doch bedarf man dann, nach einem GÖDELSCHEN Satz, eines gegenüber dem betrachteten *weiteren* Axiomensystems. Andererseits kann man versuchen, die ganze Mathematik in Behauptungen über das Bestehen von Fähigkeiten umzugestalten; dies ist die Tendenz des Intuitionismus und führt notwendig zu einer Verstümmelung der klassischen Mathematik, da nicht allen Sätzen derselben Fähigkeiten entsprechen, die wir wirklich besitzen.

László Kalmár.

AZ AXIOMATIKUS MÓDSZER KORLÁTAI.¹

1. Axiómarendszerek felállítására a következő megfontolás vezet: A matematikában minden bizonyítás úgy történik, hogy az állítást más tételekre vezetjük vissza és minden definíció más fogalmakra vezeti vissza a definiálandó fogalmat. E visszavezetések során valahol meg kell állnunk: bizonyos fogalmakat tovább nem elemezendő alapfogalmakul, bizonyos tételeket tovább nem bizonyítandó alaptételekül, axiómákul kell elfogadnunk. Az alapfogalmakról nem használhatunk fel semmi mást, mint amit az axiómák kimondanak róluk, mintegy implicite definiáljuk ezeket az axiómákkal.

¹ A Kir. Magyar Pázmány Péter Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének kollokviumán 1940. márc. 8-án tartott előadás. Ismertnek teszem fel a halmazelmélet elemeit és KALMÁR LÁSZLÓ «A HILBERT-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei és eredményei» című ugyanitt 1939. november 3-án tartott előadását (részletes kidolgozását l. a Matematikai és Fizikai Lapok jelen füzetében, 65—119 old.) Erre a cikkekre (K) jelzéssel fogok hivatkozni, jelöléseit további magyarázat nélkül használom. Az egyetlen eltérés a negáció jele: \bar{A} helyett $\neg A$ -t fogok írni. Összefoglalom a felhasznált logikai jeleket jelentésük szerint:—

\uparrow	«igaz»
$A \& B$	«és»
$A \rightarrow B$	«következik»
$\neg A$	«nem»
$(x)F(x)$	«minden x -re igaz $F(x)$ »
$(\exists x)F(x)$	«van olyan x , melyre igaz $F(x)$ »
$(x)(\exists y)F(x, y)$	«minden x -hez van olyan y , melyre igaz $F(x, y)$ ».

Konkrét formulákat gót betűkkel szokás jelölni.

Az axiomatikus módszer, az elemi logika és logikai függvénykalkulus alapfogalmai (K)-ban megtalálhatók, ezért előadásomnak ezekre vonatkozó bevezető részét elhagytam. Viszont CHURCH abszolút eldönthetetlen problémáját, melyre az előadáson csak kevés idő jutott, kissé részletesebben tárgyalom.

Arra emlékeztet ez, ahogyan egy egyenletrendszer implicit definíciót ad a benne szereplő ismeretlenekre. Például arról az x, y, z -ről akarunk beszélni, melyekre

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x - y + z = 60; \end{cases}$$

ilyenek: 80, 20, 0, de 79, 20, 1 is, 78, 20, 2 is, ... tehát az egyenletrendszer ezeket a számhármasokat definiálja impliciten. Szándékosan választottam határozatlan egyenletrendszert, mert egy axiómarendszertől, melyhez hasonlítani akarom, semmiképpen sem várható, hogy az illető tudományág alapfogalmait egyértelműen adja meg, hiszen ezek az alapfogalmak általában nem is foghatók meg precízen (például a geometria szemléletből nyert határozatlan fogalmakra épít, a naív halmazfogalom pedig még ellentmondásosnak is bizonyult). Egy-egy axiómarendszernek tehát több modell is eleget tesz. Például PEANO axiómái², melyeket a természetes számok megalapozására vezetett be, kitűnően teljesülnek bármely számtani haladványra is, ha a 0-nak nevezett definiálatlan alapfogalom helyébe az illető számtani haladvány első tagját, az «eggyel továbbszámolás» helyébe a differencia hozzáadását képzeljük.

Ennek ellenére megkívánjuk egy axiómarendszertől, hogy lehetőleg teljesen képviselje azt és csakis azt a tudományágat, melynek felépítésére bevezettük. A *teljesség*nek ezt a követelését több különböző módon szokás precizírozni. Én a két legfontosabb módot tárgyalom, és meg fogom mutatni, hogy axiomatikus módszereink mindkettővel szemben csődöt mondanak.

2. Az eddigi gondolatmenethez természetesen csatlakozó követelés a következő volna: ha nem is várható, hogy egy axiómarendszernek egyetlen modell tesz eleget, de legalább egyenlő strukturájúak legyenek a neki eleget tevő modellek, mint ahogy az 1, 2, 3, ... természetes számok sorozatát és a 2, 4, 6, ... számtani haladványt egyenlő strukturájúnak érezzük. Precízebben:

² (K) 73. old.

ha adva van két modell, amely az axiómarendszernek eleget tesz, lehessen ezeknek elemeit és a köztük fennálló relációkat úgy rendelni kölcsönösen és egyértelműen egymáshoz, hogy ha az egyik modell bizonyos a, b, c, \dots elemeinek a másikban a', b', c', \dots a párja és az egyik modellben definiált R relációnak a másik modellben R' a párja, továbbá az R reláció fennáll az a, b, c, \dots elemek között, akkor az R' reláció is fennálljon az a', b', c', \dots elemek között. Ezt fejezik ki úgy, hogy a két modell izomorf legyen, és az olyan axiómarendszert, melynek eleget tevő bármely két modell izomorf, *monomorf*nak nevezzük. Ehhez mindenesetre szükséges — korántsem elegendő —, hogy egyáltalán lehessen egymáshoz rendelni kölcsönösen és egyértelműen bármely két modell elemeit, azaz, hogy a modellek egyenlő számosságúak legyenek.

Hosszú ideig hitték a matematikusok, hogy a matematika különböző ágai számára felállított axiómarendszerek monomorfok. A geometriára HILBERT³ ezt be is bizonyította úgy, hogy a geometria axiomatizált fogalmai segítségével definiált egy távolságok közötti összeadás- és szorzás-fogalmat és megmutatta, hogy ezekre érvényesek a valós számok műveleti szabályai (egyértelmű megfordíthatóság, kommutatív, asszociatív, disztributív törvények s. i. t.), így nyert egy halmazt, mely izomorf a valós számok halmazával. Két nem izomorf geometriai modell ily módon két nem izomorf modellt adna a valós számok rendszerében is; márpedig az aritmetika rendszereinek monomorfizmusában rendületlenül hittek.

Ezt a hitet két irányban is megdöntötte SKOLEM. Főeredményeit úgy lehet összefoglalni, hogy az *axiomatikus módszer sokat markol és keveset fog*. E kettő közt nincs okozati összefüggés: külön-külön igazak. Előbb bizonyította be SKOLEM⁴ a megszámlálhatón túlmenő fogalmakat axiomatizáló rendszerekről

³ D. HILBERT: Grundlagen der Geometrie. (7. kiadás: Leipzig és Berlin, 1930).

⁴ TH. SKOLEM: Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Math.-kongressen in Helsingfors 1922, 217—232. old.

(tehát például a valós számokéről), hogy keveset fognak, és jóval később⁵ a természetes számok lehetséges axiómarendszereiről, hogy sokat markolnak.

3. Hogy például a halmazelmélet axiómarendszerei *keveset fognak*, azon ezt értem: bármi módon adnak meg egy axiómarendszert a halmazelmélet számára, melynek tehát a megszámlálhatón túlmenő bármily nagy számosságok implicit definícióját is tartalmaznia kellene, hacsak nem ellentmondásos az axiómarendszer, mindig található hozzá egy megszámlálható modell is, amely kielégíti. Mivel pedig a halmazelmélet fogalmai önmagukban nem voltak precízek és éppen az axiómák által akartuk őket precízen bevezetni, úgy, hogy nem szabad rajtuk mást érteni, mint amit az axiómák róluk kimondanak: semmi sem jogosít fel arra, hogy mást értsünk rajtuk, mint azt a megszámlálható modellt, mely kielégíti az axiómarendszert, tehát, arra sem, hogy egyáltalán beszéljünk megszámlálhatón túlmenő számosságokról.

Ugyanez érvényes a valós számokat bevezető axiómarendszerekre is: ott kontinuum számosságot akarunk markolni és az axiómarendszer megint megszámlálható modellt fog. Persze, ha az axiómarendszertől függetlenül hiszünk a valós számokban, ezeknek a kontinuum számosságú halmaz a szintén jó modell a kérdéses axiómarendszer számára, tehát az mindenesetre fennáll, hogy ez az axiómarendszer nem monomorf.

SKOLEM bizonyítása LÖWENHEIM következő tételén alapul: ha a logikai függvénykalkulus egy zárt (azaz szabad változót nem tartalmazó) formulája kielégíthető egy individuumtartományban, akkor e halmaznak van oly megszámlálható része, hogy ezen belül is kielégíthető. Alapgondolata ez: legyen például a kérdéses zárt formula:

$$(x) (Ey) \mathfrak{A}(x, y),$$

(ahol $\mathfrak{A}(x, y)$ -ban már nincsenek kötött változók, például ilyen

⁵ TH. SKOLEM: Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems, Norsk matematisk forenings skrifter, Series II. No. 10. (1933), 73—74. old.

alakú: $F(x, y) \rightarrow G(y, x)$; hogy ez kielégíthető \mathfrak{J} -ben, az azt jelenti, hogy az $\mathfrak{A}(x, y)$ -ban szereplő függvényváltozók (például F és G) választhatók úgy, hogy ha x az \mathfrak{J} halmaz teszésszerű eleme, van olyan y elem \mathfrak{J} -ben, hogy $\mathfrak{A}(x, y) = \uparrow$. Ez a «minden x -hez tartozik ily y » tulajdonképpen y -t mint x függvényét adja meg⁶, tehát van egy olyan \mathfrak{J} -ben definiált $y = f(x)$ függvény \mathfrak{J} -beli értékekkel, hogy a fenti formula ezzel egyértelmű:

$$(x)\mathfrak{A}(x, f(x)),$$

szavakban: minden \mathfrak{J} -beli x -re $\mathfrak{A}(x, f(x)) = \uparrow$. Legyen most a az \mathfrak{J} -nek egy tetszésszerű választott eleme, akkor erre is

$$\mathfrak{A}(a, f(a)) = \uparrow.$$

$f(a)$ maga is \mathfrak{J} -beli érték, tehát őrá is

$$\mathfrak{A}(f(a), f(f(a))) = \uparrow.$$

Ugyanezt megismételhetjük $f(f(a))$ -val s. i. t. ad inf. Világos, hogy a $(x)(Ey)\mathfrak{A}(x, y)$ formula már az

$$a, f(a), f(f(a)), \dots$$

\mathfrak{J} -beli megszámlálható sorozaton kielégíthető: ha e sorozat bármely x tagjához a következő tagot választjuk y -nak, akkor teljesül $\mathfrak{A}(x, y) = \uparrow$. Ezzel LÖWENHEIM tétele e példán igazolva van; az általános esetben ehhez lényegében hasonló, csak megfelelően komplikáltabb gondolatmenettel bizonyítható.

Mármost SKOLEM vette észre e tétel nagy jelentőségét. Minden axiómarendszer véges, vagy megszámlálható sok zárt formulából

⁶ Az intuicionista felfogás szerint $(x)(Ey)\mathfrak{A}(x, y)$ azt jelenti, hogy ismeretes egy eljárás, mellyel az individuumtartomány minden x eleméhez megkonstruálható egy olyan y , hogy $\mathfrak{A}(x, y) = \uparrow$ legyen. Ez az eljárás y -t mint x függvényét adja meg. A klasszikus felfogás szerint $(x)(Ey)\mathfrak{A}(x, y)$ csak annyit jelent, hogy az individuumtartomány minden x eleméhez vannak olyan y -ok, melyekre $\mathfrak{A}(x, y) = \uparrow$; ha a kiválasztási axiómát alkalmazzuk, az ily y -ok halmazának kiválasztott eleme ismét x -nek jól definiált függvénye lesz. SKOLEM ad olyan bizonyítást is, mely nem használja fel a kiválasztási axiómát, l. TH. SKOLEM: Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, Skrifter utgitt av det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo I. Mat.-naturv. klasse, No 4 (1929), 1—49. old.

áll; SKOLEM egyetlen zárt formuláról ilyen rendszerekre általánosította a LÖWENHEIM-tételt és így adódik, hogy minden axiómarendszer, ha egyáltalán kielégíthető, már megszámlálható individuumtartományban is kielégíthető. Persze nem volna értelme azt kívánni, hogy akkor vegyünk több mint megszámlálható sok axiómát alapul, hiszen éppen az axiómák segítségével akarjuk magalapozni a «több mint megszámlálható» fogalmát.

Speciálisan a geometria axiómarendszerére ez a következőket jelenti: már HILBERT³ taglalta, hogy az ő II. folytonossági axiómája nélküli geometriai rendszer kielégíthető egy megszámlálható individuumtartományban is. A kérdéses axióma vezeti be a folytonosságot: a kontinuum számosságú valós koordinátájú pontokat. Mármint SKOLEM tétele szerint akkor is van oly megszámlálható modell, mely eleget tesz a rendszernek, ha a II. folytonossági axiómát hozzávesszük; ebben a modellben nem lehet bevezetni tetszésszerűt valós koordinátákat, csak bizonyos speciális eljárással képzeteket, — mint ahogy példánkban nem írhatjuk x helyébe az \mathfrak{J} halmaz tetszőleges elemét, csak azokat, melyek egy a -ból f szukcesszív alkalmazásával: $f(a), f(f(a)), \dots$ állnak elő — ilyen pedig csak megszámlálható sok van. S már ezek is elegendők ahhoz, hogy az axiómarendszert kielégítsék; csak azon az alapfogalmon, amin eddig tetszésszerűt valós számot értettünk, most egy bizonyos eljárással konstruálható valós számok közül egy tetszőlegest kell érteni.

Éppen így a halmazelméletben a megszámlálható modell tartalmi interpretációja más lesz, mint amit eredetileg értettünk a halmazelmélet alapfogalmain; ami ott például kontinuum-számosságú halmaz volt, az e lefordítás után valami egészen más lesz, s így nincs ellentmondásban azzal, hogy elemei megszámlálhatók.

4. SKOLEM másik nagy eredményén, hogy az *axiomatikus módszer sokat markol*, precízen a következőt értem: bármennyire is szeretnénk a legszűkebben a nagyság szerint rendezett természetes számok testére szabni egy axiómarendszert, feltétlenül lesznek ω -nál magasabb rendszámú halmazok is, melyek

azt kielégítik. (A PEANO-axiómák² ugyan tökéletesen jellemzik az ω rendszámot, de az 5. PEANO-axiómában egy axiomatizálatlan «halmaz» fogalom is szerepel. Ha — kellően megszorítva — ezt is axiomatizáljuk, SKOLEM eredménye az így nyert axióma-rendszerre is kiterjeszthető lesz.) Tehát még a természetes számok rendszere sem monomorf és tiszta axiomatikus módon nem tudjuk az ω rendszámú halmazt elválasztani a magasabb rendszámú halmazoktól.

A bizonyítás rendkívül szellemes; itt csak egy példán mutatom meg, hogy körülbelül miről van szó.

Válasszunk ki néhány tételt, melyek a nagyság szerint rendezett természetes számokra vonatkoznak, például a következőket: minden számnak van közvetlen rákövetkezője; definiálható rájuk egy összeadásnak és egy szorzásnak nevezett művelet, melyek természetes számokra alkalmazva ismét természetes számot adnak, teljesítik a kommutatív, asszociatív, disztributív törvényeket és olyanok, hogy van két 0-nak és 1-nek nevezett természetes szám, melyekre tetszésszerűen n esetén $n + 0 = n$ és $n \cdot 1 = n$. Válasszuk ezeket a tételeket axiómáknak. Akkor meg lehet adni — a nagyság szerint rendezett természetes számoktól rendszámban is különböző — más halmazokat, amelyek ugyancsak kielégítik ezeket. Ilyen például a nemnegatív egész együtthatós polinomok halmaza a következő rendezésben: Egy $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom később következik egy $b_m x^m + b_{m+1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ polinomnál, ha magasabbfokú nála, vagy, ha egyenlőfokúak és balról jobbra haladva az első eltérő együttható az első polinomban nagyobb, mint a másodikban.

Ily polinomok összege, szorzata ismét ily polinom; az összeadás és szorzás törvényei itt is teljesülnek; 0-nak és 1-nek itt a konstans 0 illetve konstans 1 vehető (ahol tehát a_0 kivételével minden együttható 0, 0-adfokú polinom). Minden ily polinomnak van közvetlen rákövetkezője, például $2x^3 + 3x^2$ rákövetkezője $2x^3 + 3x^2 + 1$, ennek rákövetkezője $2x^3 + 3x^2 + 2$. De, hogy a polinomok megadott rendezése jóval bonyolultabb az ω rend-

számúnál, az világos: például mindjárt az x polinomot végtelen sok polinom előzi meg: mindazok, melyek alacsonyabb fokúak, tehát az összes konstansok: a konstans $0, 1, 2, \dots$ (Az így rendezett polinomhalmaz rendszáma egyébként ω^n). Ha a természetes számsor más tulajdonságait is axiómául vesszük, akkor ez a modell esetleg nem lesz jó, de más még bonyolultabb modell lesz jó helyette. Például a következő tulajdonsághoz: 0 -on kívül minden számnak van közvetlen megelőzője, nem jó a modell, mert x -nek például nincs közvetlen megelőzője. De ha a legmagasabb tag együtthatóján kívül negatív együtthatókat is megengedünk, jó modellt kapunk; ekkor például x megelőzője $x-1$. (Az így kibővített polinomhalmaz még csak nem is jólrendezett).

SKOLEM megmutatja, hogy akárhány (véges, vagy megszámlálható sok) tulajdonságot veszünk hozzá a természetes számok felsorolt tulajdonságaihoz, mindig lesz oly még bonyolultabban rendezett függvényhalmaz, amely azoknak is eleget tesz.

5. A monomorfizmus követelésével szemben tehát siralmasan áll az axiomatikus módszer. Van azonban a teljességnek más fogalmazása is: ilyen a *kategoricitás*. E szerint akkor mondunk egy axiómarendszert teljesnek, ha bármilyen \mathfrak{M} állítást fogalmazunk meg az általa definiált alapfogalmak segítségével, vagy \mathfrak{M} vagy $\neg \mathfrak{M}$ bizonyítható benne. Tényleg jogosnak látszik akkor mondani teljesnek egy rendszert, ha elég erős ahhoz, hogy a körébe vágó felvethető problémákat eldöntse. De ez igen erős követelés.

Igen egyszerű rendszerekre teljesülhet. Például PRESBURGER⁷ bebizonyította arra a rendszerre, mely a logika axiómáiból, a PEANO-féle axiómákból és az összeg rekurzív definíciójából áll.⁸ Mit lehet ebben a rendszerben felírni? Változók közti össze-

⁷ M. PRESBURGER: Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt, Comptes-rendus du I. Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves 1929 (1930), 92—101. old.

⁸ (K) 93. old., 73. old. és 47. lábjegyzet, 96. old.

adások ilyesmit adnak például: $x + x + x + y + y$, ezt szokás így is írni $3x + 2y$; tehát pozitív egész együtthatójú elsőfokú polinomok írhatók fel, ilyenek közti egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket és ezek közti logikai relációkat lehet felírni a rendszerben. Az elsőfokú határozott vagy határozatlan egyenletek és egyenlőtlenségek körében mozgó problémák pedig tudvalevően eldönthetők.

Mindez egycsapásra megváltozik, ha a szorzást is bevezetjük, hiszen a szorzás a számelmélet minden bonyodalmát behozza a rendszerbe; például a GOLDBACH-sejtést és a nagy FERMAT-problémát is.⁹

Pedig úgy érezzük, hogy az még mindig elég egyszerű rendszer, melyben csak összeadás és szorzás szerepel. Már ebben ilyen mindmáig eldöntetlen problémák vannak, tehát már itt sem várható, hogy meg lehet adni egy általános eldöntési eljárást, ami a rendszer kategoricitásának precíz bizonyításához szükséges lenne; hát még bonyolultabb rendszerekben. De a hit azért megvolt a matematikusokban, hogy el lehet dönteni a GOLDBACH-sejtést, a nagy FERMAT-problémát is, bízhattak benne, hogy valaki majd csak eldönti ezeket is egyszer; *hinni* lehetett axiómarendszereink kategoricitásában. Egyik legfrappánsabb eseménye volt a bizonyításelméletnek, mikor GÖDEL¹⁰ 1931-ben megadott — ténylegesen, konstruktíve megadott — egy számelméleti problémát, melyről kifogástalan módon bebizonyította, hogy egy, a számelméletet kifogástalanul megalapozó, axiómarendszerben eldönthetetlen. Szeretném GÖDEL gondolatmenetét legalább vázolni. Egy módosítással mondom el, ami már későbbi és ROSSERTŐL¹¹ származik.

6. A kérdéses axiómarendszerben néhány alapjel szerepel:

⁹ (K) 102—103. old.

¹⁰ K. GÖDEL: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte für Math. und Phys. 38 (1931), 173—198. old.

¹¹ J. B. ROSSER: Extensions of some theorems of Gödel and Church. J. Symbol. Logic, 1 (1936), 87—91. old.

a zárójelek, a logikai jelek, 0, a «rákövetkezés» jele, ezenkívül előre megmondja GÖDEL, hogy hogyan fogja jelölni a változókat: egy megszámlálható x_1, x_2, x_3, \dots sorozatból fogja venni a jeleket számukra.¹² Ezt megteheti, hiszen minden konkrét formulában csak véges sok változó szerepelhet. E megszámlálható sok jelből csak megszámlálható sok formulát lehet képezni. Végre egy bizonyítás úgy fogható fel, mint véges sok formula sorozata, melyek közül néhány formula axióma, a többi ezekből a megengedett következtetési szabályok szukcesszív alkalmazásával következik; az utolsó közülük a bebizonyított formula.

Mármost GÖDEL gondolatmenetét követve, lefordítjuk ezt a rendszert a számelméletre: egy szótárt szerkesztünk, melyben az axiómarendszer jeleinek, formuláinak, bizonyításainak természetes számokat feleltetünk meg. A konstans jeleknek, amilyen például a \rightarrow jel, az első néhány törzsszámot, a változóknak a többi törzsszámot. Így egy adott formula jeleihez egy véges számsorozat tartozik; magának a formulának azt a számot feleltetjük meg, melynek törzstényezős felbontásában a kitevők rendre az illető véges számsorozat tagjai.¹³ Megmutatom egy példán, hogy ezt hogyan kell érteni. Vegyük például ezt a formulát: $(x_1)(x_1 = x_1)$. Ha a kétféle zárójel megfelelői 2, illetve 3, az $=$ -é¹⁴ 5 és a változóknak megfelelő törzsszámok például 19-nél kezdődnek, akkor e formula a következő jelsorozatot adja: 2, 19, 3, 2, 19, 5, 19, 3 és az a szám, melynek felbontásában ezek a kitevők:

$$n = 2^2 \cdot 3^{19} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^{19} \cdot 13^5 \cdot 17^{19} \cdot 19^3,$$

¹² Valójában GÖDEL különböző típusú változókat is megkülönböztet.

¹³ A számelmélet alaptételét, hogy minden természetes szám egyértelműen írható fel törzsszámok szorzataként, ebben az alakban használom fel: Ha n legnagyobb törzsszámosztója p , akkor n felírható, egy és csakis egy módon mint a törzsszámok

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$$

sorozatának p -ig terjedő valamennyi tagja bizonyos nemnegatív egész kitevős hatványainak szorzata. Például: $28 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7$.

¹⁴ Az $=$ jelet GÖDEL a logikai jelekkel fejezi ki.

amit — bár kissé soká tartana — ki is lehetne számítani és így a fenti formulának egyetlen szám felel meg. Fordítva, a törzstényező felbontás egyértelműsége miatt, ha egy szám egyáltalán szerepelt e hozzárendelések közt, rá lehet ismerni, hogy melyik formulához rendeltük; például ha egy szám törzstényező felbontása $2^{19} \cdot 3^5 \cdot 5^{23}$, akkor ennek a következő formula felelt meg:

$$x_1 = x_2.$$

Formulák közti kapcsolatoknak így számelméleti függvények fognak megfelelni. Például, hogy az n -hez rendelt A formula negációjának milyen szám felel meg, az csak n -től függ, és így kapható meg: n törzstényező felbontásából konstatáljuk, hogy milyen formulát rendeltünk hozzá, ha A -t, akkor felírjuk a $\neg A$ formulát és megkonstruáljuk a hozzátartozó számot. n -nek ezt a függvényét $\tau(n)$ -nel fogom jelölni; tehát, ha A -hoz n , akkor $\neg A$ -hoz $\tau(n)$ tartozik. Hasonlóan, az ahhoz a formulához rendelt szám, mely a k -hoz tartozó egyváltozós $F(x_1)$ formulából keletkezik, ha x_1 helyébe egy l természetes számhoz rendelt számjelet¹⁵ helyettesítünk, k -nak és l -nek könnyen megkonstruálható függvénye. Ezt $\sigma(k, l)$ -l fogom jelölni. A k -hoz rendelt $F(x_1)$ formulát jelölhetjük így: $F_k(x_1)$, tehát $\sigma(k, l)$ az $F_k(\beta_l)$ -hez rendelt számot jelenti. Ha speciálisan l -et helyettesítünk k helyébe is, $\sigma(l, l)$ az $F_l(\beta_l)$ formulához¹⁵ rendelt szám lesz.¹⁶ (Ha eltekintünk attól, hogy nem minden számhoz rendeltünk egyváltozós formulát, az egyváltozós formulák így volnának egysorba rendezhetők: $F_1(x_1)$, $F_2(x_1)$, ... és akkor $\sigma(l, l)$, hol $l = 1, 2, \dots$, a következő formulához rendelt számokat adná: $F_1(\beta_1)$, $F_2(\beta_2)$, Látható, hogy e mögött

¹⁵ Például ha az a természetes szám rákövetkezőjének jele a formalizmusban fa , akkor 3 számjele: $fff0$ és a szótár ennek is megfeleltet egy természetes számot [ami 3-tól különböző, t. i., ha f -nek 11 és 0-nak 7 felel meg, $(2 \cdot 3 \cdot 5)^{11} \cdot 7^7$]. Az $fff0$ jel helyett rövidítésül β_3 -at fogok írni.

¹⁶ A könnyebb áttekinthetőség kedvéért összefoglalom a felhasznált megfeleltetéseket:

Szótár:

$$\begin{array}{ccccccc} (, &), & =, & 0, & f, \dots, & x_1, & x_2, \dots, & F_k(x_1), & F_k(\beta_l), & F_l(\beta_l) \\ 2, & 3, & 5, & 7, & 11, \dots, & 19, & 23, \dots, & k, & \sigma(k, l), & \sigma(l, l) \end{array}$$

és ha \mathfrak{A} -nak n felel meg, akkor $\neg \mathfrak{A}$ -nak $\tau(n)$.

a halmazelmélet átlós módszerének gondolata van). GÖDEL bebizonyította, hogy $\tau(n)$ is, $\sigma(m, n)$ -is rekurzív függvények.¹⁷

Vége egy bizonyításhoz — mely nem egyéb, mint egy véges formulasorozat — ismét véges számsorozat tartozik; rendeljük a bizonyításhoz azt a számot, melynek törzstényezős felbontásában e számsorozat tagjai a kitevők. Fel lehet ismerni, hogy egy számhoz milyen bizonyítást rendeltünk (ha egyáltalán szerepelt e szám a hozzárendelésben), például ha 0-nak 7 felel meg,

$$2^{2430} 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \cdot 3^{2430} 000\ 000 = 2^{2^{19} \cdot 3^5 \cdot 5^{19}} \cdot 3^{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^7},$$

¹⁷ Rekurzív függvények azok, amelyek felépíthetők úgy, hogy kiindulunk a legegyszerűbb konstansból, 0-ból és a legegyszerűbb egyváltozós számelméleti függvényből, mely a továbbbszámlálásnak felel meg (n -hez a rákövetkező számot rendeli), $n+1$ -ből, azután szukcesszív helyettesítésekkel és rekurziókkal képezünk új függvényeket a már definiáltakból. Helyettesítés például: ha már definiáltuk $f(n)=n!$ -t és $g(n)=n^2$ -et, akkor $f(g(n))=(n^2)!$ A rekurzió olyan definíció, mely megadja a függvény értékét a 0 helyen és azt, hogy ha már ismerjük az értékét egy tetszőszerinti n helyen, hogyan lehet ebből az $n+1$ helyen felvett értékét kiszámítani. Kiszámítás közben már előzőleg definiált függvényeket szabad felhasználni. Ha például már az 1 konstans és a szorzat, mint tényezőinek függvénye definiálva van, akkor egy $g(n)$ függvény definiálható így:

$$g(0) = 1, \tag{a}$$

$$g(n+1) = (n+1) \cdot g(n). \tag{b}$$

E definíció módot ad arra, hogy $g(n)$ értékét bármely adott n helyen kiszámítsuk: szukcesszívve mehetünk vissza, például (b) szerint

$$g(3) = 3 \cdot g(2),$$

$$g(2) = 2 \cdot g(1), \text{ tehát } g(3) = 3 \cdot 2 \cdot g(1),$$

$$g(1) = 1 \cdot g(0), \text{ tehát } g(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot g(0),$$

de (a) szerint $g(0) = 1$, tehát $g(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

Éppen ez a döntő tulajdonság; hogy bármely rekurzív függvény értéke bármely adott helyen véges számú lépésben kiszámítható.

Rekurzív reláción oly összefüggést értünk számelméleti változók között, mely akkor és csak akkor áll fenn, ha egy rekurzív függvény 0 értéket vesz fel. Például bebizonyítható, hogy $|m-n|$ rekurzív függvény, tehát két tetszőszerinti rekurzív függvény közti egyenlőség rekurzív reláció, mert például $q(n)=\psi(m)$ akkor és csak akkor igaz, ha $|q(n)-\psi(m)|=0$. Az előbbieket szerint bármely rekurzív relációról bármely adott helyen véges számú lépésben eldönthető, hogy teljesül-e vagy sem.

Az elemi számelméletben szerepet játszó valamennyi függvényről és relációról be lehet bizonyítani, hogy rekurzívak.

tehát e szám annak a bizonyításnak (és nem formulának, mert a kitevők összetett számok) felel meg, mely két formulából áll, az egyik a 19, 5, 19-hez, a másik a 7, 5, 7-hez rendelt jelekből áll; azaz e bizonyítás:

$$\frac{x_1 = x_1}{0 = 0}$$

($x_1 = x_1$ axióma, ebből $0 = 0$ helyettesítéssel adódik). Látjuk, hogy már e — triviálisan egyszerű — bizonyításhoz is milyen nagy szám tartozik; már egy valamire való bizonyításnak áttekinthetetlen nagy szám felelne meg. Egy bizonyítást *bonyolultabbnak* vagy *egyszerűbbnek* fogok mondani egy másiknál, a szerint, hogy nagyobb vagy kisebb számot rendeltünk-e hozzá.

E fordításban az axiómarendszer formuláira, bizonyításaira vonatkozó állítások természetes számokra vonatkozó számelméleti állításoknak felelnek meg. Például ennek az állításnak az igazsága: «*az l -hez rendelt formula a k -hoz rendelt bizonyításnak végformulája*» csak k -tól és l -től függ és ezek kitevőit megnézve, könnyen meggyőződhetünk arról, hogy teljesül-e; jelöljük az idézőjelek közti állítást $\beta(l, k)$ -val. GÖDEL bebizonyította, hogy $\beta(l, k)$ rekurzív reláció.

GÖDEL bizonyításának egyik legfontosabb lépése, hogy megmutatja, hogy minden rekurzív relációhoz konstruálható a rendszerben egy formula, mely — változóinak helyére β_m, β_n, \dots -et helyettesítve — bizonyítható, ha a kérdéses reláció az m, n, \dots helyen teljesül, és megcáfolható, azaz tagadása bizonyítható, ha a reláció nem teljesül e helyen. Nevezzük ezt a formulát a szóbanforgó reláció képének. A formulákat eddig egyszerűen jelsorozatoknak tekintettük; ez a tétel mintegy jelentést rendel némelyikükhöz. Például ha egy kétváltozós formula a β_m, β_n helyen bizonyítható, ha m és n oly számok, hogy az $m < n$ rekurzív reláció teljesül, és cáfolható ha $m < n$ nem teljesül, akkor azt mondhatjuk, hogy az illető formula azt jelenti, azt mondja ki, hogy $m < n$.

Mármost legyen a $\beta(\sigma(l, l), l)$ rekurzív reláció képe egy $\mathfrak{B}_1(x_1, x_2)$ formula. Mit mond ki a reláció? Azt, hogy a $\sigma(l, l)$ -

hez rendelt formula, azaz $F_l(\beta_l)$ a k -hoz rendelt bizonyításnak végformulája. Ha itt $\sigma(l, l)$ helyett $\tau(\sigma(l, l))$ -t írunk, akkor $F_l(\beta_l)$ helyébe $\neg F_l(\beta_l)$ lép, tehát $\beta(\tau(\sigma(l, l)), k)$ azt jelenti, hogy $\neg F_l(\beta_l)$ a k -hoz rendelt bizonyítás végformulája; legyen ennek képe egy $\mathfrak{B}_2(x_1, x_2)$ formula. Ezek segítségével könnyen felírható a rendszerben annak az állításnak a képe, hogy az $F_l(\beta_l)$ formula nem bizonyítható egyszerűbben, mint a saját tagadása:

$$(x_2) \{ \mathfrak{B}_1(x_1, x_2) \rightarrow (Ex_3) [x_3 \leq x_2 \wedge \mathfrak{B}_2(x_1, x_3)] \};$$

ezt a formulát $\mathfrak{B}(x_1)$ -gyel fogom rövidíteni. (Csak egy szabad változója van: x_1).

(Az itt formalizált állítás nem abszurdum: ha $F_l(\beta_l)$ nem bizonyítható, akkor semminél sem bizonyítható egyszerűbben, még a saját tagadásánál sem). Feleljen meg a $\mathfrak{B}(x_1)$ formulának az r szám, azaz legyen $\mathfrak{B}(x_1)$ az $F_r(x_1)$ formula. Mi az értelme $\mathfrak{B}(\beta_r)$ -nek? Ez egyrészt $F_r(\beta_r)$ -rel azonos, másrészt \mathfrak{B} jelentése következtében azt mondja ki, hogy $F_r(\beta_r)$ nem bizonyítható egyszerűbben, mint $\neg F_r(\beta_r)$. Tehát $F_r(\beta_r)$ maga mondja ki ezt: «Én nem vagyok egyszerűbben bizonyítható, mint a saját tagadásom».

Ha előre akartunk volna egy ilyen furesa értelmű formulát felírni, mindenki azt mondta volna, hogy lehetetlen. Itt azonban kifogástalan, konstruktív úton, rekurziókkal definiáltuk a τ , σ függvényeket és a β relációt, ezután egy rekurzív reláció képét, mint egyváltozós formulát, ugyanígy megkonstruáltunk egy β_r helyet, amit a változó helyébe írva, olyan formulához jutottunk, amelynek meglepetésünkre a fenti furcsa értelme van. Mi tehát nem állítottuk egy ilyen formula létezését, hanem megkonstruáltunk egy ilyet. Pontosan megmondhatjuk, hogy melyik ez a formula: ami a jól megkonstruált r számhoz tartozó $F_r(x_1)$ formulából lesz, ha változója helyébe β_r -et helyettesítünk.

Ezekután könnyen bebizonyítható, hogy ez az $F_r(\beta_r)$ formula eldönthetetlen. Mert ha valaki megadna rá egy konkrét bizonyítást, akkor konstatálhatnók, hogy milyen bonyolult ez a

bizonyítás, vagyis milyen számot rendeltünk hozzá; csak véges számú kisebb szám van, tehát az összes egyszerűbb bizonyítások száma véges, nézzük végig ezeket. Ha köztük van $\neg F_r(\beta_r)$ bizonyítása is, ellentmondásra jutottunk, hiszen ekkor $F_r(\beta_r)$ is, $\neg F_r(\beta_r)$ is bizonyítható. Ha nincs köztük $\neg F_r(\beta_r)$ bizonyítása, akkor $F_r(\beta_r)$ mindenesetre egyszerűbben bizonyítható be, mint $\neg F_r(\beta_r)$, pedig $F_r(\beta_r)$ éppen azt mondja ki, hogy ő nem bizonyítható egyszerűbben, mint a tagadása, tehát ezzel bebizonyítottuk, hogy $F_r(\beta_r)$ hamis dolgot állít; azonban az, amit most elmondtam, precíz fogalmazásban kifogástalan bizonyítása $\neg F_r(\beta_r)$ -nek. Ismét bizonyítható volna $F_r(\beta_r)$ is, $\neg F_r(\beta_r)$ is, ami ellentmondás.

Ugyanígy lehet kimutatni, hogy $\neg F_r(\beta_r)$ sem lehet bizonyítható. Mert ha valaki megadna rá egy konkrét bizonyítást, akkor ismét csak véges sok ennél egyszerűbb bizonyítás volna; nézzük végig ezeket. Ha $F_r(\beta_r)$ bizonyítása köztük van, $\neg F_r(\beta_r)$ is, $F_r(\beta_r)$ is bizonyítható, és ez ellentmondás. Ha $F_r(\beta_r)$ bizonyítása nincs köztük, akkor $F_r(\beta_r)$ nem bizonyítható egyszerűbben, mint $\neg F_r(\beta_r)$, de éppen ez az az állítás, amit $F_r(\beta_r)$ kimond. Ez, amit most elmondtam, precíz fogalmazásban kifogástalan bizonyítása $F_r(\beta_r)$ -nek. Tehát ismét bizonyítható volna $\neg F_r(\beta_r)$ is, $F_r(\beta_r)$ is, ez pedig ellentmondás.

Tehát $F_r(\beta_r)$ tényleg eldönthetetlen.

Megjegyzem még, hogy ez az eldönthetetlen probléma alakítható úgy, hogy a logikai jeleken kívül csak az összeadás és a szorzás jele szerepeljen benne; tehát a számelméletben kaptunk ilyen aránylag egyszerű eldönthetetlen problémát.

7. Az így megadott eldönthetetlen probléma önmagában nem érdekes, mesterséges konstrukció, egyenesen erre a célra készült. De rögtön következik belőle egy igen érdekes probléma eldönthetetlensége is. $F_r(\beta_r)$ ugyanis azt mondta ki, hogy ő maga nem bizonyítható be egyszerűbben mint a saját tagadása, ami igazzá válik, ha $F_r(\beta_r)$ egyáltalán nem bizonyítható; ez utóbbit azonban bebizonyítottuk, tehát tulajdonképpen bebizonyítottuk, hogy $F_r(\beta_r)$ igazat mond. De csak úgy bizonyítottuk be, hogy az ellenkező

feltevésből ellentmondást hoztunk ki, tehát felhasználtuk azt a feltevést, hogy a rendszerben nincs ellentmondás. Jelöljük azt az állítást, hogy az axiómarendszer ellentmondásmentes (ezt könnyen fel lehet írni a rendszer jeleivel), \mathfrak{B} -vel, akkor nem magát $F_r(\mathfrak{B}_r)$ -et, hanem ezt bizonyítottuk:

$$\mathfrak{B} \rightarrow F_r(\mathfrak{B}_r).$$

Ha tehát \mathfrak{B} bizonyítható volna a rendszerben, akkor következménye $F_r(\mathfrak{B}_r)$ is bizonyítható volna. Ez azonban — mint láttuk — ellentmondásra vezetne. Így tehát, ha egy axiómarendszer valójában ellentmondásmentes, akkor ez az ellentmondásmentesség nem bizonyítható be oly módszerekkel, melyek a rendszeren belül formalizálhatók. Tehát maga a rendszer ellentmondásmentessége is a rendszer eldönthetetlen problémái közé tartozik.

Éppen ezért kellett GENTZENnek az aritmetika ellentmondásnélküliségének bebizonyításához az ε -típusú transzfinit indukció mint kibuvó, mert ez nem formalizálható a rendszeren belül.¹⁸

8. GÖDEL bizonyítását, mint már említettem, egy speciális axiómarendszerre írta le részletesen, azonban bizonyítás közben csak azt használta fel, hogy az axiómarendszer elég «szabályos» (ebből adódik, hogy a rávonatkozó állításoknak megfeleltethető számelméleti relációk rekurzívok), és elég «kifejezőképes» (t. i. ahhoz, hogy bármely rekurzív relációnak legyen képe a formulák közt). Ezeknek a feltételeknek minden eddig felállított axiómarendszer eleget tesz, mely az aritmetikát tartalmazza. Más és más axiómarendszerhez más és más eldönthetetlen GÖDEL-probléma tartozik, hiszen, ha a kérdéses eldönthetetlen tételt axiómaként hozzávesszük a rendszerhez, ezzel ő eldönthetővé válik, s az új rendszernek más lesz az eldönthetetlen problémája. CHURCH¹⁹ azonban példát adott oly problémára, mely független az alapul vett axiómarendszerrel és semmilyen — a logikát

¹⁸ (K) 105—109. old.

¹⁹ A. CHURCH: A note on the Entscheidungsproblem, J. of symb. logic 1. (1936), 40—41. old. és helyesbítés 1. (1936), 101—102. old.

tartalmazó — axiómarendszerben nem dönthető el, tehát jogosan nevezhető «abszolút eldönthetetlen» problémának. Persze, ez nem lehet olyan típusú, mint a GÖDEL-féle, mely egy egyszerű számelméleti tétel eldöntését kívánja, hiszen, ha volna bizonyítás arra, hogy egy ilyen számelméleti tétel abszolúte nem bizonyítható, ez éppen a kérdéses tétel tagadását bizonyítaná. Ha például egy diofantikus egyenlet megoldhatósága volna a probléma, tudjuk, hogy ha megoldható egy ilyen egyenlet, akkor elég messzire menve a természetes számok sorában, meg is kapjuk egy megoldását; ha tehát valaki bebizonyítaná, hogy a megoldhatóság abszolúte nem bizonyítható, akkor ebben az is benne volna, hogy bármily messze menve a természetes számok sorában, sohasem nyerhető megoldás a diofantikus egyenlet számára, ezzel azonban éppen az egyenlet megoldhatatlansága volna bizonyítva. A CHURCH-féle példa tehát nem egy tétel bebizonyítását vagy cáfolását kívánja, hanem annak eldöntését, hogy egy tételsorozat mely tagjai igazak, melyek nem. (Ilyen típusú probléma a FERMAT-féle, ahogyan a híres WOLFSKEHL-féle végrendeletet megfogalmazza: a 100.000 márkás díj annak adandó ki, aki a FERMAT-tételt bebizonyítja mindazokra a kitevőkre, amelyekre igaz, és megcáfolja azokra, amelyekre nem igaz).

CHURCH egyenesen e célra konstruált egy problémát. Szebb volna, ha egy konkrét számelméleti problémára, például a FERMAT-tételre is alkalmazható lenne a módszer, vagy a következő általánosabb problémára: eldöntendő, hogy mely diofantikus egyenletek oldhatók meg. Bár egyelőre még nem vihető át a módszer ilyen problémákra, mégis egyszerűbb ezeken szemléltetni CHURCH gondolatmenetét, mint az ő sokkal bonyolultabb, mesterséges problémáján. Én tehát a

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (P \text{ polinom})$$

diofantikus egyenletek megoldhatóságának problémáján mutatom be CHURCH módszerét, kiemelve, hogy mi hiányzik ahhoz, hogy erre is alkalmazható legyen, a folytatást azonban úgy mondva el, mintha megvolna az, ami hiányzik.

A szóbanforgó probléma egy megoldása abban áll, hogy megadunk egy utasítást, mely minden P polinomhoz 1-et vagy 0-t rendel a szerint, hogy a megfelelő diofantikus egyenlet (t. i. $P = 0$) megoldható-e vagy nem oldható meg; persze véges számú lépésben eldönthetőnek kell lenni, hogy az utasítás mit rendel egy-egy adott polinomhoz. Minthogy megszámlálható sok polinom van és véges számú lépésben meg lehet határozni egy adott polinomhoz a sorszámát a polinomok szokásos

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots \quad (P)$$

megszámlálásában és fordítva is, egy sorszámhoz a hozzátartozó polinomot, ezért egy ilyen utasítás egy olyan függvény megadásában áll, melynek minden adott helyen véges számú lépésben kiszámítható az értéke és amely az n helyen az 1 vagy 0 értéket veszi fel, a szerint, amint a polinomok megszámlálásánál a P_n -hez tartozó $P_n = 0$ diofantikus egyenlet megoldható vagy sem. (A minden egyes helyen véges számú lépésben kiszámítható függvény fogalmát sikerült precizírozni; mint minden precizírozásnál, itt sem tökéletesen biztos, hogy a precíz fogalom pontosan fedi az érzésszerűt legáltalánosabb ilyen függvényfogalmat, de ezt nagyon valószínűvé teszi, hogy az utóbbi időben többen, egymástól függetlenül, különböző utakon akartak megadni ily legáltalánosabb függvénydefiníciókat,²⁰ és utólag minde fogalmakról be lehetett bizonyítani, hogy ekvivalensek. Itt nyilván a rekurzív függvények általánosításáról van szó, ezért e precizított függvényfogalmat általános rekurzív függvénynek nevezzük).

A csak 0 és 1 értékeket felvevő általános rekurzív függvényeket karakterisztikus függvényeknek fogom nevezni. Bármely karakterisztikus függvény rendelhető számelméleti problémánk

²⁰ Lásd S. C. KLEENE: General recursive functions of natural numbers, Math. Ann. 112 (1936), 727–742. old; S. C. KLEENE: λ -definability and recursiveness, Duke mathematical journal 2 (1936), 340–353. old; A. M. TURING: Computability and λ -definability, J. of symb. logic, 2 (1937), 153–163. old; D. HILBERT und P. BERNAYS. Grundlagen der Mathematik, II. kötet, Berlin (1939), Supplement II.

egy-egy állítólagos megoldásához, amely azt állítja, hogy a $P_n = 0$ diofantikus egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha a kérdéses karakterisztikus függvény értéke az n helyen 1. Bebonyolítandó, hogy egyikük sem *helyes* megoldás, azaz minden karakterisztikus függvényhez meg lehet adni egy diofantikus egyenletet, amelyről el tudjuk dönteni, hogy megoldható-e, vagy nem, de ha megoldható, akkor éppen 0-t, s ha nem, akkor éppen 1-et rendel hozzá, illetve sorszámához az illető karakterisztikus függvény.

Ennek megvalósításához két gondolat vezet. Az első — és ez az, amit a most tárgyalt problémára ezideig nem sikerült átvenni — abban áll, hogy azt, hogy egy általános rekurzív függvény értéke egy adott helyen 0, fogalmazzuk át a mi problémánkra. A tárgyalt esetben ez pontosabban a következőt jelenti: az kellene, hogy minden $g(n)$ általános rekurzív függvényhez és minden n számhoz hozzá lehessen rendelni egy polinomot úgy, hogy $g(n) = 0$ akkor és csak akkor álljon, ha a polinomnak megfelelő diofantikus egyenlet megoldható; amellet az is kell, hogy a polinom n -től is (ne csak változóitól, amelyekre nézve meg kell oldani a diofantikus egyenletet) polinomiálisan függjön. Tehát: minden $g(n)$ általános rekurzív függvényhez legyen egy olyan $P^{(g)} = P^{(g)}(t; x_1, x_2, \dots, x_r)$ polinom, hogy $g(n) = 0$ ekvivalens legyen azzal, hogy van oly x_1, x_2, \dots, x_r , amelyekre $P^{(g)}(n; x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$. A továbbiakban felteszem, hogy ez a követelés teljesül. Ha van olyan n argumentum, melyre ez a $P^{(g)}$ polinom a (P) sorozat n -edik tagjával, P_n -nel azonos, akkor $g(n)$ nem lehet a problémánk megoldása, mert ha az volna, erre az n argumentumra is azzal volna ekvivalens $g(n) = 0$, hogy *nincs* olyan x_1, x_2, \dots, x_r , amelyekre $P_n(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$. A továbbiakban azt fogom megmutatni, hogy minden karakterisztikus $g(n)$ függvényhez található ilyen n argumentum. Ehhez kell a másik gondolat, mely a halmazelmélet átlós módszerére emlékeztet.

A fenti (P) megszámlálásban szerepeljenek a konstansok (mint 0-változós függvények) is; viszont legyen

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots \quad (Q)$$

a legalább egyváltozós polinomok egy megszámlálása; s ha Q_n első változója helyébe a konstans m számot tesszük, a keletkező eggyel kevesebb változós polinom sorszáma a P -k között legyen $h(m, n)$; azaz minden m -re és n -re $P_{h(m, n)}$ eggyel kevesebb változós mint Q_n , és a változók (t. i. x_1, x_2, \dots, x_r) bármely értékére

$$Q_n(m, x_1, x_2, \dots, x_r) = P_{h(m, n)}(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Ha a Q -k megszámlálása is a szokásos (a P -ből a konstansok kihagyásával adódó), akkor könnyen belátható, hogy h rekurzív függvény.

Mármost legyen adva számelméleti problémánk egy állítólagos megoldása, amiről be akarjuk bizonyítani, hogy nem helyes megoldás; a megfelelő karakterisztikus függvény legyen $g(n)$ úgy, hogy tehát az állítólagos megoldás úgy szól, hogy $P_n = 0$ akkor és csak akkor oldható meg, ha $g(n) = 1$ (különben pedig $g(n) = 0$). Tekintsük a $g(h(n, n))$ függvényt. (Ha a $g(h(m, n))$ függvény értékeit kétdimenziósan rendezzük:

$$\begin{array}{l} g(h(1, 1)), \quad g(h(2, 1)) \quad , \quad g(h(3, 1)) \quad , \dots \\ g(h(1, 2)) \quad , \quad g(h(2, 2)), \quad g(h(3, 2)) \quad , \dots \\ g(h(1, 3)) \quad , \quad g(h(2, 3)) \quad , \quad g(h(3, 3)), \dots \\ \dots \end{array}$$

akkor $g(h(n, n))$ éppen a főátló szolgáltatja függvény). Nyilván g -vel és h -val együtt $g(h(n, n))$ is általános rekurzív függvénye n -nek. Ehhez is tartozna tehát egy $P^{(g(h))}(t; x_1, x_2, \dots, x_r)$ polinom úgy, hogy $g(h(n, n)) = 0$ ekvivalens azzal, hogy

$$P^{(g(h))}(n; x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$$

megoldható az x -ekre. Ha n helyébe is változót írunk, legyen $P^{(g(h))}(x_1; x_2, \dots, x_{r+1})$ a (Q) sorozat polinomjai közül az s -edik, azaz $P^{(g(h))}(x_1; x_2, \dots, x_{r+1}) = Q_s(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$; akkor a h függvény definíciója szerint bármely n -re $P^{(g(h))}(n; x_1, x_2, \dots, x_r) = Q_s(n, x_1, \dots, x_r) = P_{h(n, s)}(x_1, x_2, \dots, x_r)$. E szerint $g(h(n, n)) = 0$ ekvivalens azzal, hogy $P_{h(n, s)} = 0$ megoldható; speciálisan $n = s$ -re $g(h(s, s)) = 0$ azzal, hogy $P_{h(s, s)} = 0$ megoldható. Azonban $g(h(s, s))$

egy konkrét általános rekurzív függvény értéke egy konkrét helyen, tehát kiszámítható és így véges számú lépésben kideríthető, hogy 0-e vagy 1 (más értéket a feltevés szerint g nem vesz fel); ha 0, akkor tehát bebizonyult, hogy $P_{h(s, s)} = 0$ megoldható, ha 1, akkor meg nem oldható meg, pedig ha $g(n)$ számelméleti problémáknak helyes megoldásához tartozna, akkor fordítva lenne: $g(n)$ oly és csak oly n argumentumokra volna 1, melyekre $P_n = 0$ megoldható.

Amint említettem, a vázolt gondolatot nem a diofantikus egyenletek megoldhatósági problémáján, hanem egy egyenesen e célra készült önmagában nem érdekes problémán sikerült CHURCHnek keresztülvinnie, de megmutatta, hogy következik belőle egy önmagában is rendkívül érdekes probléma eldönthetlensége: az u. n. «Entscheidungsproblem»-é.²¹ Ennek általános megoldhatóságában alig is hitt valaki, mégis frappáns eredmény, hogy megoldhatatlanságát matematikai módszerekkel be lehetett bizonyítani.²²

9. Dolgozatom tárgya az axiomatikus módszer gyarlóságainak kimutatása volt. Kiderült, hogy az axiomatikus módszer sohasem fogja meg szorosan azt, amit megfogni akar és hogy minden axiómarendszernek vannak eldönthetetlen problémái. Ez elég pesszimista képet ad HILBERT biztonságérzésével szemben, aki szerint minden matematikust ez a hit vezet: «Itt a probléma, keresd a megoldását, tisztán gondolkodás útján megtalálhatod, mert a matematikában nincs ignorabimus!» Én mégis azt hiszem,

²¹ (K) 84—85. old.

²² KALMÁR LÁSZLÓ vette észre a hasonlóságot a CHURCH-féle megoldhatatlan probléma és a diofantikus egyenletek megoldhatóságának problémája között; e hasonlóság alapján igyekszik bebizonyítani az utóbbi, konkrét számelméleti, probléma megoldhatatlanságát is. Erre vonatkozó, még befejezetlen, vizsgálatait szíves volt rendelkezésemre bocsátani és ezzel megkönnyítette számomra a CHURCH-féle gondolatmenet vázolását. Ugyancsak KALMÁR mutatta meg egy eddig még nem publikált dolgozatában, hogy a CHURCH-féle gondolatmenet közvetlenül alkalmazható az eldöntési probléma megoldhatatlanságának bebizonyítására, míg CHURCH ezt közvetve, az ő komplikáltabb problémája eldönthetlenségének felhasználásával mutatta meg.

hogy a vázolt bizonyítások oly szépek, hogy nem kelthetnek pesszimizisztikus hangulatot. A helyzet tisztázása nem szegényebbé válást, hanem gazdagodást jelent. És, hogy ezt a helyzetet a legtisztább matematikai eszközökkel sikerült megvilágítani, az mégiscsak a matematika és speciálisan a HILBERT-féle bizonyításelmélet diadala és legszebb teljesítményei közé tartozik. Hogy az «ignorabimus»-t precízen be lehet bizonyítani, az talán nem kevésbé szép, mintha a matematikában tényleg nem volna «ignorabimus». Hadd fejezzem be CANTOR szavaival, melyek a halmazelmélet támadóinak szóltak: «Könnyen megeshetik velük, hogy éppen ott, ahol halálos sebet akarnak ejteni a tudományon, ennek egy új ága virágzik ki hirtelen a szemük előtt, ha lehet még szebb, és gazdagabb jövőt ígérő minden régebbinél».

Péter Rózsa.

DIE SCHRANKEN DER AXIOMATISCHEN METHODE.*

In der Mathematik bedarf man zur Definition eines Begriffes andere Begriffe, zum Beweis eines Satzes andere Sätze. In jedem Zweig der Mathematik müssen dabei gewisse Sätze als Grundsätze, Axiome, gewisse Begriffe als Grundbegriffe angenommen werden; letztere werden durch die Axiome sozusagen implizite definiert. Es ist nicht zu erwarten, dass diese Definition die Grundbegriffe eindeutig bestimmt, diese haben ja meist gar nicht einen exakt-eindeutigen Sinn; doch es ist eine naturgemässe Forderung, dass das Axiomensystem die betrachtete Wissenschaft möglichst *vollständig* vertreten soll.

* Vortrag, gehalten am 8. März 1940. im Kolloquium des Instituts für Theoretische Physik der Universität zu Budapest, als Fortsetzung eines ebenda gehaltenen Vortrags von LÁSZLÓ KALMÁR über Zielsetzungen und Ergebnisse der HILBERTSchen Beweistheorie; s. die vorangehende Arbeit in dieser Zeitschrift. In der Arbeit von KALMÁR wird die axiomatische Methode, der Aussagenkalkül und der logische Funktionenkalkül eingehend besprochen, darum lasse ich die auf diese bezügliche Einleitung meines Vortrags weg, dafür behandle ich eingehender das absolut unentscheidbare Problem von CHURCH.

Die Forderung der Vollständigkeit lässt sich auf verschiedene Weisen präzisieren. Z. B. als die Forderung, dass das Axiomensystem *monomorph* sein soll, d. h., dass sich die Elemente und Beziehungen zweier Modelle, welche beide dem Axiomensystem genügen, so einander zuordnen lassen sollen, dass falls dabei die Elemente a, b, c, \dots in a', b', c', \dots die Beziehung R in R' übergehen und zwischen den Elementen a, b, c, \dots die Beziehung R besteht, so zwischen a', b', c', \dots die Beziehung R' bestehen soll. Seit langem hatten die Mathematiker an dem Monomorphismus der verschiedenen mathematischen Axiomensysteme geglaubt. Diese Glaube wurde durch SKOLEM in zwei Richtungen widerlegt. SKOLEMS Ergebnis lässt sich so zusammenfassen, dass *die axiomatische Methode einerseits zu wenig, andererseits zu viel ergreift*. Zu wenig, in folgendem Sinne: mit Benutzung eines LÖWENHEIMschen Satzes hat SKOLEM in 1922. bewiesen, dass es zu einem jeden widerspruchsfreien Axiomensystem ein abzählbares Modell gibt, welche diesem genügt; dies gilt also z. B. auch für ein beliebiges Axiomensystem der Mengenlehre. Da unter den Grundbegriffen nichts inhaltliches zu verstehen ist, ist kein Grund da, unter der Gesamtheit der Mengen etwas anderes zu verstehen, als SKOLEMS abzählbares Modell und so kann es nicht gelingen, das Überabzählbare exakt-axiomatisch zu ergreifen. Der inhaltliche Mengenbegriff liefert freilich auch ein gutes, und zwar überabzählbares Modell für das Axiomensystem; wird er zugelassen, so gibt es für das System sogar betreffs der Mächtigkeit verschiedene Modelle, also ist dieses gewiss nicht monomorph. Dasselbe gilt auch für die möglichen Axiomensysteme der reellen Zahlen, und für die der Geometrie.

Andererseits hat SKOLEM in 1933. bewiesen, dass einem beliebigen Axiomensystem für die natürliche Zahlenreihe, so eng man es auch fassen will, immer auch Modelle genügen, welche einen höheren Ordnungstyp als ω besitzen. Hier ergreift also die axiomatische Methode zu viel.

Eine andere Fassung der Forderung der Vollständigkeit ist die der *Kategorizität*. Ein Axiomensystem heisst kategorisch, wenn jeder Satz, der sich mittels seiner Grundbegriffe formulieren lässt, in ihm entweder beweisbar, oder widerlegbar ist. Das ist eine sehr starke Forderung; für das Bruchstück der Arithmetik, welche als einzige Operation die Addition enthält, wurde ihr Bestehen von PRESBURGER bewiesen; wird jedoch auch die Multiplikation zugelassen, so lassen sich auch bis heute nicht entschiedene Sätze im System formulieren, wie z. B. der grosse FERMATSche Satz, und bereits diese Tatsache machte die Beweisbarkeit der Kategorizität sehr zweifelhaft. Dennoch

hat die Mehrheit der Mathematiker zu jeder Zeit in der Entscheidbarkeit der verschiedenen mathematischen Probleme geglaubt. Dieser Glaube wurde durch GÖDEL und CHURCH widerlegt. GÖDEL gab in 1931. ein arithmetisches Problem an, von dem er mit tadellosen Mitteln bewiesen hat, dass es im üblichen Axiomensystem der Arithmetik, ja sogar auch in einem viel weiteren System *unentscheidbar* ist. Er bewies auch, dass sich die Widerspruchsfreiheit des Systems im selben System formulieren, doch nicht entscheiden lässt. Von seinem speziellen Axiomensystem nützte er dabei nur solche Eigenschaften aus, die sämtlichen, für die Arithmetik aufgestellten Axiomensystemen zukommen, also gibt es in jedem solchen System unentscheidbare Probleme, freilich in jedem System andere.

Nun gab CHURCH in 1936. ein Beispiel für ein Problem an, welches unabhängig von einem zugrunde gelegten Axiomensystem unentscheidbar ist, also mit recht *absolut-unentscheidbar* genannt werden kann. Es folgt daraus auch die Unentscheidbarkeit des logischen Entscheidungsproblems.

Es hat sich also herausgestellt, dass die Axiomensysteme nie genau das ergreifen können, was sie ergreifen wollen, und dass es in allen Systemen unentscheidbare Probleme gibt. Diese Ergebnisse widerlegen zwar HILBERTS Glauben: «In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus»; dass sich aber diese Tatsachen mit den HILBERTSchen rein mathematischen Methoden klarlegen liessen, dass man das «Ignorabimus» in der Mathematik mit mathematischen Mitteln streng beweisen kann, ist vielleicht nicht weniger schön, als wenn es in der Mathematik kein «Ignorabimus» gäbe.

Rózsa Péter.

KONJUGÁLT KÚPSZELETHÁRMASOK ÉS KÜLÖNÖS ESETEIK.

Geometria — geometricae.

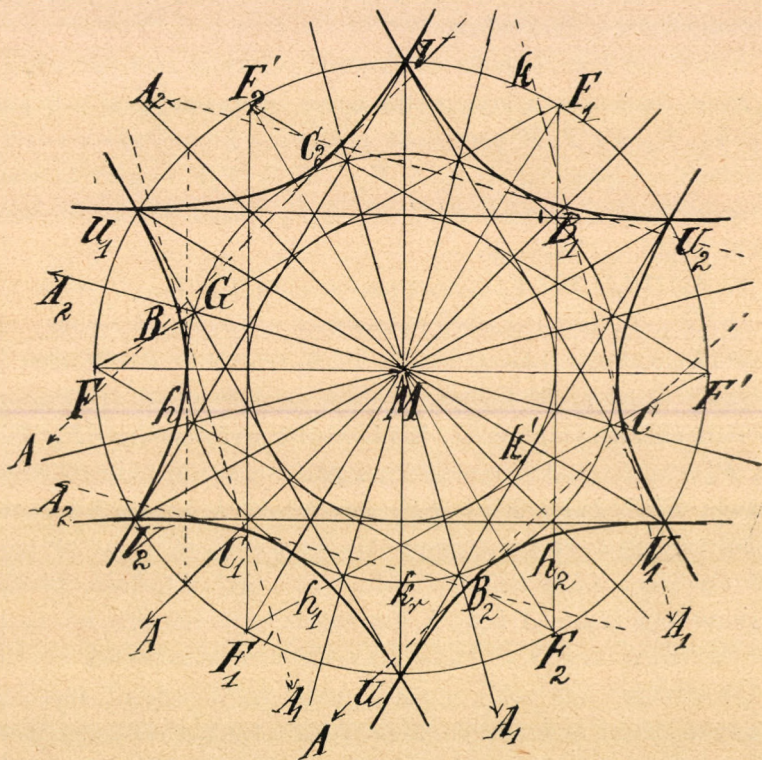
Konjugált kúpszelethármasnak oly három kúpszeletet nevezünk, amely közül bármely kettő poláris alakzata egymásnak a harmadik kúpszeletre vonatkozólag. Az ily kúpszelethármasoknak legegyszerűbb, legtetszetősebb és legtanulságosabb alakja három egyenoldalú hiperbola, amelyből projiciálással minden más konjugált kúpszelethármas lezármasztatható, mint azt a következőkben bemutatjuk.

*

1. Messe egy tetszészerinti egyenoldalú hiperbolával közös M középpontú és annak F, F' gyújtópontjain átmenő r sugarú k kör a hiperbola egyik és másik ágát az U_1, V_2 , illetve U_2, V_1 pontokban (1. ábra). Ha a jelölés olyan, hogy a hiperbola és a kör közös U_1U_2, V_1V_2 húrja merőleges a hiperbola melléktengelyére, akkor a hiperbola érintői az U_1, U_2 és a V_1, V_2 pontokban annak melléktengelyén levő körátmérő U , ill. V végpontjában találkoznak. Ha az F gyújtópontból a hiperbola UU_1 érintőjére bocsátott merőlegesnek talppontja a G , akkor $MG = r\sqrt{2}/2$, azaz egyenlő a hiperbola félfőtengelyével, és mert az F, G, M, U pontok egy körön vannak ($\angle MGU = \angle MFU = 45^\circ$): a k kör M középpontjának távolsága az UU_1 húrtól egyenlő a k kör sugarának felével, és így az $U_1MU = 120^\circ$, amiből látható, hogy az U_1V_2, U_2V_1 húrok a k kör sugarával egyenlők, tehát az $UV_1U_2VU_1V_2$ a körbe írt szabályos hatszög, és UU_1U_2, VV_1V_2 abba írt két szabályos háromszög.

A h hiperbolának F, F' gyújtópontjaihoz tartozó két vezérvonala a középponttól $r/2$ távolságra van, tehát a k kört oly F'_1 ,

F'_2 , ill. F_1 , F_2 pontokban metszik, hogy az $FF_1F_2F'F_1F'_2$ szintén a körbe írt szabályos hatszög és FF_1F_2 , $F'F_1F'_2$ két szabályos háromszög. E két háromszögnek és az előbbi két háromszögnek oldalai egy a k -val közös középpontú k' körnek érintői, és a két kör egymásnak poláris alakzata arra a k_r valós körre vonatkozólag,



1. ábra.

amely a h hiperbolát a főtengelyen levő csúcsokban érinti, tehát ugyancsak poláris alakzata arra a k_i képzetes körre is, amelynek valós ábrázolása a k_r kör és amely tehát a h hiperbolát a melléktengelyen levő két konjugált képzetes csúcsokban érinti, amennyiben a hiperbolának és a k_i körnek a melléktengelyen levő konjugált pólusok involúciója egybeesik.

Úgy a k_r valós, mint a k_i képzetes körnek az a tulajdonsága,

hogy a h hiperbolát önmagába polarizálja, mert az U_1, V_1, U_2, V_2 hiperbolapontoknak polárisai a k_r valós körre vonatkozólag a VV_2, UU_2, VV_1, UU_1 , és a k_i képzetes körre vonatkozólag az UU_2, VV_2, UU_1, VV_1 egyenesek, amelyek a hiperbolát a V_2, U_2, V_1, U_1 , ill. az U_2, V_2, U_1, V_1 pontokban érintik. A hiperbola érintői a valós és képzetes csúcsokban szintén érintői a k_r , ill. k_i körnek ugyanezekben a pontokban.

A k, k' körök pedig poláris alakzatai egymásnak nemcsak a k_r és k_i körre, hanem a h hiperbolára nézve is, amennyiben a k kör $U_1, V_1, U_2, V_2, F, F'$ pontjainak polárisai a h hiperbolára vonatkozólag: a hiperbolának U_1U, V_1V, U_2U, V_2V érintői és ama gyújtópontokhoz tartozó $F_1'F_2'$, ill. F_1F_2 vezérvonalak, amelyek mind érintői a k' körnek.

2. Az $UV_1U_2VU_1V_2$ hatszögnek még az $U_2, V_2; U, V$ és az $U, V; U_1, V_1$ szembenfekvő csúcsain át is fektethető egy-egy az előbbi h hiperbolával kongruens h_1 , ill. h_2 hiperbola, amely tehát a h hiperbolának az M középpont körül egyik és másik értelemben 60° -kal elforgatott helyzete. E hiperbolák gyújtópontjai $F_1, F_1'; F_2, F_2'$ és vezérvonalai, mint azoknak polárisai az illető hiperbolákra nézve: $F_2'F', F_2F; F'F_1', FF_1$ egyenesek. A három hiperbola közül bármelyiknek két aszimptótája felezi azt a 60° , ill. 120° szöveget, amelyet a másik két hiperbolának nem együvé tartozó egy-egy aszimptótája képez. A h, h_1, h_2 hiperbolák közül bármely kettőnek két egymásra merőleges közös átmérője van, amelyeknek egyike a hiperbolákat két valós, a másik pedig két konjugált képzetes pontban metszi, és amelyekre nézve tehát a két hiperbola szimmetrikus, végre a két új hiperbola h_1, h_2 az előbbi k, k', k_r, k_i körök irányában épp úgy viselkedik, mint az előbbi pontban jelzett h hiperbola.

A h, h_1 hiperbolák közös U_2, V_2 pontjainak polárisai a h_1 hiperbolára nézve ennek U_1U_2, V_1V_2 érintői, és ama hiperbolák közös UU_1, VV_1 érintőinek pólusai a h_1 hiperbolára nézve az U, V érintőpontok. Ezért a h hiperbolának poláris alakzata a h_1 hiperbolára vonatkozólag érinti az U_1U_2 és V_1V_2 egyenest és átmegy az U és V ponton. Minthogy továbbá a h hiperbola U_2U, V_2V érintőinek a h_1

hiperbolára vonatkozó pólusa az U_1, V_1 pont: azért a h -nak poláris alakzata a h_1 hiperbolára vonatkozólag ez utóbbi pontokon megy át. Ugyanígy érinti az UU_2, VV_2 egyenes, mint a h hiperbola U_1, V_1 pontjának h_1 hiperbolára vonatkozó polárisa amannak erre vonatkozó poláris alakzatát. Egybevéve: a h hiperbolának poláris alakzata a h_1 hiperbolára vonatkozólag átmegy az U, V, U_1, V_1 pontokon és érinti ezekben az $UU_2, VV_2, U_1U_2, V_1V_2$ egyeneseket, tehát a h_2 hiperbola.

Ebből következik:

A szabályos hatszög két-két szembenfekvő csúcspárján egy-egy egyenoldalú hiperbola, és így összesen három egyenoldalú hiperbola vezethető át; e hiperbolák közül bármely kettő poláris alakzata egymásnak a harmadikra vonatkozólag.

Ilyen tulajdonságú három kúpszeletet általában *k o n j u g á l t k ú p s z e l e t h á r m a s n a k*, jelen esetben: *k o n j u g á l t e g y e n o l d a l ú h i p e r b o l a h á r m a s n a k* nevezünk.

3. A konjugált egyenoldalú hiperbolahármas hiperboláinak három gyújtópontpárja épp úgy mint azoknak három metszőpontpárja a k körbe írt szabályos hatszögnek hat csúcsa; e két hatszög pedig szimmetrikus egymáshoz a három hiperbola bármelyik aszimptótájára nézve. Ebből következik, hogy a hiperbolák bármelyikének két gyújtópontja konjugált pólus a hiperbolahármas másik két hiperbolájára vonatkozólag. A h hiperbola F gyújtópontjának polárisa a h hiperbolára nézve, a másik két hiperbolának, h_1, h_2 -nek egy-egy gyújtópontján, F'_1 és F'_2 -n megy át, amiért is az F, F'_1 és az F, F'_2 konjugált pólus a h, h_1 , ill. a h, h_2 hiperbolákra nézve, tehát az F pont polárisa a h_1 és h_2 hiperbolákra vonatkozólag az $F'F'_1$, ill. $F'F'_2$ egyenes. Ezért:

A konjugált egyenoldalú hiperbolahármas bármely hiperbolája egyik gyújtópontjának polárisa (vezérvonalának pólusa) a hármasnak egy másik hiperbolájára vonatkozólag a harmadiknak egyik vezérvonala (gyújtópontja).

4. Messe a h, h_1, h_2 hiperbolának egy-egy aszimptótája megfelelőleg a h_1, h_2, h hiperbolát a $B_1, C_1; B_2, C_2; B, C$ pontokban,

és legyen olyan a jelölés, hogy e pontok csúcsai a $BC_1B_2CB_1C_2$ szabályos hatszögnek, tehát BC , B_1C_1 , B_2C_2 főátlói oly átmérői a h , h_1 , h_2 hiperboláknak, amelyek ezeknek főtengelyeivel 15° szöget képeznek és így e főátlók páronként konjugált átmérői annak az egyenlő oldalú hiperbolának, amelynek a harmadik egy aszimptótája. E hatszögnek szembenfekvő oldalai: BC_1 , CB_1 ; B_1C_2 , C_1B_2 ; B_2C , C_2B megfelelőleg parallel érintői a h , h_1 , h_2 hiperboláknak a B , C ; B_1 , C_1 ; B_2 , C_2 szembenfekvő csúcsokban, amelyek konjugált pólusai megfelelőleg a h_1 , h_2 , h hiperboláknak. Ha még a h , h_1 , h_2 hiperboláknak a B_1C_1 , B_2C_2 , BC aszimptótáin levő végtelen távoli pontokat A , A_1 , A_2 -vel jelöljük, akkor azt látjuk, hogy az ABC , $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ háromszög megfelelőleg a h , h_1 , h_2 hiperbolába be van írva, a h_2 , h , h_1 hiperbola köré van írva és poláris háromszöge a h_1 , h_2 , h hiperbolának, és hogy végre mindegyik háromszög a másik kettő közül az egyikbe be van írva és a másik köré van írva.

De ismeretes, hogy ha két kúpszelet oly helyzetű, hogy az egyikbe egy háromszög írható, amely a másik köré van írva, akkor az első kúpszeletbe ∞^1 háromszög írható, amely a második köré van írva. Így tehát a h hiperbola tetszésszerűn A pontjából a h_2 hiperbolához kisugárzó érintők, amelyek a h_2 -t annak a B_2 , C_2 pontjaiban érintik és a h -t a C , B pontokban metszik, oly ABC háromszöget határoznak meg, amelynek BC oldala szintén érintője a h_2 hiperbolának annak egy A_2 pontjában és amely poláris háromszöge a h_1 hiperbolának. A h hiperbolának érintői ezekben az A , B , C pontokban a h_1 hiperbolát a B_1 , C_1 ; C_1 , A_1 ; A_1 , B_1 pontokban metszik és így az $A_1B_1C_1$ a h_1 -be írt és a h köré írt háromszög és poláris háromszöge a h_2 hiperbolának, míg a h_2 hiperbolába írt előbbi $A_2B_2C_2$ háromszög a h_1 köré van írva és poláris háromszöge a h -nak. Mindezekből következik:

A konjugált egyenlő oldalú hiperbolahármas bármelyik hiperbolájába ∞^1 háromszög írható, amely egy másik hiperbolája köré van írva és poláris háromszöge a harmadiknak, továbbá: bármelyik hiperbolájának érintői a másik két hiperbolát egymást harmonikusan elválasztó pontpárokból metszik; végre: bármelyik hiperbolájának pontjaiból

a másik kettőhöz kisugárzó érintőpárok szintén harmonikus sugár-
négyest alkotnak.

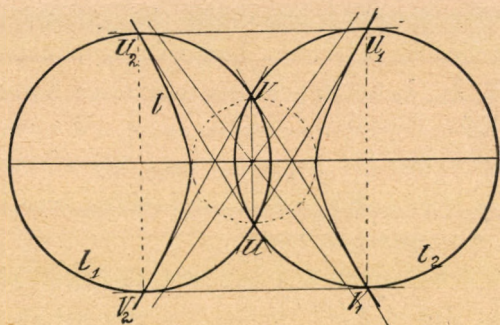
5. A konjugált egyenoldalú hiperbolahármasnak projekciója (képe) egy síkján kívül levő O pontból projiciálva valamely S síkra egy általános konjugált kúpszelethármas, amelynek megmarad a projiciált alakzatnak az a lényeges tulajdonsága, hogy bármely két kúpszelete egymásnak poláris alakzata a harmadik kúpszeletre vonatkozólag, minthogy a polarizálás a harmonikus négyesre van állapítva, amely nem vész el a projiciálással.

Vizsgáljuk meg, milyenek a konjugált kúpszelethármasnak kúpszeletei, azaz a konjugált egyenoldalú hiperbolahármasnak képei. Jelöljük e végből az S képsíkkal parallel és az O ponton átmenő D síknak metszését a hiperbolák síkjával, d -vel. Mint ismeretes, a d egyenesnek helyzete a konjugált egyenoldalú hiperbolahármasnak, h , h_1 , h_2 -nek hiperbolái irányában határozza meg a képeknek alakját. Éspedig: a szerint, amint a d egyenes valamely hiperbolát két valós, két képzetes vagy két egybeeső pontban metsz, annak a képe az S képsíkon megfelelőleg hiperbola, ellipszis (esetleg kör) vagy parabola lesz.

Vegyük fel tehát előbb a d egyenest az egyik, pl. a h hiperbolának főtengelyében, FMF' -ben és forgassuk azt annak M középpontja körül. Mindaddig, míg a forgó d egyenes nem jut a h_1 , h_2 hiperbolák egyikének aszimptótájába, azaz nem fordul el az FMF' helyzetből 15° -kal, addig nem metszi a h_1 , h_2 hiperbolákat valós pontokban csupán a h hiperbolát, s ezért csak a h hiperbolának képe lesz hiperbola, a másik kettőé pedig ellipszis. Ha a d egyenes már 15° -kal elfordult, tehát a h_1 , h_2 hiperbolák egyikének valamelyik aszimptótájában van, akkor annak a hiperbolának a képe parabola lesz, a másik hiperboláé még mindig ellipszis. Ha aztán tovább forgatjuk a d egyenest az M pont körül, míg a h hiperbolának aszimptótájába nem jut, tehát 45° -ig, akkor a h hiperbola képe lesz parabola a h_1 , h_2 képének egyike hiperbola, a másiké pedig ellipszis. Ezentúl forgatva a d egyenest, a h hiperbola képe is ellipszis lesz, míg a d 75° -ig el nem fordult az FMF' egyenestől, amidőn a h_1 , h_2 hiperbolák egyikének képe parabola, a másiké

hiperbola és a h képe ellipszis marad. Ha végre a d egyenest eredeti helyzetétől 90° -ig elforgattuk: a h_1, h_2 hiperbolák képe hiperbola, a h -é pedig továbbra is ellipszis. E szerint: a h, h_1, h_2 hiperbolák egyikének képe egy S síkon a hiperbolák M középpontján átmenő és az S síkkal párhuzamos síknak valamely O pontjából projiciálva mindig hiperbola lesz, míg a másik kettőnek képe lehet két ellipszis, vagy egy ellipszis és egy parabola, vagy végül egy ellipszis és egy hiperbola.

Ha a d egyenest a hiperbolák középpontján átmenő előbbi d egyenesekkel parallel helyzetben veszem fel, akkor először: az FMF' egyenessel parallel helyzetű d egyenes a h hiperbolát metszi,



2. ábra.

a h_1, h_2 -t pedig vagy két-két konjugált képzetes vagy valós pontban metszi, vagy egy-egy pontban érinti. Ezért a h, h_1, h_2 hiperbolák képe ezekben az esetekben is mindig egy hiperbola és még vagy két ellipszis vagy két hiperbola, vagy két parabola lesz.

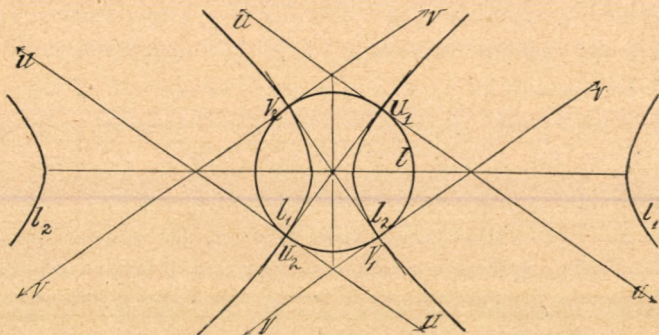
Ha pedig a d egyenes nem parallel a h hiperbola FMF' főtengetelyével (sem egy másik hiperbola főtengetelyével), akkor a másik két hiperbola közül vagy csak egyet, vagy mind a kettőt metszi valós pontokban vagy egyet érinthet is, s ezért hiperbolák képe közül egy lehet parabola, a másik kettő pedig vagy ellipszis és hiperbola, vagy két hiperbola lesz. Mindezt egybefoglalva mondhatjuk:

A konjugált kúpszelethármas kúpszeletei közül egyik mindig

hiperbola, a másik kettő pedig lehet különböző vagy egyenmő bármilyen a három kúpszelet közül.

6. A konjugált kúpszelethármasoknak a három egyenoldalú hiperbolán kívül következő különlegességei lehetnek.

a) Két egymás 60° alatt metsző egyenlő sugarú l_1, l_2 kör (2. ábra) és azok közös érintőinek négy érintőpontján átmenő l hiperbola, amelynek középpontja a körök közös húrjának felezőpontja és főtengelye ama húrra a felezőpontban merőleges és egyenlő a körök sugarával, tehát aszimptótái e főtengelyhez olyan szög alatt hajlanak, amelynek tangense $\sqrt{2}$. Ez a hiperbola a két kört is 60° alatt metszi és érintői e metszőpontokban a köröknek is érintői ezeknek



3. ábra.

metszőpontjaiban. Ilyen lesz ugyanis a képe az 1. ábra h_1, h_2, h egyenoldalú hiperboláinak, ha azokat bármilyen, a h hiperbola F, F' gyújtópontjától $FM\sqrt{2}$ távolságra levő és a hiperbolák síkján kívül fekvő O pontból projiciáljuk egy az $OFF' = D$ síkkal parallel S síkra.

Ha az O pont távolsága az F, F' pontoktól $FM\sqrt{\frac{3}{2}}$ akkor a h hiperbola képe egyenoldalú, a h_1, h_2 pedig két ellipszis, amelyek tengelyei $\sqrt{2}:1$ viszonyban vannak.

b) Egy más különleges konjugált kúpszelethármas két szimmetrikus hiperbola l_1, l_2 és egy l kör Ezt megkapjuk (3. ábra), ha egy l kör köré egy oly rombuszt írunk, amelynek átlói $1:\sqrt{2}$ viszonyban vannak és a rombus hosszabb átlójának végpontjaiba ütköző

oldalakat egy-egy oly hiperbola l_1, l_2 aszimptótáinak tekintjük, amelynek félfőtengelye az l kör átmérőjével egyenlő és ezen a hosszabb rombusátlón van. E hiperbolák egymást az aszimptóták végtelen távoli U, V pontjaiban metszik, és az l_1 (ill. l_2) hiperbolának egy ága az l kört abban az U_2, V_2 (U_1, V_1) pontban metszi derékszög alatt, amelyben azt az l_2 (l_1) hiperbola két aszimptótája UU_2, VV_2 (UU_1, VV_1) érinti.

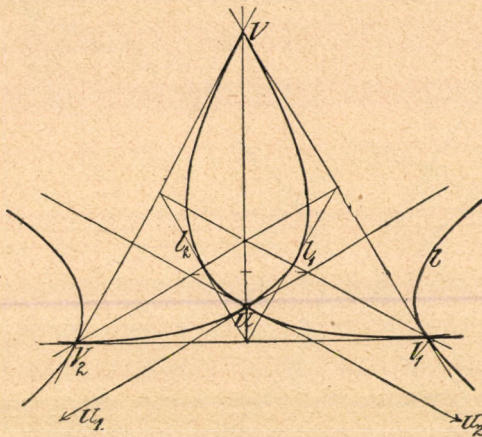
Az l kört és az l_1, l_2 hiperbolákat egy k_r egyenoldalú hiperbola kettősen érinti; mégpedig az l kört a hiperbolák közös főtengelyére merőleges körátmérő végpontjaiban, az l_1 és l_2 hiperbolákat pedig azokban a pontokban, amelyekben az l_2 , ill. l_1 hiperbolák mellék-tengelyei azokat metszik.

E különös konjugált kúpszelethármas és e kúpszeleteket kettősen érintő egyenoldalú hiperbola a h, h_1, h_2 konjugált egyenoldalú hiperbolahármasnak és azokat a csúcsokban érintő k_r körnek a képe egy a hiperbolák síkján kívül levő oly O pontból projiciálva, amely a h_1, h_2 hiperbolák UV húrjára a felező merőlegesen az M felezőponttól a hiperbolák félfőtengelyével egyenlő távolságra van, egy az $UVO = \mathbf{D}$ síkkal parallel \mathbf{S} síkra. De ha az O pont az M ponttól $MU = MV$ távolságra van, akkor a h hiperbola képe l , oly ellipszis, amelynek tengelyei $\sqrt{2}:1$ viszonyban vannak és a h_1, h_2 hiperbolák l_1, l_2 képei szintén egyenoldalú hiperbolák lesznek.

Ha azonban a \mathbf{D} síknak nyoma a hiperbolák síkján nem az UV , hanem az ezzel parallel érintője a h hiperbolának annak egyik csúcsában, akkor ennek a hiperbolának a képe az \mathbf{S} síkon parabola lesz, míg a másik kettőé hiperbola marad. Ez a két hiperbola pedig abban az esetben lesz egyenoldalú, ha az O pont oly helyzetű, hogy abból a két hiperbolának, h_1, h_2 -nek, a h hiperbola csúcs-érintőjén levő két húrja derékszög alatt látszik. E különös konjugált kúpszelethármas d i r e k t szerkesztését alább bemutatjuk.

c) Egy másik különleges konjugált kúpszelethármas két kongruens parabola l_1, l_2 , amely egy VV_1V_2 egyenoldalú háromszög V, V_2 , ill. V, V_1 csúcsaiban érinti a háromszög két-két oldalát (4. ábra). E két parabolának közös gyújtópontja a háromszögnek

magasságpontja, és a háromszög egyik magasságán levő húrjának, VU -nak második végpontja U a gyújtóponttól $\frac{1}{3}$ oly távolságra van, mint a V végpont. A paraboláknak a háromszög VV_2 , VV_1 oldalaira merőleges érintői az U metszőpontban aszimptótái egy l hiperbolának, amely ezeket az oldalakat a V_2 , ill. V_1 csúcsokban érinti és ezért a parabolákat e pontokban 60° szög alatt metszi és amely hiperbolának a fél melléktengelye egyenlő a parabola gyújtópontjának a vezérvonaltól való távolságával, p -vel, a fő-



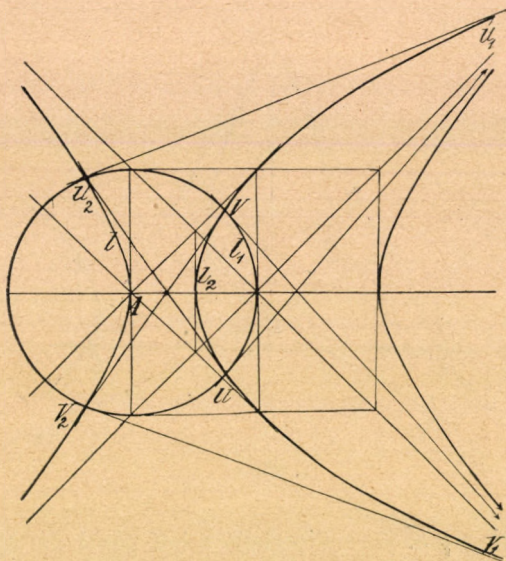
4. ábra.

tengelye pedig $p\sqrt{3}$. Ez a hiperbola a két parabolát egy konjugált kúpszelethármassá egészíti ki.

Ilyen lesz a képe a h_1 , h_2 , h konjugált egyenoldalú hiperbola-hármas hiperboláinak, ha azokat egy síkján kívül fekvő oly O pontból projiciáljuk, amelynek távolsága az U_1 , U_2 pontoktól egyenlő a k kör sugarával ($OU_1 = OU_2 = U_1M = U_2M$) egy az $OU_1U_2 = D$ síkkal parallel S síkra.

De ha az O pont, az U_1 , U_2 pontoktól $MU \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$ távolságra van, akkor a h hiperbola képe egyenoldalú hiperbola l , míg a h_1 , h_2 hiperbolák képei l_1 , l_2 parabolák maradnak, amelyek egy oly egyenszerű háromszög oldalait érintik a csúcsokban, amelynél a szárak viszonya az alaphoz $1 : \sqrt{\frac{5}{2}}$.

d) Egy l egyenoldalú hiperbola (5. ábra) és annak egyik csúcsából, A -ból, mint középpontból a hiperbola középpontján át leírt l_1 kör, valamint az az l_2 parabola, amelynek gyújtópontja a hiperbola középpontja és vezérvonala a hiperbola csúcsérintője az A pontban szintén egy különös konjugált kúpszelethármas. A parabola UU_2 , VV_2 érintői a parabola és a kör U , V metszőpontjaiban a kört, és a kör érintői UU_1 , VV_1 , ugyanezekben az U , V pontokban a parabolát még az U_2 , V_2 , ill. U_1 , V_1 pontokban metszik,



5. ábra.

amelyek a kör és a parabola közös érintőinek érintőpontjai és amelyeken átmegy az l hiperbola.

E három kúpszelet szintén képe a h , h_1 , h_2 konjugált egyenoldalú hármasnak. Ugyanis ha az 1. ábra h_2 hiperbolájának egyik aszimptótájá a h hiperbolát a BC átmérőjének B , C végpontjaiban metszi, és ha a hiperbolák síkján kívül levő O pont e végpontoktól egyenlő távolságra van és az átmérő az O pontból derékszög alatt látszik, akkor a h , h_1 , h_2 hiperboláknak képei az O pontból drójiciálva egy, az OBC síkkal párhuzamos S síkra megfelelőleg egy

1 egyenoldalú hiperbola, egy l_1 kör és egy l_2 parabola abban a helyzetben, amint azt fent leírtuk.

7. Minden kúpszeletet ∞^3 kúpszeletpár egészíti ki egy konjugált kúpszelethármassá.

Projiciáljuk az adott k kúpszeletet annak valamely AB húrjával parallel S síkra úgy, hogy a képe egyenoldalú hiperbola legyen. Ha az AB húr mint átmérő fölé írt x körnek síkja D , parallel az S síkhoz, akkor a k kúpszeletnek projekciója a x körnek bármely pontjából az S síkra egy h egyenoldalú hiperbola lesz. Ezt a h -t még két egyenoldalú hiperbola h_1 , h_2 egészíti ki egy konjugált egyenoldalú hiperbolahármassá, míg a h_1 , h_2 hiperboláknak képei ugyanabból az O pontból a k kúpszelet síkjára visszaprojiciálva oly k_1 , k_2 kúpszeletek lesznek, amelyek a k -t egy konjugált kúpszelethármassá egészítik ki. Minthogy az O pont a x körön ∞^2 -szer vehető fel, a k kúpszeletnek pedig ∞^2 AB húra van, azért a k kúpszelet ∞^3 számú kúpszeletpárral képezhet egy konjugált kúpszelethármast.

A tételnek egy más bizonyítása a következő: Egy előbbi tétel szerint a k_1 kúpszeletnek bármely poláris háromszöge ABC a k_1 -hez konjugált kúpszelethármas egyik kúpszeletébe, k -ba, be van írva, és egy másik k_2 kúpszelete köré van írva. Ha a háromszögnek egyik csúcsa C a k_1 kúpszeleten belül van, akkor abból két, a k_1 -re vonatkozó polárispár sugárzik ki, amely annak CA , CB oldalait harmonikusan választja el. Ha ezeknek egyike a k_1 kúpszeletet az A_1 , B_1 pontban metszi, akkor az A_1B , B_1A egyenesek a k_1 kúpszelet egy C_1 pontjában és az AA_1 , BB_1 , CC_1 egyenesek annak egy másik D pontjában találkoznak és ezért az $A_1B_1C_1$ háromszögnek B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 oldalait az A , B , C pontban egy k kúpszelet érinti. A k kúpszeletnek és az abba írt ABC háromszögnek és mindkettő köré írt $A_1B_1C_1$ háromszögnek poláris alakzata a k_1 kúpszeletre vonatkozólag: egy k_2 kúpszelet és e köré írt ABC háromszög, valamint a k_2 -be írt $A_2B_2C_2$ háromszög; és ez a k_2 kúpszelet a k , k_1 kúpszeleteket egy konjugált kúpszelethármassá egészíti ki. Minthogy a k_1 kúpszeletnek ∞^3 poláris háromszöge van, azért ama k , k_2 kúpszeletek száma, amelyekkel a k_1 egy konjugált hármast képez: ∞^3 .

8. Két valós és két konjugált-képzetes ponton át két oly kúpszelet fektethető, amelyet egy harmadik egy konjugált kúpszelethármassá egészít ki.

Jelöljük a két valós pontot U , V -vel. Messe a két konjugált képzetes pont meghatározására szolgáló I involúció tartója az UV egyenest az M pontban és jelöljük ennek társpontját M' -sel, azt a társpontpárt pedig, amely az MM' -et harmonikusan elválasztja F , F' -sel. Az $FUF'V$ négyszöget egy oly S síkra kell projiciálnunk, hogy annak a képe négyzet legyen (mint amilyen az 1. ábrában az ugyanily jelölésű négyzet). (Az $FUF'V$ négyszög szembenfekvő oldalainak G , H metszőpontjai az M' ponttal ugyanegy egyenesen vannak, amely az UV egyenest az N pontban metszi. Ha a GHM' egyenesen átmenő síkban a GH és NM' vonal-
darabok mint átmérők fölé két kört írunk le, és ezeknek bármelyik O metszőpontjából az $UFVF'$ négyszöget az OGH síkkal parallel S síkra projiciáljuk, akkor ama négyszögnek képe ezen az S síkon egy négyzet lesz.)

Ennek a négyzetnek U , V szembenfekvő két valós csúcsán ∞^1 egyenoldalú hiperbola vezethető át, amelynek középpontja a négyzet átlóinak M metszőpontja és két konjugált pólusa az F , F' pont. E hiperbolák között van kettő, amely olyan kölcsönös helyzetű, mint az 1. ábra h_1 , h_2 , hiperbolái, és amelyet egy h egyenoldalú hiperbola konjugált hármassá egészít ki. E három egyenoldalú hiperbolának projekciója az O pontból az eredeti $UFVF'$ négyszög síkjára egy konjugált kúpszelethármas lesz, amellyel a tételben kifejezett állítás igazolva van.

9. A k kúpszeletet a kívülre fekvő P pontból kisugárzó egyenesek egy I involúciós pontsorban metszik, amelynek S , T kettőspontjai a P pont polárisának metszése a k kúpszelettel. Az I pontsornak pontjait az S pontból projiciáló S sugársor projektív azzal a T sugársorral, amely annak társpontjait a T pontból projiciálja és így a két projektív sugársornak képződménye egy a k -t az S , T pontokban érintő l kúpszelet. A két kúpszelet k , l kölcsönös tulajdonságú, amennyiben a P pontból — az úgynevezett érintőpólusból — kisugárzó egyenesek a kúpszeletek bármelyikét a másik-

nak konjugált pólusaiban metszik. Ily két kúpszeletet *adjugált* *n* *a* *k* nevezünk. Ilyen például a tárgyalt konjugált egyenoldalú hiperbolahármas bármelyik hiperbolája és az a k_r kör, amely a hiperbolákat a csúcsokban érinti; vagy: két parabola, amely a közös csúcsérintőre vonatkozólag szimmetrikus.

Most arra a kérdésre akarunk felelni, hogy ha két adjugált kúpszelet k , l van adva, lehet-e és hogyan kell az egyikhez oly kúpszeletpárt szerkeszteni, amely azzal egy konjugált kúpszelethármas képez és a mellett a másikhoz adjugált, és hány ily kúpszeletpár van?

Ha a k , l adjugált kúpszeletek érintőpólusán, P -n, átmenő tetszésszerinti egyenes az érintőhúrt, ST -t, a Q pontban, az l kúpszeletet az A , B pontokban metszi, akkor a P , Q és az A , B konjugált póluspár a k kúpszeletre vonatkozólag és ezért, ha a PQ , AB vonaldarabokat a kúpszeletek síkján kívül fekvő O pontból derékszögű sugarak projiciáljuk, akkor az l kúpszeletnek a képe ebből az O pontból projiciálva egy, az $OPQ \equiv D$ síkkal *parallel* S síkra egy egyenoldalú hiperbola h , a k kúpszeleté pedig egy ahhoz adjugált k_r kör lesz.

Amint az előbbieken láttuk, a h hiperbolát két más vele kongruens és a k_r kört a csúcsban érintő h_1 , h_2 egyenoldalú hiperbola egészíti ki egy konjugált hármassá; ez utóbbiaknak projekciói l_1 , l_2 az O pontból az l síkjára projiciálva az a k -hoz adjugált két kúpszelet, amely az l -et egy konjugált kúpszelethármassá egészíti ki. Minthogy pedig a P -ből kisugárzó sugarak száma az l , k kúpszeletek síkjában ∞^1 , azért mondhatjuk:

Ha a két kúpszelet adjugált egymáshoz, akkor ∞^1 kúpszeletpár szerkeszthető, amely amazoknak bármelyikét egy konjugált kúpszelethármassá egészíti ki és a másik kúpszelethez egyenként adjugált.

A tételben kifejezett kúpszeletpárok azonban a konjugált egyenoldalú hiperbolahármas közvetítése nélkül is megszerkeszthetők.

A k , l adjugált kúpszeletek érintőpólusán, P -n átmenő tetszésszerinti egyenes messe az érintőhúrt, ST -t a Q pontban, a k kúpszeletet az A , B pontokban. Ha Q -nak S , T pontokra vonatkozó

harmonikus társa R , akkor ez a $PAQB$ egyenesnek pólusa, úgy a k , mint az l kúpszeletre nézve. Jelöljük azt a két-két pontot, amelyben a P -ből kisugárzó és a PR sugarat az S , Q , ill. T , Q pontoktól harmonikusan elválasztó két sugár a k kúpszeletet metszi, T_1 , T_2 , ill. S_1 , S_2 -vel és válasszuk úgy a jelölést, hogy az SS_1S_2 , TT_1T_2 ponthármas a k kúpszeleten ugyanegy értelmű legyen. Jelöljük továbbá S_1T_1 , ill. S_2T_2 egyeneseknek PR egyenessel való metszéspontját R_1 , R_2 -vel. Ekkor ez a két ponthármas nemcsak a Q pontból, hanem R , R_1 , R_2 pontokból is egymásba projiciálható, és pedig az SS_1S_2 ponthármas rendre a TT_2T_1 , T_2T_1T , T_1TT_2 ponthármasba.⁴ Az a két kúpszelet, l_1 , l_2 , amely a k -hoz adjungált és azt az S_1 , T_1 , ill. S_2 , T_2 pontokban érinti, az l kúpszelettel együtt egy konjugált kúpszelethármaszt képez.

Erre alapítva megszerkeszthetjük közvetlen (tehát projiciálás nélkül) a 6b). alatt említett különös konjugált kúpszelethármaszt, amelynek kúpszeletei: két egyenoldalú hiperbola és egy parabola.

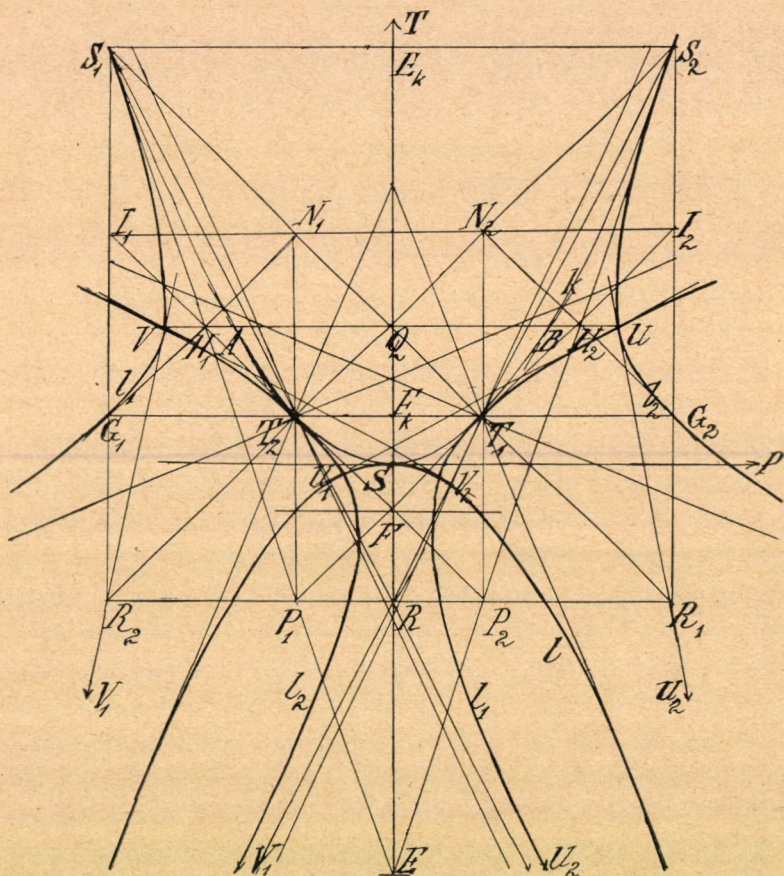
Vegyünk fel e végből két kongruens parabolát, k és l -et, amely egymást a két közös csúcsban, S -ben és a végtelen távol levő T pontban érinti, tehát egymáshoz adjugált, és keressük azt a k -hoz adjugált két egyenoldalú hiperbolát, l_1 és l_2 -t, amely az l parabolával egy konjugált hármast képez.

Jelöljük (6. ábra) a k és az l parabolák gyújtópontjait F_k , ill. F -fel, és legyen a Q és az R pont a parabolák közös tengelyén akkép felvéve, hogy $RF = FF_k = F_kQ$.

Az R és F pont polárisa a k parabolára vonatkozólag az F_k és a Q pontban a parabolák tengelyére merőleges és a k parabolát a T_2 , T_1 , ill. az A , B pontban metszi. Az FT_1QT_2 idom pedig olyan négyzet, amelynek az F csúcsba ütköző oldalai a k parabolát az T_1 , T_2 pontokban érintik, és ezek az érintők az R pontban a parabolatengelyre emelt merőlegest oly P_1 , P_2 pontban metszik, hogy a $T_1T_2P_1P_2$ idom szintén négyzet. Ha továbbá az E és E_k pont a parabolák tengelyén akkép van felvéve, hogy $ES = 3.RS = 3.SQ = SE_k$,

⁴ L. KLUG LIPÓT: «Többféle kép involúciós pontcsoportokról» című értekezését; Mat. és Természett. Értesítő, XLIII. kötet, 1926. p. 134.

akkor az E pont polárisa a k parabolára vonatkozólag az E_k pontban merőleges a parabolák tengelyére és a k parabolát az S_1S_2 -ben metszi (amely jelölésnél az SS_1S_2 , TT_1T_2 a k parabolán egyező), és e pontoknak az E pontból kisugárzó érintői a T_1 , ill. T_2 pont



6. ábra.

érintőivel a P_1 , ill. P_2 pontban találkoznak, amely pontok tehát pólusai az S_1T_1 , ill. S_2T_2 egyeneseknek, míg a P_1P_2 egyenesnek pólusa a Q .

A k parabola S_1T_1 , S_2T_2 húrjainak N_1 , N_2 felezőpontjai a parabola T_2 , ill. T_1 pontjain átmenő átmérőkön vannak és így $T_1N_2N_1T_2$

szintén négyzet, míg az R ponttal egy-egy egyenesen levő S_1 , T_2 ill. S_2 , T_1 pontok érintői az R pont polárisának, az AQB egyenesnek H_1 és H_2 pontjában találkoznak.

A H_1N_2 és N_1H_2 egyenes a T_1T_2 egyenest a G_1 , ill. G_2 pontban metszi és az S_1G_1 , S_2G_2 parallel vonaldarabokat az N_1N_2 egyenes az I_1 , ill. I_2 pontokban felezi, amely felezőpontokon még az FT_2 , FT_1 érintők is átmennek, míg az S_1G_1 , S_2G_2 egyenesek a P_1RP_2 egyenest az S_2T_2 , ill. S_1T_1 egyenesnek R_2 , ill. R_1 pontjában metszik.

Az a két hiperbola l_1 és l_2 , amely a k parabolához a P_1 , ill. P_2 érintési pólusra nézve adjugált, tehát a k parabolát az S_1 , T_1 , ill. az S_2 , T_2 pontokban érinti és amelynek középpontja T_2 , ill. T_1 és átmérője P_1N_1 , ill. P_2N_2 és az ezek konjugált átmérője az $I_1T_2P_2$, ill. $I_2T_1P_1$ egyeneseken van: az l parabolával egy konjugált kúpszelethármaszt képez. Ez a két hiperbola pedig egyenoldalú, mert az $N_1T_2P_1$, ill. $N_2T_1P_2$ átmérőhöz konjugált átmérőnek hossza egyenlő azokkal, minthogy $\overline{T_2N_1}^2 = T_2I_1 \cdot T_2H_1$ és $\overline{T_2N_2}^2 = T_1I_2 \cdot T_1H_2$. Ezeknek az egyenoldalú hiperbolák aszimptótáinak és főtengelyeinek hajlásszöge a parabola tengelyéhez $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$ és $\frac{3}{4}$ derékszög.

Ezért: Az l parabolát konjugált kúpszelethármaszá kiegészítő két egyenoldalú hiperbolának, l_1 , l_2 -nek, középpontja T_1 , T_2 az l parabola vezérvonalán annak tengelyétől oly távolságra van, mint a gyűjtőpontja F , és a hiperboláknak e gyűjtőponton átmenő és a hiperbolákat valós pontokban metsző átmérői egyenlők $2 \cdot T_1T_2$ -vel, míg az ezekhez konjugált átmérői a parabola tengelyével paralelek. E tételben kifejezett adatok meghatározzák az l_1 , l_2 egyenoldalú hiperbolákat, mert az aszimptótái a konjugált átmérők hajlásszögeit felezik és így főtengelyei a parabola főtengelyéhez $67\frac{1}{2}$ fokú szög alatt hajlanak.

De a tétel alapján e különös konjugált kúpszelethármaszt nemcsak az l parabolából, hanem egy tetszésszerűt egyenoldalú hiperbolából is meghatározhatjuk.

Ha t. i. egy l_1 egyenoldalú hiperbola van adva, amelynek középpontja a T_2 pont, akkor felezzük az egyik aszimptótájá és a mellék-tengelye által képezett hegyesszöget; e szögfelezőre merőleges hiperbola-átmérő egyik végpontja T_1 középpontja egy másik egyenoldalú hiperbolának, l_2 -nek, amely az előbbivel a T_1T_2 vonal-

darab felezőmerőlegesére szimmetrikus. Ez a felezőmerőleges pedig tengelye egy l parabolának, amelynek vezérvonala a T_1T_2 egyenes és F gyújtópontjának távolsága a vezérvonaltól T_1T_2 vonalдарab fele, és amely parabola a két hiperbolát valós pontokban metszi. Ez az l parabola és az l_2 hiperbola, valamint a felvett l_1 hiperbola a kívánt különös konjugált kúpszelethármas.

Az előbbi tétel tehát ekkép is kifejezhető : *Két, valamely egyenesre vonatkozólag szimmetrikus egyenoldalú hiperbola l_1, l_2 , amelynek két középpontja T_2, T_1 , a hiperbolák főtengelyeihez $22\frac{1}{2}$ fok alatt hajló közös félátmérőnek két végpontja, és egy a hiperbolákat valós pontokban metsző parabola l , amelynek vezérvonala T_1T_2 , és gyújtópontjának távolsága a vezérvonaltól $\frac{1}{2} \cdot T_1T_2$: egy konjugált kúpszelethármas* alkot.

Klug Lipót.

KONJUGIERTE KEGELSCHNITT-TRIPEL UND IHRE SPEZIELLEN FÄLLE.

Ausgehend aus der Sternfigur der drei konjugierten gleichseitigen Hyperbeln (Fig. 1), werden die wesentlichen Eigenschaften des Tripels aus dieser abgeleitet.

Die Zentralprojektion dieser Sternfigur auf eine Ebene sind drei allgemeine Kegelschnitte mit der Haupteigenschaft des konjugierten Tripels, daß je zwei derselben Polarfiguren sind von einander in bezug auf den dritten, aber immer befindet sich unter den drei Kegelschnitten des Tripels eine Hyperbel.

Die Kegelschnitte des konjugierten Tripels sind in speziellen Fällen nur noch folgende:

- a) eine Hyperbel und zwei symmetrische Kreise (Fig. 2 des ungarischen Textes);
- b) zwei symmetrische Hyperbeln und ein Kreis (Fig. 3);
- c) zwei symmetrische gleichseitige Hyperbeln und eine Parabel (Fig. 6);
- d) zwei symmetrische Parabeln und eine Hyperbel (Fig. 4);
- e) eine gleichseitige Hyperbel, eine Parabel und ein Kreis (Fig. 5).

Diese ergeben sich als Zentralprojektionen der Sternfigur der konjugierten gleichseitigen Hyperbeln, werden aber hier direkt, also unabhängig von der Sternfigur, konstruiert.

Leopold Klug.

EGY CARLSON-FÉLE ÉS NÉHÁNY AZZAL ROKON EGYENLŐTLENSÉGRŐL.

1. §.

A következőkben a_1, a_2, a_3, \dots mindig valós számokból álló olyan végtelen sorozatot jelentsen, amelyben nem minden tag 0.

CARLSON-tól származik a következő egyenlőtlenség¹:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\}^{\frac{1}{4}}, \quad (1)$$

valamint ennek következő élesítése is:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{16} \right] a_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\}^{\frac{1}{4}}. \quad (2)$$

Az egyenlőtlenségek pontosak, azaz $\pi^{\frac{1}{2}}$ nem helyettesíthető kisebb mennyiséggel.

HARDY (1)-re később két egyszerű bizonyítást adott,² ezek közül a második (1)-et egy integrálegyenlőtlenségből származtatja.

GABRIEL³ és CATON⁴ a következő általánosabb egyenlőtlenséget

¹ F. CARLSON, Une inégalité, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 25 B (1934), No. 1. Az ebben a §-ban felírt egyenlőtlenségek mind úgy értendők, hogy azokra az a_n szorzatokra állanak, amelyekre az illető egyenlőtlenség jobboldalán álló összegek végesek.

² G. H. HARDY, Note on two inequalities, *Journal London Math. Soc.*, 11 (1936), 167—170. oldal.

³ R. M. GABRIEL, An extension of an inequality due to CARLSON, *Journal London Math. Soc.*, 12 (1937), 130—132. oldal.

⁴ W. B. CATON, A class of inequalities, *Duke Math. Journal*, 6 (1940), 442—461. oldal.

találták: Ha $\tau_1 \geq \tau_2 \geq 0$, $\sigma_1 > 1$, $\sigma_2 > 1$, $\sigma_1 \neq \tau_1 + 1$, $\sigma_2 \neq \tau_2 + 1$,
 $p_1 = \frac{\sigma_2(\tau_1 + 1) - \sigma_1(\tau_2 + 1)}{\sigma_2 - \tau_2 - 1} > 0$, $p_2 = \frac{\sigma_2(\tau_1 + 1) - \sigma_1(\tau_2 + 1)}{\tau_1 + 1 - \sigma_1} > 0$,
 akkor van egy $A = A(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$ állandó úgy, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq A \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\tau_1} |a_n|^{\sigma_1} \right\}^{\frac{1}{p_1}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\tau_2} |a_n|^{\sigma_2} \right\}^{\frac{1}{p_2}}. \quad (3)$$

A pontos A állandó értéke a $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ esetben CATON szerint

$$\frac{p_1^{\frac{1}{\sigma}} p_2^{\frac{1}{\sigma}}}{\sigma^{\frac{1}{\sigma}}} \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{p_1(\sigma-1)}\right) \Gamma\left(\frac{\sigma}{p_2(\sigma-1)}\right)}{(\tau_1 - \tau_2) \Gamma\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}. \quad (4)$$

A $\sigma_1 \neq \sigma_2$ esetben A értéke nem ismeretes.

E dolgozat 3. §-ában a következő, a fentiekkel rokon egyenlőtlenségeket fogjuk bebizonyítani:

I. tétel. Ha $1 \leq \sigma_1 \leq 2$, $1 < \sigma_2 \leq 2$, $q = 1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1(\sigma_2-1)}$, akkor

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|^q + \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \right|^q < \frac{\pi q}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma_1} |a_n|^{\sigma_1} \right\}^{\frac{1}{\sigma_1}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\sigma_2} \right\}^{\frac{1}{\sigma_1(\sigma_2-1)}} \quad (5)$$

és

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|^q < \frac{\pi q}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right)^{\sigma_1} |a_n|^{\sigma_1} \right\}^{\frac{1}{\sigma_1}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\sigma_2} \right\}^{\frac{1}{\sigma_1(\sigma_2-1)}}. \quad (6)$$

Ha ezeket az egyenlőtlenségeket a $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ esetben tekintjük, a CARLSON-féle (1), illetve (2) egyenlőtlenség következő élesítéseit nyerjük:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \right\}^2 < \pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\}^2 < \pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

A π mindkét egyenlőtlenségben a pontos állandó.

A 4. §-ban a következő ellenkező irányú egyenlőtlenségeket fogjuk bebizonyítani:

II. tétel. Legyen $1 < x \leq 2$, $\nu \geq 2$, $q = 1 + \frac{1}{x}$ és

$$C = C(x, \nu) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{q\pi} \frac{(q\nu-1)^{q-1} \Gamma(1+q\nu-q) \Gamma(q)}{(q\nu-q)^{q\nu-q} (q-1)^{q-1} \Gamma(q\nu)} \right] \frac{1}{q^{\nu-1}}.$$

Minden nem-negatív tagú, monoton fogyó a_n sorozatra áll:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n - \frac{1}{2}} > C \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\nu} \right\}^{\frac{q}{q-1}}}{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right)^x a_n^x \right\}^{\frac{q-1}{q-1}}}. \quad (9)$$

Minden nem-negatív tagú monoton fogyó konvex sorozatra pedig áll:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n-1}}{2n-1} > C' \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\nu} \right\}^{\frac{q}{q-1}}}{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^x a_n^x \right\}^{\frac{q-1}{q-1}}}, \quad C' = C \cdot 2^{\frac{q\nu}{q-1}}. \quad (10)$$

Ha például $x = \nu = 2$, akkor $C = \frac{\pi}{3^{\frac{3}{4}}}$ és így (9), illetve (10) a következő egyenlőtlenséget adja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n - \frac{1}{2}} > \frac{\pi}{3^{\frac{3}{4}}} \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\}^{\frac{3}{4}}}{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 a_n^2 \right\}^{\frac{1}{4}}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n-1}}{2n-1} > \frac{\pi}{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{3}{4}}} \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\}^{\frac{3}{4}}}{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \right\}^{\frac{1}{4}}}.$$

A felsorolt egyenlőtlenségeket bizonyos integrálegyenlőtlenségekből fogjuk származtatni, az összekötő kapcsot a FOURIER-féle sorok elméletének néhány tétele fogja szolgáltatni.

2. §.

Bizonyítsuk be a következő integrálegyenlőtlenségeket.

Legyen $y(x)$ az $[a, b]$ intervallumban legalább egy zéró-

helyel bíró teljesen folytonos függvény.⁵ Legyen továbbá $a > 0$,

$\omega > 1$ és $q = 1 + \frac{\omega-1}{\omega}a$. Ekkor

$$|y(a)|^q + |y(b)|^q \leq q \left\{ \int_a^b |y'(x)|^\omega dx \right\}^{\frac{1}{\omega}} \left\{ \int_a^b |y(x)|^a dx \right\}^{\frac{\omega-1}{\omega}} \quad (11)$$

és, ha $y'(x)$ korlátos,

$$|y(a)|^{1+a} + |y(b)|^{1+a} \leq (1+a) \max |y'| \cdot \int_a^b |y(x)|^a dx. \quad (12)$$

Az egyenlőség jele (12)-ben akkor és csak akkor érvényes, ha

$$y(x) = \begin{cases} C(\xi_1 - x), & \text{ha } a \leq x \leq \xi_1, \\ 0, & \text{ha } \xi_1 \leq x \leq \xi_2, \\ \pm C(x - \xi_2), & \text{ha } \xi_2 \leq x \leq b, \end{cases}$$

ahol ξ_1 és ξ_2 az $[a, b]$ két száma ($a \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq b$) C pedig egy tetszőszerinti valós szám.

Ha $\omega \leq a$, akkor (11)-ben az $y(x) \equiv 0$ triviális esetet leszámítva, egyenlőség soha sincsen. Ha $\omega > a$, akkor (11)-ben egyenlőség csak a következő alakú függvények esetében van:

$$y(x) = \begin{cases} C(\xi_1 - x)^{\frac{\omega}{\omega-a}}, & \text{ha } a \leq x \leq \xi_1, \\ 0, & \text{ha } \xi_1 \leq x \leq \xi_2, \\ \pm C(x - \xi_2)^{\frac{\omega}{\omega-a}}, & \text{ha } \xi_2 \leq x \leq b, \end{cases}$$

ahol ξ_1 és ξ_2 újra az $[a, b]$ két számát, C pedig egy tetszőszerinti valós számot jelent.

Először bizonyítsuk be (12)-t. Legyen ξ az $y(x)$ függvénynek az $[a, b]$ -ben fekvő egy zéróhelye. Minthogy $|y(x)|^{1+a}$ szintén teljesen folytonos és deriváltja $(1+a)|y(x)|^a [\operatorname{sgn} y(x)] y'(x)$, azért

$$\begin{aligned} & |y(a)|^{1+a} + |y(b)|^{1+a} = \\ & = \left(\int_a^\xi + \int_\xi^b \right) [|y(x)|^{1+a}]' dx \leq \left(\int_a^\xi + \int_\xi^b \right) (1+a) |y(x)|^a |y'(x)| dx. \quad (13) \end{aligned}$$

⁵ Tehát $y(x)$ integrálfüggvénye egy Lebesgue szerint integrálható függvénynek (utóbbi majdnem mindenütt az $y(x)$ differenciálhányadosával egyenlő s azért általában is $y'(x)$ -szel fogjuk jelölni).

⁶ A (12) a (11) egyenlőtlenségek határesetre, ha $\omega \rightarrow \infty$.

Minthogy továbbá

$$\int_a^b |y(x)|^a |y'(x)| dx \leq \max |y'| \cdot \int_a^b |y(x)|^a dx, \quad (14)$$

(12)-t bebizonyítottuk.

Egyenlőségnek (12)-ben az a feltétele, hogy (13)-ban és (14)-ben egyszerre egyenlőség legyen. Ennek viszont az a feltétele, hogy 1. majdnem mindenütt ott, ahol $y(x) \neq 0$, álljon: $[\operatorname{sgn} y(x)] y'(x) = -|y'(x)|$, illetve $= |y'(x)|$, a szerint, amint $x \leq \xi$, illetve $x \geq \xi$, 2. majdnem mindenütt ott, ahol $y(x) \neq 0$: $|y'(x)| = \max |y'|$. Az 1. feltétel nyilván egyenértékű azzal, hogy $(y(x)^2)' = 2y(x)y'(x)$ az $[a, \xi]$ -n majdnem mindenütt ≤ 0 , a $[\xi, b]$ -n pedig majdnem mindenütt ≥ 0 , azaz $y^2(x)$ az $[a, \xi]$ -n fogy, $[\xi, b]$ -n pedig növekszik. Jelentse ξ_1 és ξ_2 az $y(x)$ -nek az $[a, b]$ -n levő legkisebb, illetve legnagyobb zéróhelyét ($a \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq b$), a $[\xi_1, \xi_2]$ -n ekkor $y(x) \equiv 0$. A 2. feltétel azt jelenti, hogy $y(x)$ az $[a, \xi]$ -n és a $[\xi, b]$ -n lineáris és differenciálhányadosa mindkét intervallumon abszolútértékben ugyanaz az állandó. Ennélfogva (12)-ben az egyenlőségnek valóban az a feltétele, hogy $y(x)$ a tételben leírt alakú legyen.

A (11) bizonyításához hasonlóképpen fogunk hozzá. Ugyanúgy kapjuk, mint (13)-at, hogy

$$|y(a)|^q + |y(b)|^q \leq q \int_a^b |y(x)|^{\frac{q-1}{w}} |y'(x)| dx. \quad (15)$$

A HÖLDER-féle egyenlőtlenség alapján azonban

$$\int_a^b |y'(x)| |y(x)|^{\frac{q-1}{w}} dx \leq \left\{ \int_a^b |y'(x)|^w dx \right\}^{\frac{1}{w}} \left\{ \int_a^b |y(x)|^q dx \right\}^{\frac{w-1}{w}}, \quad (16)$$

amivel (11)-et bebizonyítottuk.

Egyenlőség feltétele az, hogy (15)-ben és (16)-ban egyszerre egyenlőség legyen. Úgy, mint előbb, kapjuk, hogy (15)-ben az egyenlőségnek az a feltétele, hogy $y^2(x)$ (és vele együtt $|y(x)|$) az $[a, \xi]$ -n fogyjon, a $[\xi, b]$ -n pedig növekedjék. A HÖLDER-féle (16) egyenlőtlenségben viszont akkor van egyenlőség, ha $|y'(x)|^w$ és $|y(x)|^q$ arányosak, azaz, ha van egy $\varrho \geq 0$ úgy, hogy $|y'(x)| = \varrho |y(x)|^{\frac{q}{w}}$.

Ezek szerint, a keresett függvény szélső zéróhelyeit újra ξ_1 -gyel és ξ_2 -vel jelölve:⁷

$$[a, \xi_1]\text{-en:} \quad y'(x) = -\varrho [y(x)]^{\frac{\alpha}{\omega}}, \text{ ha } y(a) \geq 0,$$

$$y'(x) = \varrho [-y(x)]^{\frac{\alpha}{\omega}}, \text{ ha } y(a) \leq 0,$$

$$[\xi_2, b]\text{-n:} \quad y'(x) = -\varrho [y(x)]^{\frac{\alpha}{\omega}}, \text{ ha } y(b) \leq 0,$$

$$y'(x) = \varrho [-y(x)]^{\frac{\alpha}{\omega}}, \text{ ha } y(b) \geq 0.$$

Ha $\omega \leq \alpha$, akkor ezeknek az egyenleteknek nincs olyan nemtrivális megoldása, amelynek lenne zéróhelye; ebben az esetben tehát (11)-ben nem lehet máskor egyenlőség, csak ha $y(x) \equiv 0$. Ha azonban $\omega > \alpha$, akkor van olyan nem identikusan zéróval egyenlő függvény, amely a $[\xi_1, \xi_2]$ -n zéró, az $[a, \xi_1]$ -n és a $[\xi_2, b]$ -n pedig a fenti differenciálegyenleteknek tesz eleget, és pedig a következő:

$$y(x) = \begin{cases} \pm \left[\varrho \left(1 - \frac{\alpha}{\omega} \right) (\xi_1 - x) \right]^{\frac{\omega}{\omega - \alpha}}, & \text{ha } a \leq x \leq \xi_1, \\ 0, & \text{ha } \xi_1 \leq x \leq \xi_2, \\ \pm \left[\varrho \left(1 - \frac{\alpha}{\omega} \right) (x - \xi_2) \right]^{\frac{\omega}{\omega - \alpha}}, & \text{ha } \xi_2 \leq x \leq b. \end{cases}$$

Ezzel a tételt teljes egészében bebizonyítottuk.

3. §.

A FOURIER-féle sorok elméletéből a RIESZ-FISCHER-féle télelre, a PARSEVAL-féle egyenlőségre és a YOUNG-HAUSDORFF-féle egyenlőtlenségekre fogunk hivatkozni. Ezek szerint, ha $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ az $f(x)$ függvény FOURIER-féle sora és ha $|f(x)|^p$ integrálható ($1 < p \leq 2$), akkor

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^{p'} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad \left(p' = \frac{p}{p-1} \right);$$

⁷ Minthogy $y(x)$ -nek a $[\xi_1, \xi_2]$ -n 0-val kell egyenlőnek lennie, azért (hacsak $y(x) \equiv 0$) ξ_1 és ξ_2 közül legalább az egyik az $[a, b]$ intervallum belsejébe esik.

a $p=2$ esetben itt *mindig* egyenlőség van, a $p<2$ esetben azonban *csak akkor*, ha $f(x)=c_n e^{inx}$.⁸ Fordítva, ha $c_n(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ komplex számoknak egy olyan sorozata, amelyre $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^p$ konvergens ($1 < p \leq 2$), akkor van egy olyan $f(x)$ függvény amelynek $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ a FOURIER-féle sora és amelyre

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p'} dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad \left(p' = \frac{p}{p-1} \right); \quad (18)$$

egyenlőség lévén itt a $p=2$ esetben *mindig*, a $p<2$ esetben azonban *csak akkor*, ha a c_n sorozatban legfeljebb egy 0-tól különböző tag van.⁸ Ha tehát $f(x)$ valós értékű és nem állandó, akkor a $p<2$ esetben (17)-ben és (18)-ban a $<$ jel érvényes.

Ha $y(x)$ páros vagy páratlan, valós értékű és 0 integrálközepű függvény, azaz, ha $y(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, vagy $y(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ (a_n valós számsorozat), akkor (mint erről könnyen meggyőződhetünk) (17) és (18) a következő egyenlőtlenségeket nyújtják:

$$\frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{p'} \right\}^{\frac{1}{p'-1}} \leq \int_0^{\pi} |y(x)|^p dx, \quad (19)$$

$$\int_0^{\pi} |y(x)|^{p'} dx \leq \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{\frac{1}{p-1}}; \quad (20)$$

a $p=2$ esetben *mindig* az $=$ jel, $p<2$ esetben pedig *mindig* (ha $y \not\equiv 0$) a $<$ jel érvényes.

(5) *bizonyítása a $\sigma_1=1$ esetben.* Ha $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|$ konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n) \sin nx$ sorok egyenletesen konvergálnak egy $y(x)$, illetve egy $z(x)$ függvényhez; $y(x)$ a

⁸ V. ö. különösen az egyenlőség kérdését illetőleg: G. H. HARDY — J. E. LITTLEWOOD, Some new properties of Fourier constants, *Math. Annalen*, **97** (1927), 159—209. oldal.

$z(x)$ -nek nyilván egy integrálfüggvénye. Írjuk fel (12)-t $y(x)$ -re, a $[0, \pi]$ intervallumra és az $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - 1}$ kitevőre. Erre jogunk van, mert $\int_0^\pi y(x) dx = 0$ lévén, $y(x)$ -nek a $[0, \pi]$ -n feltétlenül van zéróhelye. Tekintetbe véve, hogy $y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $y(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $|y'(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|$ és ((20) alapján):

$$\int_0^\pi |y(x)|^\alpha dx \leq \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\sigma_2} \right\}^{\frac{1}{\sigma_2 - 1}},$$

látjuk, hogy (12) éppen (5)-öt szolgáltatja, egyelőre a \leq jellel a $<$ jel helyett. Az egyenlőség fennállásának szükséges feltétele lenne, hogy (12)-ben is egyenlőség legyen. Ez azonban azért lehetetlen, mert a most tekintett $y(x)$ függvények mind-egyikére $y'(0) = 0$, míg azoknak a $\neq 0$ függvényeknek, amelyekre (12)-ben egyenlőség áll fenn, a 0 pontban a differenciálhányadosuk: $-C \neq 0$.

(6) bizonyítása a $\sigma_1 = 1$ esetben. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) |a_n|$ konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} (-2n+1) a_n \sin(2n-1)x$ sorok egyenletesen konvergálnak, határértékeiket jelöljük $y(x)$ -szel, illetve $z(x)$ -szel; $y(x)$ a $z(x)$ -nek nyilván egyik integrálfüggvénye. Minthogy $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, azért alkalmazhatjuk (12)-t az $y(x)$ függvényre a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra és az $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - 1}$ kitevőre:

$$|y(0)|^q \leq q \max |y'| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |y(x)|^\alpha dx \quad (q = 1 + \alpha). \quad (21)$$

Mármost $y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\max |y'| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) |a_n|$ és ((20) alapján)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |y(x)|^\alpha dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi |y(x)|^\alpha dx \leq \frac{\pi}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\sigma_2} \right\}^{\frac{1}{\sigma_2 - 1}},$$

amivel (6)-ot bebizonyítottuk (ismét egyelőre a \leq jellel, de egyenlőség ugyanabból az okból nem léphet fel, mint előbb).

(5) bizonyítása az $1 < \sigma_1 \leq 2$ esetben. Legyen az a_1, a_2, a_3, \dots sorozatra $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma_1} |a_n|^{\sigma_1}$ konvergencia. Ekkor van egy $z(x)$ függvény, amelynek $\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n) \sin nx$ a FOURIER-féle sora; (20) alapján:

$$\int_0^{\pi} |z(x)|^{\omega} dx \leq \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma_1} |a_n|^{\sigma_1} \right\}^{\frac{1}{\sigma_1-1}} \quad \left(\omega = \frac{\sigma_1}{\sigma_1-1} \right). \quad (22)$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ sor ekkor $z(x)$ egy integrálfüggvényének, $y(x)$ -nek a FOURIER-féle sora; (20) alapján kapjuk, hogy

$$\int_0^{\pi} |y(x)|^{\alpha} dx \leq \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\sigma_2} \right\}^{\frac{1}{\sigma_2-1}} \quad \left(\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_2-1} \right). \quad (23)$$

Minthogy $\int_0^{\pi} y(x) dx = 0$, azért $y(x)$ a $[0, \pi]$ -ben felveszi a 0 értéket. Alkalmazhatjuk tehát (11)-et az $y(x)$ függvényre, a $[0, \pi]$ intervallumra és az $\omega = \frac{\sigma_1}{\sigma_1-1}$, $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_2-1}$ kitevőkre. Ha tekintetbe vesszük (22)-t és (23)-at, továbbá azt, hogy $y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $y(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, látjuk, hogy (11) éppen a bizonyítandó (5)-öt adja, egyelőre azonban a \leq jellel. Ha $\sigma_2 \leq \sigma_1$, azaz ha $\alpha \leq \omega$, akkor (5)-ben azért nem lehet egyenlőség, mert (a triviális esetet leszámítva) (11)-ben ekkor soha sincs egyenlőség. Ha pedig $\sigma_2 > \sigma_1$, akkor σ_1 bizonyára < 2 s ekkor viszont (22)-ben nem lehet egyenlőség, következésképpen (5)-ben sem.

Hogy a $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ esetben (5)-ből adódó (7) egyenlőtlenségben a π állandó pontos, arról az $a_n(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + n^2}$ sorozatra való alkalmazással győződhetünk meg (ha a λ paramétert minden határon túl növeljük). Ugyanis, ha $\lambda \rightarrow \infty$, akkor

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n(\lambda) \right\}^2}{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2(\lambda) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\lambda) \right\}^{\frac{1}{2}}} = \\
 & = \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{1}{\lambda} \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{1}{\lambda} \right\}^2}{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{n}{\lambda}}{1 + \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2} \right] \cdot \frac{1}{\lambda} \right\}^2 \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2} \right] \cdot \frac{1}{\lambda} \right\}^2} \rightarrow \\
 & \frac{\left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \right\}^2 + 0}{\left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{x}{1+x^2} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1+x^2} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} = \pi.
 \end{aligned}$$

(6) bizonyítása az $1 < \sigma_1 \leq 2$ esetben az (5) bizonyításához hasonló módon végezhető. Csakhogy most a (11)-et az $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x$ függvényre és a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra alkalmazzuk.

A $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ esetben (6)-ból adódó (8) egyenlőségben a π állandó pontos. Erről az $a_n(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2}$ sorozatra való alkalmazással és a λ paraméter minden határán túl való növelésével győződhetünk meg.

4. §.

A (9) és (10) bizonyítására egy általunk nemrégien közölt integrálegyenlőtlenséget fogunk felhasználni.⁹

Tegyük fel, hogy $y(x)$ egy a $(-\infty, \infty)$ -en értelmezett teljesen folytonos függvény továbbá, hogy a

⁹ B. v. SZ. NAGY, Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, *Acta Sci. Math. Szeged*, **10** (1941), 64–74. oldal.

$$J_a = \int_{-\infty}^{\infty} |y(x)|^a dx \quad \text{és} \quad K_p = \int_{-\infty}^{\infty} |y'(x)|^p dx$$

integrálok valamilyen $a > 0$ és $p \geq 1$ kitevőkre végesek. Legyen β tetszőleges pozitív szám. Ekkor

$$J_{a+\beta} \leq \left[\frac{q}{2} H\left(\frac{q}{\beta}, \frac{p-1}{p}\right) \right]^{\frac{\beta}{q}} J_a^{\frac{(p-1)\beta}{p} + 1} K_p^{\frac{\beta}{p}}, \quad (24)$$

$$\text{ahol } q = 1 + \frac{p-1}{p} a \text{ és } H(u, v) = \frac{u^u v^v \Gamma(1+u+v)}{(u+v)^{u+v} \Gamma(1+u) \Gamma(1+v)}.$$

Az egyenlőség kérdését is sikerült pontosan megvizsgálni. Most csak arra lesz szükségünk, hogy $a = p = 2$, $\alpha = \beta = 1$ esetben (24)-ben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $y(x) = ay_{211}(bx+c)$, ahol a, b, c tetszőleges valós számok ($b \neq 0$) és

$$y_{211}(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{x}{2}, & \text{ha } |x| \leq \pi \\ 0, & \text{ha } |x| > \pi. \end{cases}$$

Legyen x és ν két egynél nagyobb valós szám. Tekintsük (24)-et abban az esetben, amikor $p = \frac{x}{x-1}$, $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{\nu-1}$. Kis átalakítással kapjuk:

$$J_1 \geq \left[\frac{q}{2} H\left(q(\nu-1), \frac{1}{x}\right) \right]^{\frac{1}{1-q}} \frac{\left(J_{\frac{1}{\nu}}\right)^{\frac{q\nu}{q\nu-1}}}{\left(K_{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q\nu-1}}} \quad (25)$$

$$\left(p = \frac{x}{x-1}, \quad r = \frac{\nu}{\nu-1}, \quad q = 1 + \frac{1}{x} \right).$$

Tegyük fel most még, hogy $2 \geq x > 1$ és $\nu \geq 2$.

Legyen a_1, a_2, a_3, \dots egy olyan sorozat, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right)^x |a_n|^x$ konvergens. Van akkor egy olyan $z(x)$ függvény, amelynek $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) a_n \cos(2n-1)x$ a FOURIER-sora. (20) alapján:

$$\left\{ \int_0^{\pi} z(x)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{p}} 2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right)^x |a_n|^x \right\}^{\frac{1}{x}}. \quad (26)$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n-1)x$ sor ekkor a $z(x)$ egyik integrálfüggvényének, $y(x)$ -nek a FOURIER-féle sora. (19) szerint:

$$\left\{ \int_0^{\pi} |y(x)|^{\nu} dx \right\}^{\frac{1}{\nu}} \geq \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{\nu}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\nu} \right\}^{\frac{1}{\nu}}. \quad (27)$$

Minthogy $y(0) = y(\pi) = 0$, azért az az $\bar{y}(x)$ függvény, amely a $[0, \pi]$ -n $y(x)$ -szel, $[0, \pi]$ -n kívül pedig 0-val egyenlő, szintén teljesen folytonos s így alkalmazható reá a (25) egyenlőtlenség. De $J_1 = \int_0^{\pi} |y(x)| dx$, $J_{\nu} = \int_0^{\pi} |y(x)|^{\nu} dx$, $K_{\nu} = \int_0^{\pi} |z(x)|^{\nu} dx$ s így (25), (26) és (27) alapján azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\pi} |y(x)| dx \geq C \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\nu} \right\}^{\frac{q}{q\nu-1}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right)^x |a_n|^x \left\{ \right\}^{\frac{q-1}{q\nu-1}}}, \quad (28)$$

ahol

$$C = \left[\frac{q}{2} H \left(q(\nu-1), \frac{1}{x} \right) \right]^{\frac{1}{1-q\nu}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{\nu} \frac{q\nu}{q\nu-1}}}{\left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{\nu} \cdot 2} \right]^{\frac{1}{q\nu-1}}};$$

egyszerű számítással igazolható, hogy ez azonos az 1. §-ban bevezetett C mennyiséggel.

Ha az a_n sorozatról még feltesszük, hogy monoton fogyva tart a 0-hoz, akkor FEJÉR egy eredménye szerint¹⁰ az $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n-1)x$ függvény a $[0, \pi]$ -n nemnegatív s így

$$\int_0^{\pi} |y(x)| dx = \int_0^{\pi} y(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n - \frac{1}{2}}.$$

Bevezetve ezt (28)-ba, éppen a bizonyítandó (9) egyenlőtlenséget nyerjük, egyelőre \geq jellel. Egyenlőség a következő okból nem léphet fel: Ha $x \neq 2$, akkor már (26)-ban, ha pedig $\nu \neq 2$,

¹⁰ L. FEJÉR, Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **39** (1936), 18–59. oldal, 1. különösen a 37. oldalt.

akkor (27)-ben sem állhatott egyenlőség. Ha $\alpha = \nu = 2$, akkor meg (25)-ben nem lehet egyenlőség, és pedig azért, mert, mint erről könnyen meggyőződhetünk, azok a függvények, amelyekre (25)-ben egyenlőség van ($y(x) = ay_{211}(bx + c)$), nem fejthetők a $[0, \pi]$ intervallumon $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin (2n-1)x$ alakú sorba monoton együtthatósorozattal.

A (10) egyenlőtlenség bizonyítása hasonlóképpen történik, csak most (25)-öt arra a függvényre alkalmazzuk, amelyiket a $[0, \pi]$ intervallumon a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ sor értelmez, a $[0, \pi]$ -n kívül pedig 0. Felhasználjuk itt FEJÉRnek azt az eredményét, hogy ha a_n pozitív tagú, 0-hoz tartó, konvex sorozat, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ a $[0, \pi]$ intervallumon nem-negatív.¹⁰

Megjegyzés. A bizonyításból látható, hogy ha (9)-ben és (10)-ben jobboldalt az a_n -ek helyett abszolút értéküket írjuk, akkor (9), illetve (10) érvényes marad minden olyan a_n sorozatra, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin (2n-1)x$, illetve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ a $[0, \pi]$ -n nem-negatív függvényt állít elő, feltéve, hogy a $\alpha = \nu = 2$ esetben ez a függvény nem $ay_{211}(bx + c)$ alakú. Utóbbi esetben ugyanis (9)-ben és (10)-ben a két oldal közt egyenlőség áll fenn.

Szőkefalvi Nagy Béla.

ÜBER CARLSONSCHE UND VERWANDTE UNGLEICHUNGEN.

Erstens werden die folgenden Verallgemeinerungen einer Ungleichung von CARLSON bewiesen:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|^q + \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \right|^q < \frac{\pi q}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma_1} |a_n|^{\sigma_1} \right\}^{\frac{1}{\sigma_1}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\sigma_2} \right\}^{\frac{1}{(\sigma_2-1)\sigma_1}}$$

und

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|^q < \frac{\pi q}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right)^{\sigma_1} |a_n|^{\sigma_1} \right\}^{\frac{1}{\sigma_1}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\sigma_2} \right\}^{\frac{1}{(\sigma_2-1)\sigma_1}},$$

wo $1 \leq \sigma_1 \leq 2$, $1 < \sigma_2 \leq 2$, $q = 1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1(\sigma_2-1)}$.

Dann wird bewiesen, dass für $1 < x \leq 2$, $v \geq 2$, $q = 1 + \frac{1}{x}$ folgende Ungleichungen gelten :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n - \frac{1}{2}} > C(x, v) \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^v \right\}^{\frac{q}{qv-1}}}{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right)^x a_n^x \right\}^{\frac{q-1}{qv-1}}} \quad (1)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n-1}}{2n-1} > 2^{\frac{qv}{1-qv}} C(x, v) \frac{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^v \right\}^{\frac{q}{qv-1}}}{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^x a_n^x \right\}^{\frac{q-1}{qv-1}}}, \quad (2)$$

und zwar (1) für jede einfach, (2) für jede zweifach monotone positive Folge a_n , für die die rechtsstehenden Reihen konvergieren. Ein Ausdruck von $C(x, v)$ mittels Gammafunktionen wird in § 1 gegeben.

Béla v. Sz. Nagy.

A KÖZÖNSÉGES ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁL- EGYENLETEKNEK EGY ÚJABB KÖZELÍTŐ MEG- OLDÁSA ÉS AZ ELÉRT PONTOSSÁGNAK AZ EDDIGIEKNÉL JOBB MEGBECSLÉSE.

Bevezetés.

A CAUCHY—LIPSCHITZ-*existenciátétel* értelmében, ha adva van egy közönséges elsőrendű differenciálegyenlet a következő alakban:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

és, ha adva van az x, y síkban egy T tartomány (1. ábra) a következő egyenlőtlenségekkel értelmezve:

$$x_0 \leq x \leq X; \quad |y - y_0| \leq M(x - x_0), \quad (2)$$

ahol M olyan számot jelent, amely nagyobb, mint bárhol a T tartományban $f(x, y)$ abszolút értéke,¹ és ebben a tartományban $f(x, y)$ egyértékű és folytonos, továbbá létezik mindenütt a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ parciális differenciálhányados és ez is egyértékű, folytonos és korlátos,² akkor tudjuk, hogy az (1) differenciálegyenlet-

¹ Amint látjuk, a M megválasztásánál egyszerre két szempontra kell vigyázni: ugyanaz a M jellemzi a T tartományban az $f(x, y)$ függvény viselkedését, de egyszersmint jellemzi magát a T tartományt is.

² A $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ existenciájának feltételezésénél valamivel kevesebb és mégis elegendő az ú. n. LIPSCHITZ feltevés: Létezik olyan M szám, hogy a T tartományban vett bármelyik két (x, y_1) és (x, y_2) értékrendszerre nézve áll a következő egyenlőtlenség:

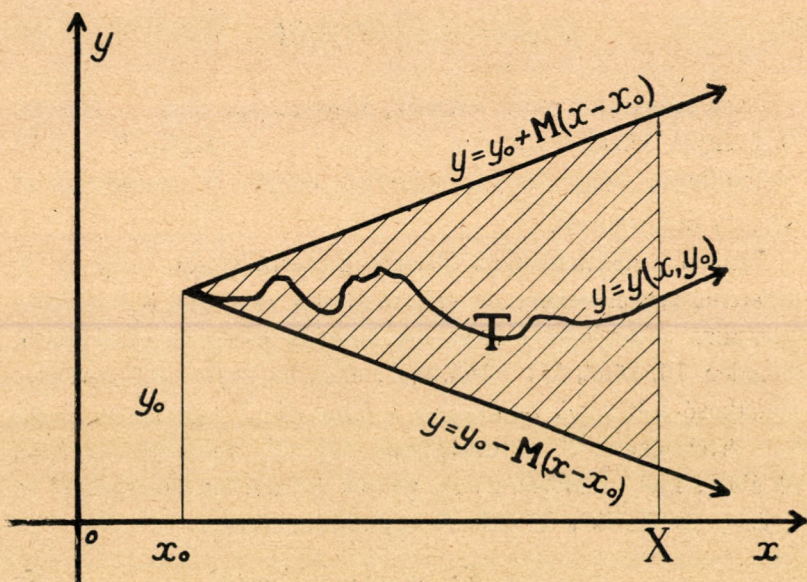
$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < M|y_2 - y_1|.$$

Ha a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ existál és korlátos, vagyis $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| < M$, akkor a LIPSCHITZ

nek van egy és csakis egy megoldása, azaz létezik egy és csakis egy olyan függvény, amely az x_0 értéknél y_0 értékkel egyenlő, az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban differenciálható, és kielégíti az (1) differenciálegyenletet. Legyen ez a függvény (mely nemcsak x -nek, hanem az y_0 kezdeti értékének is függvénye):

$$y = y(x, y_0). \quad (3)$$

A PICARD-féle *successív megközelítő módszer*. A fentebbi általános esetben az $y(x, y_0)$ függvénynek csak a létezése felől



1. ábra.

vagyunk biztosak, de ismeretes egynéhány módszer, amelyekkel azt tetszésszerű pontossággal meghatározhatjuk; hogy milyen pontosságot értünk el, annak megbecslésére szintén ismeretes egynéhány képlet.

A közelítő pontossággal való megoldási módszerek közül egyik

feltevés teljesül. Ugyanis a középértéktétel szerint (y alatt y_1 és y_2 közötti alkalmas értéket értve):

$$\left| f(x, y_2) - f(x, y_1) \right| \leq \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \cdot |y_2 - y_1| < M |y_2 - y_1|.$$

legfontosabb a PICARD-féle successiv megközelítési módszer, mely alkalmazható mindazoknál a differenciálegyenleteknél, melyekre a CAUCHY—LIPSCHITZ-existenciátétel érvényes és lényege a következő.

Először felvesszünk a fentebbi T tartományban egy tetszőszerinti folytonos függvényt, amelyik az x_0 helyen y_0 értékkel egyenlő. Legyen ez: $y_1(x)$, az y_2, \dots, y_k, \dots közelítő függvényeket pedig a következő egyenlet értelmezi:

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_k) d\xi. \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

Ezen integrálok mind léteznek, mivel az y_2, \dots, y_k, \dots közelítő függvények közül egyik sem lép ki a T tartományból,³ továbbá kimutatható, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ határérték létezik és megegyezik az $y(x, y_0)$ függvénnyel.

PERRON existenciátétele. PERRON mutatta ki azt, hogy az (1) differenciálegyenleteknél az existenciátétel érvényes a CAUCHY—LIPSCHITZ feltevéseknél kevesebb feltevés esetén is (lásd Math. Annalen 76. kötet, 471—484. lap): elég, ha az $f(x, y)$ függvényre vonatkozó feltevések fennállnak a fentebbi (2) egyenlőtlenségekkel értelmezett T tartománynak egy T_1 résztartományában (2. ábra), mely mindazon x, y pontok összessége, amelyeknél az x és y kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$x_0 \leq x \leq X; \quad \omega_1(x) \leq y \leq \omega_2(x), \quad (5)$$

ahol $\omega_1(x)$ és $\omega_2(x)$ oly függvények, hogy

1. az x_0 értékénél y_0 -val egyenlők,
2. az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban folytonosak,
3. existálnak a jobb- és baloldali derivátumaik $D_+ \omega_1(x)$, illetve $D_- \omega_1(x)$ és
4. $D_{\pm} \omega_1(x) \leq f(x, \omega_1(x)); \quad D_{\pm} \omega_2(x) \geq f(x, \omega_2(x)). \quad (6)$

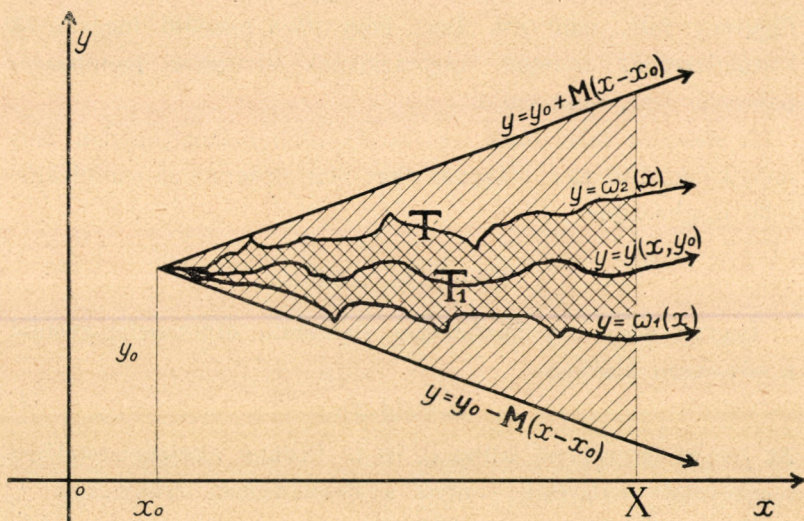
³ Ugyanis, mivel az $f(x, y)$ a T -ben korlátos és korlátja \mathbf{M} , $|f(x, y)| < \mathbf{M}$, azért

$$|y_2 - y_0| < \mathbf{M}(x - x_0), \dots, |y_{k+1} - y_0| < \mathbf{M}(x - x_0).$$

A T_1 lehet egy egészen keskeny sáv a T tartományban és csak akkor esik össze ez a T tartománnyal, ha

$$\omega_1(x) = y_0 - M(x - x_0) \quad \text{és} \quad \omega_2(x) = y_0 + M(x - x_0). \quad (7)$$

Az (1) differenciálegyenletek közül azoknál, amelyeknél csak a PERRON existenciátételnél megkövetelt feltevések teljesülnek, nem alkalmazható a fentebbi PICARD-féle megközelítési módszer. Ugyanis hiába választjuk úgy az $y_1(x)$ első megközelítési függ-



2. ábra.

vényt, hogy az mindenütt a T_1 tartományban legyen, a felől nem biztosít bennünket semmi, hogy a y_2, \dots, y_k, \dots közelítő függvények görbéi $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban nem metszik-e az $\omega_1(x)$, illetőleg $\omega_2(x)$ függvények görbéit, vagyis az említett közelítő függvények nem lépnek-e ki a T_1 tartományból. A T_1 határain kívül pedig az $f(x, y)$ függvényről nem tudunk semmit, tehát nem biztos, hogy a (4) integrálok kiszámíthatók.

Célkitűzés. A mi feladatunk most kettős:

1. Ki fogunk dolgozni egy olyan megközelítési módszert, amely alkalmazható lesz mindazoknál a differenciálegyenletek-

nél, amelyeknél PERRON existenciátétele fennáll, ha $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ az említett existenciátételnél értelmezett T_1 tartományban monoton növekvő, vagy monoton fogyó függvénye y -nak, vagy legalábbis ha a T_1 tartományt fel tudjuk darabolni olyan résztartományokra, hol teljesül vagy az első, vagy a második föltevés.

Ennek a megközelítő módszernek előnye lesz a PICARDEVAL szemben az is, hogy a közelítő függvények egyértelműleg és gyorsabban közelednek a differenciálegyenletet kielégítő $y(x, y_0)$ függvény felé, mint ott. Igaz, hogy itt a közelítő függvények kiszámításánál szereplő integrációknak elvégzése legtöbbször nehezebb lesz, mint amott.

2. Második feladatunk lesz az (1) differenciálegyenletek bármelyik közelítő megoldásánál elért pontosságnak az eddigieknél jobb megbecslése.

1. Közelítési módszer.

Legyen adva egy közönséges elsőrendű differenciálegyenlet a következő alakban:

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

Az $f(x, y)$ függvényre álljanak itt is PERRON existenciátételénél megkövetelt feltevések (vagyis a Bevezetésben értelmezett T_1 tartományban az $f(x, y)$ és $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ egyértékű, folytonos és korlátos, vagyis $|f(x, y)| < M$ és $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| < M$).

Mindenekelőtt bebizonyítjuk, hogy az (1) differenciálegyenletet kielégítő és az x_0 értéknél y_0 értékkel egyenlő $y(x, y_0)$ függvényre érvényes a következő egyenlet:

$$y(x, y_0) = Y(x) + e^{x_0} \int_{x_0}^x \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y)}{y - Y} d\xi - \int_{x_0}^x \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y)}{y - Y} d\xi \quad (2)$$

ahol $Y(x)$ tetszőszerinti függvény, amely az $x_0 \leq x \leq X$ inter-

vallumban mindenütt a T_1 tartományban marad és differenciálható.

E célból írjuk az (1) egyenletet a következő alakban:

$$y' - Y' = \frac{f(x, y) - f(x, Y)}{y - Y} (y - Y) + f(x, Y) - Y'. \quad (3)$$

Bevezetvén a

$$v(x) = y(x, y_0) - Y(x) \quad (4)$$

jelölést, nyerjük a következő egyenletet:

$$v'(x) = \frac{f(x, y) - f(x, Y)}{y - Y} v(x) + f(x, Y) - Y'. \quad (5)$$

Ha ide behelyettesítünk az $y(x, y_0)$ és $Y(x)$ értékeit, nyernénk v -re egy lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldása:

$$v(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y)}{y - Y} d\xi} \left\{ v(x_0) + \int_{x_0}^x [f(\chi, Y) - Y'] e^{-\int_{x_0}^{\chi} \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y)}{y - Y} d\xi} d\chi \right\}. \quad (6)$$

Ebből azonnal nyerjük a (2) egyenletet, ha figyelembe vesszük a (4)-et és azt, hogy $y(x_0, y_0)$, mint $Y(x_0)$ egyenlő y_0 -val, tehát $v(x_0) = 0$.

Az új közelítő módszernek lényege az, hogy itt is iterációval közelítjük meg a differenciálegyenletet kielégítő $y(x, y_0)$ függvényt, mint a PICARD-féle módszernél, (lásd a Bevezetésben a (4) egyenletet), azonban itt a Y_2, \dots, Y_k, \dots approximáló függvény-sorozatot a

$$Y_{k+1}(x) = Y_k(x) + e^{\int_{x_0}^x \frac{\partial f(\xi, Y_k)}{\partial Y_k} d\xi} \int_{x_0}^x [f(\chi, Y_k) - Y_k'] e^{-\int_{x_0}^{\chi} \frac{\partial f(\xi, Y_k)}{\partial Y_k} d\xi} d\chi \quad (k=1, 2, \dots) \quad (7)$$

egyenlet értelmezi.

Bebizonyítjuk, hogy ha az eddigi feltevések mellett még az is fennáll, hogy a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ az egész T_1 tartományban monoton növekvő függvénye y -nak és a $Y_1(x)$ első megközelítő függvény úgy választjuk meg, hogy

1. $Y_1(x_0) = y_0$ és az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban mindenütt a T_1 tartományban van, azaz $\omega_1(x) \leq Y_1(x) \leq \omega_2(x)$,
2. differenciálható függvénye x -nek és
3. érvényes rá az

$$f(x, Y_1) - Y'_k \geq 0 \quad (8)$$

egyelőtlenség,⁴ akkor

1. a (7) integrálok mind léteznek és

$$Y_1(x) \leq Y_2(x) \leq \dots \leq Y_k(x) \leq \dots \leq y(x, y_0), \quad (9)$$

vagyis ezek a függvények egyértelműleg mind jobban közelednek az $y(x, y_0)$ felé, és az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban sehol sem lépnek ki a T_1 tartományból,

2. a $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x)$ határérték létezik és megegyezik az $y(x, y_0)$ függvénnyel,

3. a közelítő függvények gyorsabban közelednek az $y(x, y_0)$ felé, mint a PICARD-féle módszerrel nyert függvények (lásd a Bevezetés (4) egyenletét).

Bizonyítás. 1. A fentebbi feltételeket kielégítő $Y_1(x)$ függvényeket PERRON alsófüggvényeknek (Unterfunktionen) nevezte, mivel ezek görbéje a T_1 tartományban mindenütt alatta van az $y(x, y_0)$ görbének, vagy legalább is sehol sem emelkedik annak fölébe. Hogy ez így van, az látható a (2) egyenletből is $Y(x) = Y_1(x)$ esetén a (8) figyelembe vételével.

Az alapfeltevések szerint $Y_2(x)$ mindenesetre létezik, mivel a $Y_1(x)$ mindenütt a T_1 tartományban van és a (7) egyenletből $k = 1$ esetén:

$$Y_2(x) = Y_1(x) + e^{\int_{x_0}^x \frac{\partial f(\xi, Y_1)}{\partial Y_1} d\xi} \int_{x_0}^x [f(\chi, Y_1) - Y_1'] e^{-\int_{x_0}^{\chi} \frac{\partial f(\xi, Y_1)}{\partial Y_1} d\xi} d\chi. \quad (10)$$

Hogy azonban a $Y_3(x)$ létezése fölől biztosak legyünk, először azt kell igazolni, hogy a $Y_2(x)$ is mindenütt a T_1 tartományban van.

⁴ Ilyen függvény pl. a T_1 tartományt alulról határoló $\omega_1(x)$, ha az az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban differenciálható.

A (10) egyenletből azonnal látjuk, hogy $Y_2(x_0) = Y_1(x_0) = y_0$; továbbá figyelembe véve (8) egyenlőtlenséget, kitűnik az is, hogy

$$Y_1(x) \leq Y_2(x). \quad (11)$$

Annak igazolására, hogy a $Y_2(x)$ az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban mindenütt a T_1 tartományban van, még azt kell bebizonyítani, hogy

$$Y_2(x) \leq y(x, y_0). \quad (12)$$

A (2) egyenlet szerint $Y(x) = Y_1(x)$ esetén:

$$y(x, y_0) = Y_1(x) + e^{x_0} \int_{x_0}^x \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y_1)}{y - Y_1} d\xi \int_{x_0}^x [f(\chi, Y_1) - Y_1'] e^{x_0} - \int_{x_0}^x \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y_1)}{y - Y_1} d\xi d\chi. \quad (13)$$

Ebből pedig úgy nyerjük a (10) egyenletet, hogy a jobboldalon szereplő $y(x, y_0)$ helyébe, a nálánál mindenütt kisebb, vagy vele egyenlő $Y_1(x)$ «alsófüggvényt» írjuk. Hogy bebizonyítsuk, hogy ilyenkor kisebbitjük a (13) jobboldalát, tehát, hogy fennáll a (12) egyenlőtlenség, írjuk fel azt az összeget, amelyikből, mint határértéket nyertük a (13) egyenletnél szereplő χ változós integrált, és szorozzuk be az integráljel előtti exponenciális függvénnyel:

$$y(x, y_0) = Y_1(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ [f(x_1, Y_1) - Y_1'] e^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y_1)}{y - Y_1} d\xi \cdot \Delta x_1 + \right. \\ \left. + \dots + [f(x_n, Y_1) - Y_1'] e^{x_n} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y_1)}{y - Y_1} d\xi \cdot \Delta x_n \right\}. \quad (14)$$

Mivel alapfeltevés szerint a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ az egész T_1 tartományban monoton növekvő függvénye y -nak, alkalmazva a középértéktételt, azonnal látható, hogy kisebbitjük az $\frac{f(x, y) - f(x, Y_1)}{y - Y_1}$ értékét, ha $y(x, y_0)$ helyébe, a nálánál mindenütt kisebb, vagy vele egyenlő $Y_1(x)$ «alsófüggvényt» írjuk, akkor pedig a (8) figyelembevételével azonnal látszik, hogy kisebbedik a (14) egész jobboldala,

tehát fennáll a (12) egyenlőtlenség. És így a (11) és (12) értelmében a $Y_2(x)$ az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban mindenütt a $Y_1(x)$ és $y(x, y_0)$ között, vagyis a T_1 tartományban van.

De ezenkívül a $Y_2(x)$ függvényre érvényes a (8)-hoz hasonló egyenlőtlenség is (vagyis $Y_2(x)$ is «alsófüggvény»):

$$f(x, Y_2) - Y_2' \geq 0. \quad (15)$$

Ugyanis differenciáljuk x szerint a (10) egyenletet:

$$Y_2' = \frac{\partial f(x, Y_1)}{\partial Y_1} (Y_2 - Y_1) + f(x, Y_1) \quad (16)$$

és képezzük az $f(x, Y_2) - Y_2'$ különbséget:

$$f(x, Y_2) - Y_2' = \left[\frac{f(x, Y_2) - f(x, Y_1)}{Y_2 - Y_1} - \frac{\partial f(x, Y_1)}{\partial Y_1} \right] (Y_2 - Y_1). \quad (17)$$

A $Y_2 - Y_1$ a (11) szerint sehol sem negatív, a szögletes zárójelben lévő tag szintén, mivel a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ monoton növekvő függvénye y -nak, tehát fennáll a (15) egyenlőtlenség.

Ezekután pedig a $Y_2(x)$ mindenben a $Y_1(x)$ függvénnyel megegyező tulajdonságú «alsófüggvény».

Ha pedig a $Y_2(x)$ függvényt választottuk volna a $Y_1(x)$ helyett, első megközelítő függvénynek, akkor a $Y_3(x)$ függvényről lehetne most mindazt elmondani, amit a $Y_2(x)$ függvényről elmondottunk. Vagyis $Y_3(x)$ is az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban mindenütt a T_1 tartományban van,

$$Y_2(x) \leq Y_3(x) \leq y(x, y_0) \quad (18)$$

és mindenben a Y_2 illetőleg a Y_1 első közelítő függvénnyel megegyező tulajdonságú «alsófüggvény». És így tovább. Nyilván való ezek szerint, hogy az összes közelítő függvények léteznek, valamennyien a T_1 tartományban vannak, továbbá mindenben a $Y_1(x)$ első közelítő függvénnyel megegyező tulajdonságú «alsófüggvények» és érvényes rájuk a (9) egyenlőtlenség-sorozat.

2. A (9) szerint a közelítő függvénynek az $x_0 \leq x \leq X$ zárt intervallumban, bármelyik x értéknél, egyértelműleg mind jobban

és jobban közelednek az $y(x, y_0)$ felé, de az $y(x, y_0)$ mindenütt felső korlátot is képez számunkra, ezért a $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x)$ határfüggvény létezik.

Az is kimutatható továbbá, hogy az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban a közelítő függvények egyenletesen konvergens sorozatot alkotnak.

Ugyanis, ha bevezetjük a következő jelölést:

$$i_{k+1}(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{\partial f(\xi, Y_k)}{\partial Y_k} d\xi} \int_{x_0}^x [f(\chi, Y_k) - Y_k] e^{-\int_{x_0}^{\chi} \frac{\partial f(\xi, Y_k)}{\partial Y_k} d\xi} d\chi, \quad (19)$$

akkor a (7) szerint

$$Y_2(x) - Y_1(x) = i_1(x), \dots, Y_n(x) - Y_{n-1}(x) = i_{n-1}(x), \quad (20)$$

vagyis

$$Y_n(x) = Y_1(x) + \sum_{k=2}^n (Y_k - Y_{k-1}) = Y_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} i_k(x), \quad (21)$$

Mivel a közelítő függvények mind «alsófüggvények», azaz érvényes valamennyire a (8) és (15) egyenlőtlenségekhez hasonló egyenlőtlenség, a (19) szerint

$$i_k(x) \leq i_k(X). \quad (22)$$

És mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(X)$ határérték létezik, egy bizonyos N számtól kezdve minden $n > N$ -re nézve a (21) szerint

$$0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} i_k(X) < \varepsilon; \quad (23)$$

ezen utóbbi egyenlőtlenség pedig a (22) szerint ugyanattól a N számtól kezdve bármelyik az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumból vett x értéknél méginkább teljesül s így a közelítő függvények egyenletesen konvergens sorozatot alkotnak.

Az is kimutatható továbbá, hogy a $Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_n, \dots$ differenciáhányadosok is egyenletesen konvergens sorozatot alkotnak az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y'_n(x) = f(x, z), \quad (24)$$

ahol $z(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x)$.

Ugyanis a (7) egyenletből

$$Y'_n(x) = \frac{\partial f(x, Y_{n-1})}{\partial Y_{n-1}} (Y_n - Y_{n-1}) + f(x, Y_{n-1}) \quad (25)$$

és ezért

$$f(x, z) - Y'_n = \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta} (z - Y_{n-1}) - \frac{\partial f(x, Y_{n-1})}{\partial Y_{n-1}} (Y_n - Y_{n-1}), \quad (26)$$

ahol $Y_{n-1} \leq \eta \leq z$. Ezek után pedig

$$|f(x, z) - Y'_n| \leq \left| \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta} (z - Y_{n-1}) \right| + \left| \frac{\partial f(x, Y_{n-1})}{\partial Y_{n-1}} (Y_n - Y_{n-1}) \right|. \quad (27)$$

Mivel $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ a T_1 tartományban korlátos: $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| < M$ és mivel a (9) alapján $|Y_n - Y_{n-1}| \leq |z - Y_{n-1}|$, azért

$$|f(x, z) - Y'_n| \leq 2M(z - Y_{n-1}). \quad (29)$$

De, amint látjuk, a közelítő függvények egyenletesen konvergens sorozatot alkotnak, ezért az x -től függetlenül egy bizonyos N számtól kezdve minden $n-1 > N$ -re nézve $|z - Y_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2M}$; akkor azonban ugyanattól a N számtól kezdve szintén függetlenül az x -től

$$|f(x, z) - Y'_n| < \varepsilon.$$

Vagyis a $Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_n, \dots$ függvények is egyenletesen konvergens sorozatot alkotnak és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y'_n = f(x, z). \quad (30)$$

Azonban a Y'_1, \dots, Y'_n, \dots függvények egyenletes konvergenciaja miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y'_n = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = z', \quad (31)$$

tehát végeredményben

$$z' = f(y, z). \quad (32)$$

Ezen utóbbi egyenlet szerint a $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x) = z(x)$ az (1) differenciálegyenletet kielégíti és e mellett ez a függvény olyan, amelyik az x_0 értéknél y_0 értékkel egyenlő,⁵ ilyen függvény pedig az existenciátétel értelmében csak egy van: $y(x, y_0)$, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x) = y(x, y_0).$$

3. Ha a PICARD-féle megközelítésnél is első közelítő függvénynek a $Y_1(x)$ függvényt vesszük fel, az $y_2(x)$ második megközelítő függvényt (lásd Bevezetés (4) egyenletét) a (13) egyenletből úgy nyerhetjük, ha az exponenciális tényezőket az egységgel helyettesítjük:

$$y_2(x) = Y_1(x) + \int_{x_0}^x [f(\chi, Y_1) - Y_1'] d\chi = y_0 + \int_{x_0}^x f(\chi, Y_1) d\chi. \quad (33)$$

Hogy ez milyen nagy elhanyagolás, az kitűnik különösen a (14) egyenletből; a (10) egyenlet világosan szemlélteti, hogy mennyivel kisebb elhanyagolással nyerjük mi a második közelítő függvényt. A PICARD megközelítésnél eszközölt ezen elhanyagolás természetesen azt is eredményezheti, hogy a közelítő függvények az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban átlépik a T_1 tartomány határait. Ezért nem alkalmazható ez olyan differenciálegyenleteknél, amelyekre vonatkozó feltevések csak a T_1 tartományban érvényesek.

Igaz ugyan, hogy nálunk viszont az integrálok elvégzése nehezebb, de még mindig megvan annak a lehetősége, hogy az integrálokon egyszerűsítsünk újabb elhanyagolással, vigyázva azonban arra, hogy a közelítő függvények «alsófüggvény» jellegét ne változtassuk meg.

★

Ha a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ mindenütt a T_1 tartományban monoton csökkenő függvénye y -nak, akkor $Y_1(x)$ első közelítő függvénynek «felsőfüggvényt» választunk, vagyis olyat, amelyik

⁵ Ugyanis minden közelítő függvény a $Y_1(x)$ függvénnyel mindenben megegyező tulajdonságú volt, az pedig a feltevés szerint az x_0 értéknél y_0 értékkel volt egyenlő.

1. $Y_1(x_0) = y_0$ és az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban mindenütt a T_1 tartományban van,

2. differenciálható és

3. kielégíti az

$$f(x, Y_1) - Y_1' \leq 0 \quad (34)$$

egyenlőtlenséget.⁶ Teljesen az előzőkhöz hasonlóan lehet ilyenkor bebizonyítani, hogy

1. a (7) egyenlettel értelmezett közelítő függvények mind léteznek, továbbá

$$Y_1(x) \geq Y_2(x) \geq \dots \geq Y_k(x) \geq \dots \geq y(x, y_0), \quad (35)$$

vagyis ezek mindjobban közelednek a differenciálegyenletet kielégítő $y(x, y_0)$ felé és seholsem lépnek ki a T_1 tartományból,

2. határértékük $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$ létezik és megegyezik az $y(x, y_0)$ függvénnyel.

3. Ők maguk gyorsabban közelednek az $y(x, y_0)$ felé, mint a PICARD-féle közelítéssel nyert függvények.

Ha a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ függvényről az egész T_1 tartományban sem azt nem mondhatjuk el, hogy monoton növekvő, sem azt, hogy monoton fogyó függvénye y -nak, de ha a T_1 feldarabolható egy vagy több vonaldarab segítségével olyan résztartományokra, amelyekben már teljesedik vagy az első, vagy a második feltevés, akkor a megközelítést szakaszonként végezhetjük el az egyes résztartományokban, a már letárgyalt módon.

A T_1 tartománynak ezen feldarabolása történhetik pl. a $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$ görbe segítségével (természetesen, ha a $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ az egész T_1 tartományban létezik és folytonos a függvény).

Ugyanis ott, ahol a $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ pozitív, illetőleg negatív, a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ növekvő, illetőleg csökkenő függvénye y -nak. A foly-

⁶ Ilyen függvény pl. a T_1 tartományt felülről határoló $\omega_2(x)$, ha az az $x_0 \leq x \leq X$ intervallumban differenciálható függvénye x -nek.

tonosság miatt a $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$ görbe mindenesetre elválasztja egymástól a T_1 tartomány azon pontjait, amelyekhez a $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ függvény pozitív, illetőleg negatív értékei tartoznak, tehát T_1 tartományt a kívánt módon feldarabolja. Hogy azonban a $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$ görbe tényleg ilyen pontokat választ-e el egymástól, azt még közelebbi vizsgálattal kell eldönteni, vagy közvetlen szemlélettel, vagy a $\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial y^k}$ magasabbrendű parciális differenciálhányadosokkal (teljesen az egyváltozós függvények analógiájára).

2. A közelítő megoldásoknál ejtett hibák megbecslése.

Gondoljuk, hogy az

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

differenciálegyenletet kielégítő és az x_0 értéknél y_0 értékkel egyenlő függvényt bármily módon megközelítettük és nyertük az előző fejezet (2) egyenleténél tetszőlegesen felvett $Y(x)$ függvényt; az előző fejezet (2) egyenlete értelmében az eltérés $y(x, y_0)$ és $Y(x)$ között legfeljebb a következő:

$$|y(x, y_0) - Y(x)| \leq e^{x_0} \int_{x_0}^x \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y)}{y - Y} d\xi - \int_{x_0}^x \frac{f(\xi, y) - f(\xi, Y)}{y - Y} d\xi \quad (2)$$

Ha az y helyébe a jobboldalon olyan függvényt írunk, amellyel növeljük az $\frac{f(x, y) - f(x, Y)}{y - Y}$ értékét, akkor az utóbbi egyenlőtlenség méginkább érvényes ⁷ és ilyen módon vele megbecsülhetjük az $y(x, y_0)$ és $Y(x)$ közötti eltérést.

Például, ha a Bevezetésben értelmezett T_1 tartományban $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ mindenütt monoton növekvő, vagy monoton fogyó

⁷ Ez látható, ha felírjuk azt az összeget, amelyikből mint határértéket nyertük az χ változós integrált, és beszorzunk az integráljel előtti exponenciális tényezővel (lásd előző fejezet (14) egyenletét).

függvénye y -nak, akkor elég, ha az $y(x, y_0)$ helyett egy bizonyos a T_1 tartományban levő $Y_1(x)$ felső, illetőleg $Y_a(x)$ alsó függvényt írjuk, mert alkalmazva az integrálszámítás első középértéktételét, látható, hogy ezáltal nagyobbítjuk az $\frac{f(x, y) - f(x, Y)}{y - Y}$ értékét.

Ha azonban a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ a T_1 tartományban nagyon szeszélyesen viselkedő függvény, akkor a $\frac{f(x, y) - f(x, Y)}{y - Y}$ helyett oly M számot írunk, amelyik az egész T_1 tartományban nagyobb, mint $\left| \frac{f(x, y) - f(x, Y)}{y - Y} \right|$; ezzel a (2) egyenlőtlenség a következőképpen alakul:

$$|y(x, y_0) - Y(x)| \leq e^{M(x-x_0)} \int_{x_0}^x |f(\chi, Y) - Y'| e^{-M(\chi-x_0)} d\chi. \quad (3)$$

Ez utóbbi egyenlőtlenséggel még mindig jobban meg tudjuk becsülni az $y(x, y_0)$ és $Y(x)$ közötti eltérést, mint ahogyan az az eddig képletekkel lehetséges. A (3) egyenlőtlenség ugyanis magába foglalja úgy a BIEBERBACH: Theorie der Differentialgleichungen 3. kiadás, 40. oldalán, mint a DE LA VALLÉE POUSSIN: Cours d'Analyse, 5. kiadás, II. kötet, 137. oldalán található becslő formulákat. Ha ugyanis a (3) egyenlőtlenségben a $|f(x, Y) - Y'|$ helyett azt a δ számot írjuk, amelyik mindenütt nagyobb nála és az integrálást elvégezzük, nyerjük DE LA VALLÉE POUSSIN formuláját:

$$|y(x, y_0) - Y(x)| \leq \frac{\delta}{M} [e^{M(x-x_0)} - 1]. \quad (4)$$

Ha a (3) egyenlőtlenségnél nemcsak az $|f(x, Y) - Y'|$ helyett írjuk mindenütt a nálánál nagyobb δ számot, hanem azonkívül még a χ változós integráljel alatt szereplő exponenciális tényezőt is egynek vesszük, nyerjük a BIEBERBACH könyvében található képletet:

$$|y(x, y_0) - Y(x)| \leq \delta(x - B_0) e^{M(x-x_0)}. \quad (5)$$

Tóth Ferenc.

EINE NEUE ANNÄHERUNGSMETHODE FÜR GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG UND EINE NEUE ABSCHÄTZUNG DER ERREICHTEN GENAUIGKEIT.

I. Die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ lösen wir näherungsweise mit Hilfe der Folge folgender Funktionen:

$$Y_{k+1}(x) = Y_k(x) + e^{x_0} \int_{x_0}^x \frac{\partial f(\xi, Y_k)}{\partial Y_k} d\xi \int_{x_0}^x [f(\chi, Y_k) - Y_k'] e^{x_0} - \int_{x_0}^x \frac{\partial f(\xi, Y_k)}{\partial Y_k} d\xi d\chi \quad (k=1, 2, \dots).$$

(Die exponentialen Faktoren gleich 1 gesetzt, geht diese Iterationsformel in die PICARDSche über.)

Diese Methode, ist anwendbar, wenn $f(x, y)$ und $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ in dem von unten mit einer beliebigen Unterfunktion und von oben mit einer beliebigen Oberfunktion (wie es O. PERRON in seiner Arbeit in den Math. Annalen, Band 76. genannt hat) begrenzten Gebiet T eindeutig, stetig und beschränkt sind, und $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ im ganzen T eine monoton zunehmende, oder abnehmende Funktion von y ist, oder wenn T in solche Teilgebiete eingeteilt werden kann, für welche entweder die erste, oder die zweite Forderung besteht.

Als erste Annäherung $Y_1(x)$ muss man eine Unterfunktion, oder eine Oberfunktion wählen, je nach dem $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ im Gebiete T eine monoton zunehmende, oder abnehmende Funktion von y ist und dann kann man beweisen, dass 1) die nach der obigen Gleichung berechneten Funktionen Y_2, \dots, Y_n, \dots sich monoton nach $y(x, y_0)$ nähern; 2) bleiben alle im Gebiete T , 3) es existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x)$ und 4) es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x) = y(x, y_0).$$

II. Bei den Annäherungen schätzen wir die Genauigkeit mit der folgenden Formel ab:

$$|y(x, y_0) - Y(x)| \leq e^{M(x-x_0)} \int_{x_0}^x |f(\chi, Y) - Y'| e^{-M(\chi-x_0)} d\chi,$$

wo $Y(x)$ die näherungsweise Lösung der Differentialgleichung ist und M die Zahl bedeutet, welche im ganzen Gebiet T grösser ist als $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|$.

Wenn $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ eine im Gebiet T monoton zunehmende, oder abnehmende Funktion von y ist, können wir die erreichte Genauigkeit noch besser abschätzen.

F. Tóth.

A PARABOLÁVAL HIPEROSZKULÁLÓ EGYENLŐOLDALÚ HIPERBOLÁK RENDSZERE.

Legyenek az x, y, z a sík tetszőleges pontjának DESCARTES-féle homogén koordinátái. Legyenek továbbá $a_{ik} = a_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$) egy λ paraméter racionális egész függvényei és r a legmagasabb rendűnek a foka. Az

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2(a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}zx) = 0$$

egyenlet a változó λ paraméter szerint ∞^1 kúpszeletet képvisel. E kúpszeletek — Γ_λ^2 — összességét egydimenziós r indexű racionális kúpszeletrendszernek nevezzük.

Így értelmezett két kúpszelet, Γ_λ^2 és Γ_μ^2 , érintkezhetik. Ebben az esetben jelöljük a közös érintőt $t_{\lambda\mu}$ -vel, az érintkezési pontot $T_{\lambda\mu}$ -vel. Az érintkezés követelménye a λ és μ paraméter között egy $c(\lambda, \mu) = 0$ algebrai korrespondenciát létesít. A $T_{\lambda\mu}$ pontok összességét a kúpszeletrendszer önérintkezési-vonalának, röviden T -vonalnak, a $t_{\lambda\mu}$ egyenesek által burkolt görbét önérintési burkolónak, röviden t -burkolónak nevezzük.

Lehetséges, hogy a t -burkoló, mint pontgörbe, a T -vonallal azonos.¹ Általában ez nem áll.²

Idézett dolgozatom a következő kérdés általánosabb tárgyalását tartalmazza. Legyen C^2 egy egyenlőoldaltú hiperbola. A C^2 -tel λ pontjában egy nem kettősegyenessé degenerált parabola,

¹ PL. L. BERZOLARI: *Sull'equazione differenziale di un sistema ∞^1 di coniche osculatrici a una conica data*, «Bollettino dell'U. M. I.» s. II., anno II (1939).

² PL. F. KÁRTESZI: *Sopra un sistema di coniche ∞^1 e di indice 4*, «Bollettino dell'U. M. I.» s. II., anno II (1940).

Γ_λ^2 , hiperoszkulál. A Γ_λ^2 , Γ_μ^2 parabola-pár érintkezését kifejező $c(\lambda, \mu) = 0$ korrespondencia egy olyan projektivitás, amelynek kettőspontjai a C^2 -nek végtelenben fekvő pontjai. A Γ_λ^2 parabolák alkotta kúpszeletrendszer indexe 4, T -vonala pedig C^2 -tel koaszimptotikus egyenlőoldalú hiperbola. A rendszer t -burkolója az a sugársor, amelynek a sorozópontja a C^2 -nek középpontja.

Jelen dolgozatomban, bizonyos szempontból, a kérdést megfordítva teszem fel. C^2 legyen parabola, λ pontjában hiperoszkuláló egyenlőoldalú hiperbola Γ_λ^2 . Megvizsgálom a Γ_λ^2 egyenlőoldalú hiperbolák alkotta rendszer tulajdonságait és ezen az úton a kardiodnak egy új származtatását is megmutatom.

A Γ_λ^2 egyenlőoldalú hiperbolák rendszerének az indexe szintén 4. A Γ_λ^2 középpontját jelölje O_λ . Az O_λ pontok mértani helye a C^2 -tel kongruens parabola. A rendszer T -vonala negyedrendű és harmadosztályú racionális görbe; a t -burkoló ötödosztályú és hatodrendű racionális görbe. A $c(\lambda, \mu)$ korrespondencia pedig $[4, 4]$ típusú.

1. A koordinátarendszer alkalmas választásával a sík tetszőleges paraboláját az

$$x:y:z = \lambda^2:\lambda:1 \quad (1.1)$$

paraméteres alak képviseli. A sík tetszőleges egyenlőoldalú hiperbolájának az egyenlete általában

$$\Gamma^2 \equiv x^2 - y^2 + a_{33}z^2 + 2(a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}zx) = 0 \quad (1.2)$$

alakban írható. Az (1.1) értékeit az (1.2)-be helyettesítve a

$$\lambda^4 + 2a_{12}\lambda^3 + (2a_{31} - 1)\lambda^2 + 2a_{23}\lambda + a_{33} = 0$$

egyenlet származik. Azon esetben, ha az egyenlet négy gyöke egyenlő, a gyökök és együtthatók összefüggése alapján, a hiperoszkuláló egyenlőoldalú hiperbola egyenletét nyerjük:

$$\Gamma_\lambda^2 \equiv x^2 - y^2 + \lambda^2 z^2 - 4\lambda xy - 4\lambda^3 yz + (6\lambda^2 + 1)zx = 0. \quad (1.3)$$

Amint a legmagasabb kitevő mutatja, a Γ_λ^2 kúpszeletek alkotta rendszer indexe 4.

2. A Γ_λ^2 kúpszelet diszkriminánsa:

$$\frac{1}{8} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4\lambda & 6\lambda^2+1 \\ -4\lambda & -2 & -4\lambda^3 \\ 6\lambda^2+1 & -4\lambda^3 & 2\lambda^4 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot (4\lambda^2+1)^3.$$

Ennek a harmadik sorához adjungált aldeterminánsok, — az $A_{31} = (4\lambda^2+1)(4\lambda^2+2)$, $A_{32} = -(4\lambda^2+1) \cdot 4\lambda$, $A_{33} = -(4\lambda^2+1) \cdot 4$ — a Γ_λ^2 középpontjának — O_λ -nak — a koordinátaival arányosak. Tehát az O_λ koordinátáinak aránya:

$$x:y:z = 2\lambda^2+1:-2\lambda:-2.$$

Egy pillanatra térjünk át a DESCARTES-féle nem-homogén koordinátákra: $X=x:z$, $Y=y:z$. Ezáltal a C^2 egyenlete az $X-Y^2=0$ alakot ölti. Az O_λ pont koordinátái pedig

$$X = -\frac{1}{2}(2\lambda^2+1), \quad Y = \lambda. \quad (2.1)$$

A C^2 parabola vezéregyenese az $X = -\frac{1}{4}$ egyenes. A λ és az O_λ pont ezen egyenesre nézve szimmetrikus pár. Mialatt a λ leírja a C^2 -et, az O_λ leírja az $X-Y^2+\frac{1}{2}=0$ egyenlettel képviselt parabolát. Ez a parabola C^2 -nek a (közös) vezéregyenesre vonatkoztatott tükröképe.

3. A tetszőleges Γ_λ^2 és Γ_μ^2 alapkúpszeletek által létesített kúpszeletsor egyenlete

$$\Gamma_\lambda^2 + x \cdot \Gamma_\mu^2 = 0. \quad (3.1)$$

A $\Gamma_\lambda^2 + x\Gamma_\mu^2$ kúpszelet helyett röviden csak x kúpszeletet mondunk. A x kúpszelet diszkriminánsát fejtsük ki a x paraméter hatványai szerint:³

$$\Delta_{\mu\mu\mu}x^3 + \Delta_{\lambda\mu\mu}x^2 + \Delta_{\lambda\lambda\mu}x + \Delta_{\lambda\lambda\lambda} \equiv \Delta(\lambda, \mu; x). \quad (3.2)$$

³ Vö. pl. E. CIANI: *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici*, (Pisa 1915.) 78–82. old.

A kifejezések egyszerűsége végett vezessük be a következő jelöléseket:

$$\varrho = 4\lambda^2 + 1, \quad \sigma = 4\mu^2 + 1; \quad \nu = 3(4\lambda^2 + 1)(4\mu^2 + 1) - 4(\lambda - \mu)^4. \quad (3.3)$$

Ezekkel a $\Delta(\lambda, \mu; x)$ együtthatóinak szerkezete egyszerűen kifejezhető:

$$\Delta_{\lambda\lambda\lambda} = \frac{1}{4} \varrho^3, \quad \Delta_{\lambda\mu\mu} = \frac{1}{4} \varrho\nu, \quad \Delta_{\lambda\lambda\mu} = \frac{1}{4} \sigma\nu, \quad \Delta_{\mu\mu\mu} = \frac{1}{4} \sigma^3. \quad (3.4)$$

Tehát a diszkrimináns:

$$\Delta(\lambda, \mu; x) \equiv \frac{1}{4} \{ \sigma^3 \cdot x^3 + \sigma\nu \cdot x^2 + \varrho\nu \cdot x + \varrho^3 \}. \quad (3.5)$$

A x kúpszelet egyenespárrá degenerál, ha a diszkrimináns zérus, azaz $\sigma^3 \cdot x^3 + \sigma\nu \cdot x^2 + \varrho\nu \cdot x + \varrho^3 = 0$ harmadfokú egyenlet teljesül. A Γ_λ^3 és Γ_μ^3 alapkúpszeletek érintkezését, szükséges és elegendőképpen, két egyenlő x gyök létezése vonja maga után.³

Jelölük x_0 -sal a kétszeres és x_1 -gyel az egyszeres gyököt. Mikor lép fel az egyenlet kétszeres gyöke? Mivel

$$\sigma^3 \cdot x^3 + \sigma\nu \cdot x^2 + \varrho\nu \cdot x + \varrho^3 = (\sigma x + \varrho) \{ \sigma^2 \cdot x^2 + (\nu - \varrho\sigma)x + \varrho^2 \}, \quad (3.6)$$

a szóbanforgó egyenlet gyökei:

$$x_0 = -\frac{\varrho}{\sigma}, \quad x_1, x_2 = \frac{\varrho\sigma - \nu \pm \sqrt{(\varrho\sigma + \nu)(\nu - 3\varrho\sigma)}}{2\sigma^2}.$$

A három gyök közül kettő egyenlő, ha a következő négy egyenlőség bármelyike teljesül:

$$\varrho = 0, \quad \sigma = 0; \quad 3\varrho\sigma - \nu = 0, \quad \varrho\sigma + \nu = 0. \quad (3.7)$$

Visszatekintve a (3.3) egyenlőségekre, a (3.7) alatti egyenlőségek a következő alakban írhatók:

- I. $4\lambda^2 + 1 = 0,$
- II. $4\mu^2 + 1 = 0;$
- III. $\lambda = \mu,$
- IV. $(\lambda + \mu)^4 - 8\lambda\mu(\lambda + \mu)^2 - 4(\lambda + \mu)^2 + 8\lambda\mu - 1 = 0.$

E négy egyenlet mindegyike korrespondenciát létesít a C^2 parabola λ és μ homológ pontjai között. Az I. és II. degenerált korrespondenciát képvisel, a III. azonosságot, a IV. pedig egy szimmetrikus [4, 4] típusú algebrai korrespondenciát

4. Mind az I., mind a II. korrespondencia esetén az érintkező Γ_λ^2 és Γ_μ^2 hiperbolák egyike fix, a C^2 -hez fókuszából sugárzó érintő, kétszeresen [számítva; a másika tetszőleges. A fókuszából sugárzó érintők egyike is, másika is átmegy a sík egy-egy képzetes körpontján. Ezért a két egyenes mindegyike önmagára merőleges, tehát kettősegyenesnek tekintve, degenerált egyenlő-oldalú hiperbola. Egy kettősegyenesnek valamely kúpszelettel alkotott bármelyik metszéspontja két végtelenül szomszédos pontnak tekinthető. Ezért a két képzetes érintő a T -vonal szinguláris komponense.

A III. korrespondencia, a $\lim \lambda = \mu$ határátmenet révén arra vezet, hogy C^2 , a kúpszeletrendszer hiperoszkuláló burkolója, szintén komponense a T -vonalnak. A C^2 -et triviális komponensnek nevezzük.

A továbbiak folyamán a szinguláris és a triviális komponens nem számítjuk a T -vonálhoz. T -vonálnak csak a IV. korrespondenciával értelmezett $T_{\lambda\mu}$ pontok összességét nevezzük.

5. Ha $\varrho, \sigma \neq 0$, akkor a (3.6) harmadfokú egyenlet kétszeres gyöke csak a $x = \varrho : \sigma$ lehet. A x kúpszelet egyenespárra degenerál, duplapontja a Γ_λ^2 és Γ_μ^2 érintkezési pontja.⁴ A degenerált kúpszelet középpontja a duplapont. Meg kell tehát határoznunk, a $T_{\lambda\mu}$ végett, a $\sigma \cdot \Gamma_\lambda^2 + \varrho \Gamma_\mu^2 = 0$ kúpszelet középpontját.

E végből tekintsük a kúpszelet diszkriminánsának az első két sorából álló mátrixot:

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2(\sigma + \varrho) & -4(\lambda\sigma + \mu\varrho) & 6(\lambda^2\sigma + \mu^2\varrho) + (\sigma + \varrho) \\ -4(\lambda\sigma + \mu\varrho) & -2(\sigma + \varrho) & -4(\lambda^3\sigma + \mu^3\varrho) \end{vmatrix}.$$

Az m -ik és n -ik oszlopból alakított aldeterminánst jelöljük a_{mn} -nel, a középpont koordinátáit x, y, z -vel, akkor

$$x : y : z = a_{23} : a_{31} : a_{12}.$$

⁴ Vö. 3-mal.

A mátrixból, (3.3) egyenlőségeket is figyelembe véve:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{23} &= 8(4\lambda^2+1)(4\mu^2+1)\{2\lambda\mu(\lambda+\mu)^2+3(\lambda+\mu)^2-6\lambda\mu+1\}, \\ \alpha_{31} &= 8(4\lambda^2+1)(4\mu^2+1)\{(\lambda+\mu)^3-8\lambda\mu(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu)\}, \\ \alpha_{13} &= -16(4\lambda^2+1)(4\mu^2+1)\{(\lambda+\mu)^2+1\}. \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Bevezetve az $s=\lambda\mu$, $t=\lambda+\mu$ transzformációt, a IV. egyenlet a

$$t^4 - 8st^2 - 4t^2 + 8s - 1 = 0 \quad (5.2)$$

alakot ölti; a $T_{\lambda\mu}$ pont rendezői pedig az

$$x:y:z = (2st^2 + 3t^2 - 6s + 1):(t^3 - 8st - t):(-2t^2 - 2) \quad (5.3)$$

feltételnek tesznek eleget. Ha az (5.2) feltétel segítségével az s paramétert elimináljuk, a T -vonal paraméteres egyenletrendszerét nyerjük:

$$x:y:z = (1 - 4t^2 - t^4):(-8t):8(t^2 - 1). \quad (5.4)$$

Innen a T -vonal vonalkoordinátás egyenletrendszere:

$$u:v:w = 8:(2t^3 - 6t):(3t^2 + 1). \quad (5.5)$$

Összefoglaljuk az eredményeket: a T -vonal negyedrendű harmadosztályú racionális görbe.

6. Ha a Γ_λ^2 és Γ_μ^2 alapkúpszeletek a $T_{\lambda\mu}$ pontban érintkeznek és ott $t_{\lambda\mu}$ a közös érintőjük, akkor a $\Gamma_\lambda^2 + x\Gamma_\mu^2 = 0$ kúpszelet sor bármelyik kúpszelete átmegy a $T_{\lambda\mu}$ ponton és ott $t_{\lambda\mu}$ az érintője. A kúpszelet sor egyik eleme a $H_{\lambda\mu}^2$ hiperbola, aminek

$$H_{\lambda\mu}^2 \equiv \frac{-\Gamma_\lambda^2 + \Gamma_\mu^2}{\lambda - \mu} = 4xy + 4(t^2 - s)yz - 6txz - (t^3 - 2st)z^2 = 0$$

az egyenlete. Az (5.2) alapján az s paraméter kiküszöbölhető:

$$H_{\lambda\mu}^2 \equiv 32(t^2 - 1)xy + 4(7t^4 - 4t^2 + 1)yz - 48t(t^2 - 1)zx - 2t(3t^4 + 1)z^2 = 0. \quad (6.1)$$

A $t_{\lambda\mu}$ egyenes a $T_{\lambda\mu}$ pontnak $H_{\lambda\mu}^2$ -ra vonatkoztatott polárisa, egyenletét ezen az alapon nyerjük:

$$t_{\lambda\mu} \equiv 8t(t^2 - 1)x - 4(t^2 - 1)^2y + t(t^4 + 3)z = 0. \quad (6.2)$$

Ily módon eljutottunk az önérintési burkoló paraméteres egyenletrendszeréhez:

$$u:v:w = (8t^3 - 8t):(-4t^4 + 8t^2 - 4):(t^5 + 3t). \quad (6.3)$$

Innen a t burkoló pontegyenletrendszere:

$$x:y:z = (t^6 - 7t^4 + 3t^2 - 3):(4t^5 - 12t^3):(t^4 - 2t^2 + 1). \quad (6.4)$$

Összefoglaljuk az eredményeket: *a t-burkoló hatodrendű ötödosztályú racionális görbe.*

7. A $T_{\lambda\mu}$ pont rajta van a G^2 parabola $\lambda\mu$ húrján, a $t_{\lambda\mu}$ egyenes pedig átmegy a húr pólusán. Ugyanis a $\lambda\mu$ húr vonalkoordinátáinak aránya $u:v:w = 1:-(\lambda+\mu):\lambda\mu$. Vagy (5.2) révén a t paraméterre redukáljuk:

$$u:v:w = 8(t^2 - 1):-8t(t^2 - 1):(t^4 - 4t^2 - 1).$$

Ha pedig az (5.4) és (7.1) koordinátákat egybevetjük, látjuk, hogy $ux + vy + wz = 0$. Másrészt meg a $\lambda\mu$ pólusának koordinátái között az arány $x:y:z = 2\lambda\mu:(\lambda+\mu):2$, vagy áttérve a t paraméterre:

$$x:y:z = 2(t^4 - 4t^2 - 1):8t(t^2 - 1):16(t^2 - 1). \quad (7.2)$$

A (6.3) és (7.2) értékeire szintén teljesül az $ux + vy + wz = 0$ egyenlet.

8. Most pedig megmutatjuk a T -vonalnak egy más származtatási módját, amiből majd az is kiderül, hogy a *kardioiddal kollineár görbe.*

Adva van egy K^2 kúpszelet, rajta egy A pont és adva van egy d egyenes, amelyik K^2 -et I_1, I_2 képzetes pontpárban metszi. Mozogjon a K^2 görbén a P_1 és P_2 pont, egyező irányítással, oly módon, hogy az AP_2 egyenes az A_1 -ben vont érintőt állandóan a d egyenesen messe. A $P_1 P_2$ változó egyenes egy L görbét burkol, amelyik kollineár a kardioiddal. Ugyanis az I_1, I_2 pontpárt a sík képzetes körpontjaiba átvivő kollineáció a K^2 kúpszeletet \bar{K}^2 körbe, a d egyenest a végtelenbe viszi át. A P_1, P_2 pontoknak megfelelő \bar{P}_1, \bar{P}_2 pontok a \bar{K}^2 körön egyező irányítással futnak,

úgy, hogy \bar{P}_2 sebessége a \bar{P}_1 -ének kétszerese. Ez pedig a kardioidnak ismert származtatási módja.

A T -vonal az L görbe mintájára származtatható. K^2 vezérkúpszelet gyanánt válasszuk azon hiperbolát, amelyiknek a paraméteres pont- illetve vonal-egyenletrendszere a következő:

$$x:y:z = (2 - \tau^2) : 6\tau : (8\tau^2 - 4), \quad (8.1)$$

$$u:v:w = (8\tau^2 + 4) : -4\tau : (\tau^2 + 2). \quad (8.2)$$

A vezérpont gyanánt válasszuk ki a K^2 hiperbola $(-1, 0, 8)$ pontját, d vezéregyenes gyanánt pedig a C^2 parabola vezéregyenesét: a $(4, 0, 1)$ egyenest. Az így meghatározott L görbe éppen a T -vonal.

Ugyanis a t ponthan T érintője, (5.5) szerint, a

$$8x + (2t^3 - 6t)y + (3t^2 + 1)z = 0$$

egyenes. Ez a K^2 -et két pontban metszi, amelyeknek a paramétere, a (8.1) értékek helyettesítése útján a következő:

$$\tau_1 = \frac{1}{t}, \quad \tau_2 = \frac{1-t^2}{2t}. \quad (8.3)$$

A τ_1 pontban K^2 érintője az

$$u_1:v_1:w_1 = (4t^2 + 8) : (-4t) : (2t^2 - 1)$$

egyenes, τ_2 pontjára pedig

$$x_2:y_2:z_2 = (-t^4 + 10t^2 - 1) : (-12t^3 + 12t) : (8t^4 - 32t^2 + 8)$$

a koordináták aránya. Az (x_2, y_2, z_2) és $(-1, 0, 8)$ pontot összekötő egyenes koordinátáinak az aránya:

$$u^*:v^*:w^* = (8t^2 - 8) : 4t : (t^2 - 1).$$

Az (u_1, v_1, w_1) és (u^*, v^*, w^*) metszéspontjára:

$$x:y:z = (-t) : (t^2 - 1) : 4t,$$

tehát ez a pont a t változása közben a $(4, 0, 1)$ egyenesen fut, amit éppen bizonyítanunk kellett.

9. Az

$$x = \bar{x}, \quad y = 2\bar{y}, \quad z = -4\bar{x} + 2\bar{z} \quad (9.1)$$



egyenletrendszer centrális kollineációt képvisel az (x, y, z) és $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ társponatok között. A kollineáció tengelye az $(1, 0, 0)$ egyenes és középpontja az $(1, 0, 4)$ pont (a C^2 parabola csúcserintője, illetve fókusza). Ez a kollineáció a C^2 parabolát átviszi a

$$\bar{C}^2 \equiv 2\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - \bar{x}\bar{y} = 0$$

körbe, K^2 hiperbolát a

$$\bar{K}^2 \equiv 2\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - \bar{z}^2 - \bar{x}\bar{z} = 0$$

körbe, a sík végtelenben fekvő egyenesét a $(-2, 0, 1)$ egyenesbe, a Γ_λ^2 -et pedig a \bar{C}^2 körrel hiperoszkuláló $\bar{\Gamma}_\lambda^2$ kúpszeletbe.

A C^2 és K^2 koncentrikus, sugaruk viszonya $1:3$. A $(-2, 0, 1)$ egyenes $(1, 0, 2)$ pontban érinti a \bar{C}^2 kört. Γ_λ^2 két pontban metszi a végtelenben fekvő egyenest. E pontokhoz $(1, 0, 4)$ -ből derékszögű sugárpár vezet és ezek ugyanott metszik a $(-2, 0, 1)$ egyenest ahol a $\bar{\Gamma}_\lambda^2$.

A kollineáció a T -vonalat L kardioidba viszi át, amelynek $(1, 0, 2)$ pont csúcspontja, \bar{C}^2 kör főköre és \bar{K}^2 kör vezérköre.

Összefoglaljuk a legutóbbi eredményeket. Adott körhöz ∞^2 hiperoszkuláló kúpszelet tartozik. Ezek közül ∞^1 metszi a kör szilárd érintőjét olyan involúcióban, amelynek a társponatait a a kör középpontjából derékszög vetíti. Az így értelmezett 4 indexű racionális kúpszeletrendszernek az önérintési vonala kardioid.

Kárteszi Ferenc.

ÜBER DAS SYSTEM DER GLEICHSEITIGEN HYPERBELN, DIE EINE PARABEL HYPEROSKULIEREN.

In einer früheren Arbeit² habe ich das System jener Parabel untersucht, die eine gleichseitige Hyperbel hyperoskulieren. In vorliegender Arbeit stelle ich die Frage umgekehrt auf: es sei das im Titel gekennzeichnete Hyperbelsystem zu untersuchen.

Die Untersuchung führt zu folgenden Ergebnissen: Der Index des

Hyperbelsystems ist 4. Der Geometrische Ort der Hyperbelmittelpunkte ist ein Spiegelbild — in bezug auf ihre Leitlinie gebildet — der Parabel. Die *Selbstberührungslinie* des Hyperbelsystems, d. h. der Ort jener punkte, wo zwei Hyperbeln einander berühren, ist eine algebraische Kurve vierter Ordnung und dritter Klasse. Diese Selbstberührungslinie ist, wie das mit Hilfe einer anderen Erzeugung gezeigt wird, kollinear zur Kardioide. Die *Selbstberührungs-Hüllkurve*, d. h. die Kurve erzeugt durch die in den Selbstberührungspunkten berührenden Tangenten, ist eine algebraische Kurve sechster Ordnung und fünfter Klasse.

Ein kollineares Bild des betrachteten Hyperbelsystems ist folgendes: Das System jener Kegelschnitte, die einen Kreis berühren und eine seiner Tangenten in solchen Punkten schneiden, die aus dem Kreismittelpunkt durch senkrechte Geraden projiziert werden. Die Selbstberührungslinie dieses Systems ist eine Kardioide.

F. Kárteszi.

KITÜZÖTT FELADATOK.

Az itt közölt három feladat kitűzésével újból életre keltjük a kitűzött és megoldott feladatok rovatát, mely régebben, már az első kötettől kezdődően, fontos és hasznos szerepet töltött be lapunkban. A rovat vezetését DR. EGERVÁRY JENŐ egyetemi m. tanár volt szíves elvállalni. Kérjük t. munkatársainkat, hogy a kitűzött feladatok megoldásait, valamint a kitűzésre szánt feladatokat (megoldásukkal együtt), az ő címére (*Budapest, IV., Kecskeméti-utca 4.*) szíveskedjenek beküldeni. Örölnénk, ha e rovat felújításával szorosabbá sikerülne tenni azt a kapcsolatot, mely lapunkat olvasóihoz, különösen középiskoláink tanáraihoz fűzi.

1. Bebizonyítandó, hogy ha a

$$P(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

polinom együtthatói pozitív, fogyó, háromszorosan monoton sorozatot alkotnak (azaz $c_\nu - 3c_{\nu+1} + 3c_{\nu+2} - c_{\nu+3} \geq 0$, $\nu = 1, 2, \dots, n$; $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = 0$), akkor $P'_n(z)$ összes zérushelyei az egységkör belsejébe esnek.

(Egerváry)

2. Bebizonyítandó, hogy ha a $z_1, z_2, z_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ számok a

$$2(\zeta_i z_i + z_k z_l) = (\zeta_i + z_i)(\zeta_k + z_l) \quad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

egyenleteknek eleget tesznek és z_1, z_2, z_3 különbözők, akkor a

$$2(z_i \zeta_i + \zeta_k \zeta_l) = (z_i + \zeta_i)(\zeta_k + \zeta_l) \quad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

egyenletek is ki vannak elégítve.

(Egerváry)

3. Egy konvex oktaéder lapsúlypontjai parallelepipedont határoznak meg; továbbá az oktaéder átlóinak végpontjain átmenő és a másik két átlóval párhuzamos síkok szintén parallelepipedont alkotnak. Bebizonyítandó, hogy a nevezett két parallelepipedon hasonló, hasonló helyzetű és *belső hasonlósági pontjuk az oktaéder testsúlypontja.*

(Egerváry)

Kimutatás

az 1940. évi november hó 1-től 1941. évi február hó 28-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

- 1925-re : **Baintner Géza** (4), **Egerváry Jenő** (4), **Walek Károly** (4).
1926-ra : **Baintner Géza** (4), **Egerváry Jenő** (4), **Walek Károly** (2).
1927-re : **Riesz Frigyes** (2).
1928-ra : **Riesz Frigyes** (6).
1929-re : **Császár Elemér** (8), **Fröhlich Pál** (6).
1930-ra : **Császár Elemér** (8), **Fröhlich Pál** (6).
1932-re : **Császár Elemér** (8).
1933-ra : **Proszjt János** (6).
1934-re : **Proszjt János** (6), **Ujj Gyula** (6).
1935-re : **Kalmár László** (6), **Proszjt János** (6), **Szűcs Adolf** (8), **Tóth Lajos** (6), **Ujj Gyula** (4).
1936-ra : **Csízhegyi Lajos** (6), **Kalmár László** (6), **Proszjt János** (6), **Suták József** (8), **Szűcs Adolf** (8), **Tóth Lajos** (6), **Veress Pál** (8).
1937-re : **Alexits György** (3), **Csízhegyi Lajos** (6), **Görbe Imre** (6), **Körös László** (6), **Lajta Ernő** (2), **Proszjt János** (6), **Veress Pál** (7).
1938-ra : **Csízhegyi Lajos** (6), **Czukur Károly** (8), **Ferenczy Zoltán** (6), **Görbe Imre** (6), **Kónya Albert** (6), **Körös László** (6), **Patai Imre** (8), **Proszjt János** (6), **Radó Simon** (8), **Vincze István** (3).
1939-re : **Albert Anna** (8), **Beke Manó** (8), **Boharszik Pál** (6), **Bolla Györgyné** (8), **Breuer József** (4), **Csada Imre** (8), **Csízhegyi Lajos** (6), **Czukur Károly** (8), **Darvas Jenő** (6), **Egyed László** (4), **Fejes Zsigmond** (5), **Fekete Jenő** (8), **Görbe Imre** (6), **Hoor-Tempis Móric** (2), **Jakab Györgyné** (8), **Kónya Albert** (6), **Körös László** (6), **Kronberger Ede** (2), **Luckhaub Gyula** (8), **Marczell György** (8), **Neumann Erzsébet** (8), **Patai Imre** (8), **Patai László** (6), **Radó Simon** (8), **Rédei László** (8), **Róna Zsigmond** (8), **Schay Géza** (8), **Scholtz Pál** (8), **Seres Iván** (8), **Steiner Lajos** (2), **Szeliánszky Ferenc** (6), **Tardos Vida** (6), **Theisz Edéné** (6), **Tolnai Jenő** (8), **Tóth Géza** (5), **Vincze István** (8), **Zigány Ferenc** (5).
1940-re : **Bacsó Vilmos** (6), **Barta József** (8), **Boharszik Pál** (6), **Breuer József** (8), **Bukovszky Ferenc** (6), **Csada Imre** (2), **Dér Zoltán** (6), **Egyed László** (8), **Fejes Zsigmond** (6), **Fekete Jenő** (8), **Görbe**

Imre (6), Hajós Géza (6), Heuer Ede (8), Hoor-Tempis Móric (8), Jendrassik György (8), Luckhaub Gyula (8), Marczell György (8), Neumann Erzsébet (8), Patai Imre (8), Radó Simon (8), Róna Erzsébet (8), Róna Zsigmond (8), Schay Géza (8), Scholtz Pál (8), Sebők Emánuel (6), Steiner Lajos (6), Székely Károly (6), Szeleánszky Ferenc (6), Tardos Vida (6), Tobisch János (6), Tolnai Jenő (8), Vincze István (5), Volenszky Gyula (4).

1941-re: Bori István (6), Dér Zoltán (6), Dózsa Márton (8), Erdős Pál (8), Faragó Andor (8), Fekete Jenő (8), Fraunhofer Lajos (8), Goldziher Károly (8), Gombás Pál (6), Heuer Ede (8), Hoffmann Ernő (8), Ispánovits Alajos (6), Jelítai József (8), Kövessi Ferenc (8), Kuzaila Péter (6), Luckhaub Gyula (6), Ortway Rudolf (8), Péter Gyula (8), Pogány Béla (8), Rados Gusztáv (8), Romsauer Lajos (8), Rucsinszki Lajos (8), Szabó Miklósné (8), Szeleánszky Ferenc (6), Szőke Béla (8).

2. Előfizetés.

1938-ra: Ferenc József Tanítók Háza (8).

1939-re: Ferenc József Tanítók Háza (8), Meteorológiai Intézet (6).

1940-re: Békéscsabai ev. gimn. (6), Budapesti ref. gimn. (8), Ferenc József Tanítók Háza (8), Grill (8), Kilián (6), Meteor. Int. (8), Vas-u. keresk. önképzőkörének Maróthi-osztálya (8).

1941-re: Grill (8), Kisújszállási ref. gimn. (6), Klökner (6), Lévai áll. líceum (6), Miskolci ref. gimn. (2), Pannonhalmi kvtár (6), Soproni egyet. kvtár (6).

1942-re: Miskolci ref. gimn. (4).

3. Adomány.

M. Pamutipar (500), Rimamurány—Salgótarjáni Vasmű (1000), Péti Nitrogénművek (500), M. Acélárúgyár (200), M. Brown Boveri Művek (100), Danuvia Fegyvergyár (300), Áll. vasgyár (500), Láng L. gépgyár (200), Gamma (100), Salgótarjáni Kőszénbánya (500), Weiss Manfréd acélművei (200), R. T. vill. és közl. váll. számára (200), Széchenyi Tudományos Társaság (2000), Nagy L. József (20), Egyesült Izzó (500), M. T. Akadémia 1941. I. (500), Takarékpénztárak és Bankok Egyesülete (1000).

Budapest, 1941. márc. 5.

Jelítai József,
pénztáros.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendőek és pedig a matematikai tárgyúak *König Dénes (XI., Horthy Miklós-út 28., Lénárt-pensio)*, a fizikai tárgyúak pedig *Ortvay Rudolf (VIII., Múzeum-körút 4/c, Egyetemi elméleti fizikai intézet)* címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrekturára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Ortvay Rudolf* titkár címére küldendőek.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámlijára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, cím-változások *Jelítai József* pénztáros címére (II., Bimbó-út 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

40 éve gyárt
tudományos műszereket,
korszerű tanszereket,
optikai eszközöket,
elektromos mérőműszereket,
repülőgépműszereket,
laboratóriumi bútorzatot,
vetítőgépeket

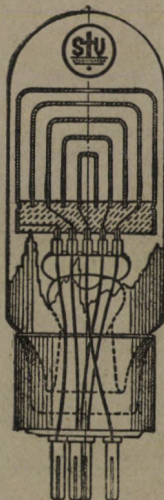
MARX ÉS MÉREI

Budapest, VI., Bulcsu-utca 7. szám

Eladási osztály:

Budapest, VI., Váci-út 18. szám

A „STABILISATOR“



az egyenirányítót vagy bármilyen más áramforrást
akkumulátorral egyenértékű, állandó feszültségű, kis
belsőellenállású áramforrássá alakítja át.

A «stabilizált» feszültség csak kb. $\pm 0,1\%$ -ot
változik $\pm 10\%$ tápláló feszültség ingadozásánál: kb.
1—2%-ot változik üresjárás és teljes terhelés között;
0,01%-ra függenek csak egymástól a részfeszültségek.

Tehetetlenség nélkül szabályoz. Önfogyasztás: né-
hány mA. A Stabilisator kicsi, könnyű, üzembiztos,
olcsó. Új típusok!

Elméleti és gyakorlati műszaki leírást kívánatra
díjtalanul küld a

STABILOVOLT GmbH

Berlin SW 68 Wilhelmstrasse 130

magyarországi képviselője

Dr. GOLDBERGER MIHÁLY

Budapest, VII., Bajza-uca 4. — Telefon: 1-425-09.

50255

XL

23

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖNIG DÉNÈS ÉS ORTVAY RUDOLF

XLVIII. KÖTET

JUBILÁRIS KÖTET
A TÁRSULAT ÖTVENÉVES FENNÁLLÁSA
ALKALMÁBÓL

2. RÉSZ

BUDAPEST, 1941

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT



TARTALOMJEGYZÉK.

	Oldal
SZŐKEFALVI NAGY GYULA: Végesrendű geometria	207
SZÁSZ PÁL: Az elliptikus, az euklidesi és a hiperbolikus geometria szétválasztása	243
GRÜNWARD GÉZA: A Hermite-féle interpolációról	272
SÓLYI ANTAL: A Haar-féle variációs lemma és alkalmazásai.....	285
NOVOBÁTZKY KÁROLY: Többtestprobléma a kvantumelméletben....	312
KOVÁCS ISTVÁN: A kétatomos molekulák elméletének alapjai.....	334
KOZMA BÉLA: Az Al^+ -és Al^{2+} -ion energiájának meghatározása az alapállapotban	351
Kitűzött feladatok és helyreigazítás az 1. feladathoz	369
Irodalom	370
Társulati élet	377
Pénztárosi kimutatás a befolyt összegekről.....	385

Tagjainkhoz.

Társulatunkhoz befolyt jubiláris adományok, melyekről megelőző füzetünkben, valamint a jelen füzetben közölt közgyűlési titkári jelentésben számolunk be, lehetővé teszik, hogy lapunk jelen kötetét és valószínűleg néhány további kötetet jelentékenyen megnövesztett terjedelemben küldhessünk szét tagjainknak.

Ebből az alkalomból t. tagjaink segítségét is kérjük, fel-szólítva őket, hogy

új tagokat szerezzenek Társulatunknak.

A tagokul ajánlottak nevét, foglalkozását és lakáscímét kérjük az ügyvezető titkárral (Ortvay Rudolf, Budapest, VIII. Múzeum-körút 4/c, Egyetemi elméleti fizikai intézet) közölni.

VÉGESRENDŰ GEOMETRIA.

1. Bevezetés. — Értelmezések.

Számos matematikus foglalkozott az algebrai görbéknek és felületeknek a projektív térben való alakjával és valós *kivételességeinek* (szingularitásainak) számai között fennálló összefüggésekkel. A fejlődés természetes menete volt annak a vizsgálata, hogy az algebrai görbéknek, illetőleg felületeknek milyen tulajdonságai függetlenek algebrai előállításuktól, úgyhogy egyszersmind olyan nem algebrai görbéknek, illetőleg felületeknek is tulajdonságai, amelyeknek viselkedése csak bizonyos tekintetben hasonló az algebrai görbéknek, illetőleg felületeknek viselkedéséhez.

Egy valós algebrai síkgörbének minden pontjában az érintésponttal folytonosan változó érintője van, a sík bármely egyenesével pedig végeesszámú valós közös pontja van. (Ez a szám a síkgörbének vagy az algebrai rendszámával egyenlő vagy ennél páros számmal kisebb.) Az algebrai síkgörbének olyan zárt síkgörbék az általánosításai, amelyeknek megvan ez a két tulajdonságuk.

Az algebrai térgörbék általánosításai olyan zárt térgörbék, amelyeknek minden pontjukban a ponttal folytonosan változó símlósíkjuk van és amelyeknek a tér bármely síkjával végeesszámú közös pontjuk van.

Az algebrai felületeknek általánosításai olyan zárt felületek, amelyeknek minden pontjában a ponttal folytonosan változó érintősíkjuk van és amelyeknek és érintőkúpjaiknak síkmetszetei az előbb mondott tulajdonságokkal bíró zárt síkgörbék.

Az ilyen görbék és felületek tulajdonságainak összességét «geometria finita»-nak (géométrie finie) vagy Juel-féle geometriá-

nak nevezik. C. JUEL dán matematikus végezte ugyanis ebben az irányban az alapvető jelentős vizsgálatokat. Célszerű ezt a geometriát végesrendű geometriának nevezni.

Egy síkgörbe (lineáris) *rendszáma*, illetőleg (lineáris) *indexe* azoknak a (valós) pontoknak maximális, illetőleg minimális száma, amelyekben a görbét síkjának egyenesei találják. (A metszéspontokat megfelelő sokszorossággal kell számítani.) Egy síkgörbe *osztályszáma*, illetőleg *osztályindexe* azoknak a (megfelelő sokszorossággal számított) valós érintőknek maximális, illetőleg minimális száma, amelyek a síkgörbe síkjának pontjaiból a görbéhez húzhatók.

A másodrendű síkgörbéknek bármely ívét konvex ívnek nevezük. A Juel-féle geometria olyan síkgörbékkel foglalkozik, amelyek véges számú konvex ívből összeállíthatók. A görbén két szomszédos konvex ívnek közös végpontja vagy közönséges pont, vagyis a síkgörbén egy konvex ívnek belső pontja, vagy pedig kivételes pont. A kivételes pont lehet *áthajlós pont* (inflexiós pont), vagy pedig *csúcspont*. A csúcspont lehet közönséges vagy elsőfajú és lehet csőralakú vagy másodfajú. Ezekhez a kivételességekhez hozzászámítjuk még a kettőspontokat (és a többszörös pontokat), továbbá a kettősérintőket (és a többszörös érintőket).

A térgörbe rendszáma, illetőleg indexe a görbe és egy sík közös pontjai számának maximuma, illetőleg minimuma. A térgörbén a síkgörbe áthajlós pontjának megfelelő kivételes pont a *stacionárius pont*. Egy ilyen P pontban a símulósíknak a görbével legalább négy szomszédos közös pontja esik egybe. Ez azt jelenti, hogy P símulósíkja közelében van olyan sík, amely a görbét P közelében legalább négy szomszédos pontban metszi.

A felület rendszáma azoknak a valós pontoknak maximális száma, amelyekben a felületet egy olyan egyenes találja, amely nem esik teljesen a felületre. Ezeknek a pontoknak minimális száma a felület indexe.

Ennek a cikknek az a célja, hogy a végesrendű geometria nevezetesebb eredményeiről vázlatos képet nyújtson. A szövegben a zárójelben levő számok ennek a cikknek végén levő irodalmi összeállításban az ugyanazon számok alatt felsorolt szer-

zókra és dolgozataikra vonatkoznak. Az adott irodalmi összeállítás nem akar igényt tartani a teljességre. Aránylag elég részletesen fel van sorolva az irodalom MONTEL (16a), LINSMAN (12a) és HAUPT (7a) munkáiban.

2. Másodrendű és harmadrendű síkgörbék.

A lineáris rendszámot tekintve (az egyeneseken mint elsőrendű vonalakon kívül) a legegyszerűbb görbék a másodrendűek. Az ilyen görbék konvex görbék és egyszersmind másodosztályúak. A másodrendű görbéknek nincsenek kivételelességeik, vagyis nincs kettőspontjuk, csúcspontjuk, kettősérintőjük, sem áthajlós érintőjük.

Ennek a tételnek megfordításaként MÖBIUS (17) kimutatta, hogy az olyan síkgörbe, amelynek semmiféle kivételelessége sincs, szükségképpen másodrendű (és másodosztályú). KNESER A. (11) azt is kimutatta, hogy az olyan síkgörbe is mindig másodrendű, amelynek legfeljebb kettőspont- vagy legfeljebb kettősérintőkivételelességei vannak.

Bármely másodrendű görbe a síknak egy véges tartományában fekvő oválisába vetíthető.

Két olyan másodrendű görbének, amelynek nincs közös pontja, vagy négy közös érintője van, vagy egy sincs. Ha két másodrendű görbének k (páros) számú közös pontja van, akkor ugyanennyi a közös érintőinek száma is. Könnyen be lehet látni, hogy k akár milyen páros pozitív egész szám lehet (9c), (26g).

MÖBIUS (17) kimutatta, hogy az olyan harmadrendű síkgörbének, amelyen nincs kettőspont, sem csúcspont, pontosan három áthajlós pontja van, miként az ilyen tulajdonságú harmadrendű algebrai görbéknek. A nem algebrai harmadrendű síkgörbéknek három áthajlós pontja — az algebrai harmadrendű síkgörbékétől eltérőleg — általánosságban nem fekszik egy egyenesen (17), (9c).

Ha egy harmadrendű görbének van kettőspontja vagy csúcspontja, akkor azokból együttvéve is csak egy lehet. A kettősponttal vagy csúcsponttal bíró harmadrendű görbének pontosan egy áthajlós pontja van.

Az általános (kettős- és csúspontnélküli) harmadrendű görbét három áthajlós pontja három konvex ívre bontja. (9c)

A harmadrendű algebrai görbék vagy egy, vagy két különálló zárt görbéből, *menetből* állanak. A nem algebrai harmadrendű görbéknek is vagy egy menetjük van, vagy kettő. Ha két menetjük van, akkor közülök az egyik harmad-, a másik pedig másodrendű, s a görbének nincs kettőspontja, sem csúspontja.

Az általános egymenetű harmadrendű görbének vagy hat, vagy négy az osztályszáma. Az első esetben a három áthajlós érintővel meghatározott háromszög belső pontjaiból hat, a második esetben pedig egy érintő sem húzható a görbéhez. Ebben a második esetben a háromszög belsejében fekvő bármely másodrendű görbe a harmadrendű görbével együtt is csak harmadrendű görbét alkot.

A kettősponttal bíró harmadrendű görbék osztályszáma négy, a csúsponttal bíróké pedig három. Mindkét fajta görbe csak egy menetből áll.

Az általános harmadrendű síkgörbéknek nincs más kivételességük, mint áthajlós pont. Hasonlókép csak csúspontkivételességei vannak az általános harmadosztályú görbéknek.

Kimutatható, hogy az olyan síkgörbe, amelynek van csúspontja, de másfajta kivételességei nincsenek, három csúsponttal bíró harmadosztályú görbe. Az olyan síkgörbe pedig, amelynek áthajlós pontokon kívül másfajta kivételességei nincsenek, áthajlós pontja pedig van, szükségképpen harmadrendű görbe (26i), (10a, b).

3. Negyedrendű síkgörbék.

Amíg a harmadrendű görbéknek csak olyan fajtái vannak, amelyek harmadrendű algebrai görbék között is előfordulnak, addig a negyedrendű görbék között olyanok is vannak, amelyeknek megfelelő tulajdonságú negyedrendű algebrai görbe nincs.

A szét nem eső negyedrendű algebrai görbéknek legfeljebb három kettőspontjuk lehet, meneteik száma pedig legfeljebb négy. A negyedrendű nem algebrai görbéknek akárhány kettőspontja és akárhány menete lehet. Ezt a következőkép láthatjuk be:

Ha egy kör területét $2n$ egyenlő részre osztjuk, akkor a páros és a páratlan szögpontok két olyan n -oldalú szabályos konvex sokszöget határoznak meg, amelyek egymást $2n$ számú pontban metszik. Ezt a két sokszöget lehet hozzájuk elég közel fekvő olyan két oválissal helyettesíteni, amelyek egymást szintén $2n$ pontban metszik.

Ez a két ovális együttvéve két másodrendű görbére széteső negyedrendű görbét alkot, mivel a görbe rendszáma a két ovális rendszámának összegével egyenlő. Ennek a realitás szempontjából «reducibilis» negyedrendű görbének $2n$ kettőspontja van.

Ha A jelöli ennek a negyedrendű görbének egy kettőspontját, akkor ebben a kettőspontban a mindkét oválison belül fekvő tartománynak a mindkét oválison kívülvel való összekötésével és a kettőspont megszüntetése után a helyette keletkező két szögpontnak alkalmas lekerekítésével egy menetből álló és $2n-1$ kettősponttal bíró negyedrendű görbét kapunk.

Ha az előbb kapott negyedrendű görbének további $k-1$ ($k \leq 2n$) kettőspontját az előbb vázolt módon megszüntetjük, akkor k menetből álló és $2n-k$ kettőspontot tartalmazó negyedrendű görbéhez jutunk.

A $2n$ kettősponttal bíró és két oválisból álló (reducibilis) negyedrendű görbe kettőspontjait másképp is meg lehet úgy szüntetni, hogy az azután kapott görbe szintén negyedrendű maradjon. Az A kettőspontban ilyenkor olyan két tartományt kell egymással összekötnünk, amelyek közül akármelyik az egyik oválison belül és a másikon kívül van (9c), (26g).

Az egymenetű negyedrendű görbéknek osztályozását JUEL adta meg (9c, e, j). Ő az ilyen görbéket négy különböző csoportba osztotta.

Az I. csoportba tartoznak azok a negyedrendű görbék, amelyeknek nincs kettőspontjuk, sem csúspontjuk. Az ilyen görbék középpontos vetítéssel mindig átvihetők olyan görbékbe, amelyeknek a sík végtelen távoli egyenesével nincs közös pontjuk. Az így kapott görbén belül mindig el lehet egy oválist úgy helyezni, hogy a két görbe együttesen is csak negyedrendű legyen. Az I. csoportba

tartozó negyedrendű görbéknek mindig vannak kettősérintőik. Ezeknek száma akármilyen nagy k szám lehet. Ha a kettősérintők száma k , akkor a görbének $2k$ áthajlás pontja van úgy, hogy bármely kettősérintőhöz egy jól meghatározott áthajlás pontpár rendelhető.

A II. csoportba azokat a negyedrendű görbéket sorolja JUEL, amelyeknek van olyan A kettőspontjuk, amelyek az illető görbét két páratlan (mégpedig harmadrendű) álmenetre, pseudo-menetre bontják. Egy ilyen negyedrendű görbének az egyik álmenete a görbének az a zárt része, amelyet azalatt írunk le, amíg A -ból a görbén kiindulva és rajta tovább haladva A -hoz először jutunk vissza. A másik álmenet a görbének megmaradó másik zárt része. Az álmenet abban különbözik a menettől, hogy A -ban az érintője nem folytonos. A két álmenetnek A szögpontját le lehet úgy kerekíteni, vagyis a két álmenetet az A szögpontot tartalmazó kicsiny ívnek deformációjával át lehet úgy alakítani, hogy a kapott két harmadrendű menet szintén negyedrendű görbét alkosson. A II. csoportba tartozó görbéknek nincs kettősérintőjük, indexük pedig kettővel egyenlő, mivel bármely egyenesnek a két harmadrendű álmenettel legalább egy-egy közös pontja van. Minthogy egy negyedrendű görbének indexe legfeljebb kettővel egyenlő, azért a II. csoportba tartozó negyedrendű görbék indexe a lehető legnagyobb, az ilyen görbék tehát maximális indexűek.

A II. csoportba tartozó negyedrendű görbék kétfélék: vagy két kettőspontjuk és négy áthajlás pontjuk van, vagy pedig három kettőspontjuk van és két áthajlás pontjuk.

A III. és a IV. csoportba tartozó negyedrendű görbéket az jellemzi, hogy bármely kettőspontjuk a görbét két páros (rendű) álmenetre bontja. A III. csoport negyedrendű görbeit az különbözteti meg a IV. csoportba tartozóktól, hogy a III. csoportba tartozó bármely negyedrendű görbéhez egy kettőspontjából sem húzható olyan érintő, amely a görbét a kettősponton kívül érintené. A IV. csoportba tartozó bármely negyedrendű görbe akármelyik kettőspontjából ellenben húzható a görbét a kettősponton kívül érintő egyenes. Ki lehet mutatni, hogy az egyik fajta kettőspont fellépése

kizárja a másik fajtának létezését, föltéve, hogy a görbe nem tartozik a II. csoportba.

Egy negyedrendű síkgörbének legfeljebb három csúcspontja lehet. Kettőspontjainak, kettősérintőinek és áthajlós érintőinek száma akármekkora lehet. Ha az egymenetű negyedrendű görbének van kettősérintője, de nincs csúcspontja, akkor kettőspontjainak száma a kettősérintők számánál az áthajlós érintők számának felével kisebb.

Ha egy többmenetű negyedrendű görbének egyik menete páratlan, akkor egy másik menete is az, s mind a kettő harmadrendű. Ehhez a két menethez még legfeljebb egy menet járulhat. Ez a harmadik menet másodrendű.

Az olyan negyedrendű görbének, amelynek van két páratlan menete, egy kettőspontja van. Ebben metszi egymást a két páratlan menet. A görbének nincs kettősérintője.

Ha egy többmenetű negyedrendű síkgörbének nincs páratlan menete, akkor bármely két páros menetnek metszéspontjaira és kettősérintőire ugyanaz a tétel áll, mint két másodrendű görbére.

Ha tehát egy negyedrendű síkgörbe két páros menetének nincs közös pontja, akkor vagy négy közös érintőjük van, vagy egy sincs. Ha $k (>0)$ közös pontja van a két páros menetnek, akkor a közös érintők száma is k -val egyenlő. Ha két páros menetnek nincs közös érintője, akkor közös pontjaik száma 4 vagy 0. Ha k közös érintőjük van ($k > 0$), akkor ugyanennyi közös pontjuk is van.

Meg kell jegyeznünk, hogy a két páros menet közül az egyik vagy mindkettő negyedrendű is lehet.

4. Juel megfeleléstétele.

Egy síkgörbe rendszáma és áthajlós pontjainak száma egyszerre páros vagy páratlan. Egy síkgörbe osztályszáma és csúcspontjainak száma szintén egyszerre páros vagy páratlan (9c).

Már STAUDT kimutatta, hogy két síkgörbe metszéspontjainak száma páros, ha közülök legalább az egyik páros (rendszámú).

Két páratlan (rendű) síkgörbe metszéspontjainak száma mindig páratlan. Természetesen fel kell tételeznünk azt, hogy a metszéspontok száma véges.

A végesrendű geometriában nagy szerepet játszik JUEL következő tétele (9c), (16a, b):

Ha egy egymenetű zárt görbe pontjai között egy olyan (p, q) vonatkozás (korrespondencia) áll fenn, amelyben a görbe bármely P pontjának a szerint, amint azt X , illetőleg Y pontnak tekintjük, q számú Y , illetőleg p számú X pont felel meg, és ha azalatt, amíg az X pont bizonyos értelemben leírja a görbét, az Y pontok ellenkező értelemben folytonosan mozognak a görbén, akkor $p+q$ olyan pont van a görbén, amelyben egy X pont egy neki megfelelő Y ponttal összeesik.

Ennek a tételnek egy egyszerű alkalmazása a következő:

Ha egy n -edrendű síkgörbének az O pont $(n-2)$ -szeres pontja, akkor az O ponton vagy két olyan egyenes megy át, amely a görbét O -n kívül két összeeső szomszédos pontban találja vagy egy sem. (Az ilyen két szomszédos pont lehet érintéspont vagy csúcspont).

Ha ugyanis X és Y jelöli a görbének olyan két pontját, amely O -val egy egyenesen van, akkor X és Y között egy $(1,1)$ megfelelés van. Ebben a vonatkozásban vagy $1+1=2$ összeesés van, vagy egy sincs a szerint, a mint X és Y ellenkező, illetőleg megegyező értelemben mozog a görbén. Ha a görbének egy akármilyen kis ívén X úgy mozog, hogy mozgása alatt Y vele ellenkező, illetőleg megegyező értelemben mozog, akkor X és Y egymáshoz viszonyított mozgása mindvégig ugyanaz marad, bárhol mozogjon is X a görbén (9c).

JUEL megfeleléstételéből hozható le a következő tétel is (26i):

Ha a zérusindexű G_n síkgörbének nincs áthajlós érintője és nincs közös pontja sem a G_m síkgörbével, sem pedig annak egy áthajlós érintőjével sem, és ha végül a G_n , illetőleg G_m görbének egy pontjából m , illetőleg n érintő húzható a másikhoz, akkor a két görbének $m.n$ közös érintője van.

5. Olyan zérusindexű síkgörbékről, amelyeknek nincsenek érintőkivételelességeik, vagyis nincsenek áthajlás érintőik és nincsenek kettős és többszörös érintőik.

A négynél magasabbrendű, nem algebrai síkgörbék közül az irodalomban először azok alkották a kutatás tárgyát, amelyeknek nincsenek áthajlás érintőik, s azonkívül zérusindexűek (4), (26j).

Az ilyen görbék mindig olyan görbékbe vetíthetők, amelyeknek a sík végtelen távoli egyenesével nincs közös pontjuk. Egy olyan síkgörbének, amelynek nincs érintőkivételelessége és a végtelen távoli egyenessel nincs közös pontja, a sík bármely egyenesével vagy csak egy, vagy pedig pontosan két párhuzamos érintője van (26j).

Ennek megfelelően a mondott tulajdonságú görbéknek kétféle fajtája van. Az elsőfajta görbének páratlan, a második fajtának páros számú csúcspontja van.

Ha c jelöli a páratlan számú csúcsponttal bíró elsőfajta B_c görbe csúcspontjainak számát, akkor ez a c csúcspont a görbét c konvex ívre bontja. A B_c görbe n rendszáma, m osztályszáma és a c szám között az

$$m \leq n - 1 \leq c$$

egyenlőtlenség áll fenn (26j).

A B_c görbe kettőspontjainak d számára pedig fennáll a

$$\frac{c-3}{2} \leq d \leq \frac{c(c-3)}{2}$$

egyenlőtlenség. Bármely k $\left(\leq \frac{(c-1)(c-2)}{2} \right)$ nem negatív egész számhoz van olyan B_c görbe, amelynek $d = \frac{c-3}{2} + 2k$ kettőspontja van. (4), (26j)

Bármely páratlan c számhoz ($c \geq 3$) van c -edosztályú és $(c+1)$ -edrendű B_c görbe.

Ha K_c jelöl egy páros c számú csúcsponttal bíró és zérusindexű olyan síkgörbét, amelynek nincsenek érintőkivételelességei, akkor erre a K_c görbére a következőket állíthatjuk (26j):

A K_c görbét csúcspontjai c számú ívre bontják, s ezek közül legalább $c-1$ konvex ív. Az utolsó ív vagy szintén konvex, vagy pedig harmadrendű ív. Ennek a harmadrendű ívnek lehet egy kettőspontja, de más kivételessége nem. A K_c görbe m osztályszáma, n rendszáma és kettőspontjainak d száma között az

$$m \leq n \leq c+2 \quad \text{és} \quad a \quad \frac{c}{2} - 2 \leq d = \frac{c}{2} - 2 + 2k \leq \frac{c(c-1)}{2}$$

egyenlőtlenség áll fenn, ahol k nem negatív egész számot jelent.

Bármely c nem negatív páros egész számhoz van olyan K_c görbe, amelynek $\frac{c}{2}$ kettőspontja van és van olyan is, amely a $c \geq 2$ esetben negyedosztályú. Bármely páros c számhoz van $(c+2)$ -osztályú és ugyanilyen rendű K_c görbe.

Ha a végesben fekvő B_c vagy K_c görbének azokat az íveit, amelyek a sík végtelen távoli pontjaiból a görbe átlépése nélkül elérhetők, határiveknek és ezeknek azt a (konkáv vagy konvex) oldalát, amely a sík végtelen távoli pontjaiból elérhető, külső oldalnak nevezzük, akkor B_c görbe valamennyi határiveinek külső oldala konkáv. Egy K_c görbe határiveinek külső oldala általában részben konkáv, részben konvex. Az oválisokon kívül nincs más olyan K_c görbe, amelyen valamennyi határiveinek konvex volna a külső oldala. Vannak olyan K_c görbék, amelyeken a határivek külső oldala mind konkáv (26j).

6. Maximális indexű síkgörbék, maximális osztályindexű síkgörbék.

A magasabbrendű nem algebrai görbék közül a legbehatóbb vizsgálat tárgyát a maximális indexű görbék alkották. A maximális indexű n -edrendű síkgörbéknek $n-2$ az indexe (24), (26a, b).

A maximális indexű síkgörbéknek legfeljebb egy csúcspontjuk van. Ha egy ilyen görbének van csúcspontja, akkor azon nem megy át más érintő, mint a csúcspont érintője. A maximális indexű görbének két különböző pontban érintő kettőserintője nincs, a görbe önmagát azonban érintheti. Ha az érintéspont végesben fekszik,

akkor érintőjének ellenkező oldalára esik a görbének elég kicsiny két érintett íve.

Abból, hogy maximális indexű síkgörbének csak közönséges kivételelességei vannak, következik, hogy a maximális indexű folytonos érintőkkel bíró síkgörbékre nem kell feltételezni azt, hogy véges számú konvexívre bonthatók fel, mert ez a mostani feltételekből következik (7b).

A maximális indexű síkgörbék helyett sok tekintetben előnyösebb ezek duálisait, a maximális osztályindexű síkgörbét vizsgálni. Ezek a görbék önmagukat nem metszhetik (26b).

Ha a síknak azok a pontjai, amelyekből egy n -edosztályú maximális osztályindexű síkgörbéhez $n-2$ érintő húzható, a projektív síkon összefüggő tartományt alkotnak, akkor a görbe *irreducibilis*, vagyis menetei nem bonthatók fel olyan csoportokra, hogy az egyes csoportok meneteiből alkotott görbék osztályszámainak összege a görbe osztályszámával legyen egyenlő. Egyemenetű görbe tehát mindig irreducibilis.

Ha ellenben a síkon azok a pontok, amelyekből egy maximális osztályindexű görbéhez osztályindexével egyenlő számú érintő húzható, k számú önmagában összefüggő, de egymással össze nem függő síktartományt alkotnak, akkor a görbe *reducibilis* és éppen k irreducibilis görbére esik szét. Az egyes tartományok határához tartozó menetek alkotják az egyes irreducibilis görbéket és ezek osztályszámainak összege a görbe osztályszámával egyenlő (26b).

Bármely maximális osztályindexű síkgörbének valamennyi menete szintén maximális osztályindexű görbe.

Annak a tartománynak összefüggési száma, amelynek pontjából a maximális osztályindexű irreducibilis G síkgörbéhez osztályindexével egyenlő számú érintő húzható, módot ad a G görbe *fajszámának* értelmezésére. Ha ez a tartomány $(p+1)$ -szeresen összefüggő, akkor p -t a G görbe fajszámának nevezzük. A maximális osztályindexű síkgörbe önmagát nem metszi. Egyemenetű maximális osztályindexű görbére tehát az előbb jellemzett tartomány vagy egyszeresen, vagy kétszeresen összefüggő. Ebből következik,

hogy egy menetű maximális osztályindexű görbének vagy zérus, vagy az egység a fajsza (26b, c).

Ha az irreducibilis és maximális indexű G síkgörbének h menete van, akkor vagy $h-1$, vagy h a fajsza.

Ha a maximális osztályindexű G síkgörbe k irreducibilis görbére esik szét és ezeknek a fajsza p_1, p_2, \dots, p_k , akkor a G görbének

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1$$

a fajsza. (Ekkor azoknak a tartományoknak összefüggési száma, amelyeknek pontjaiból a G görbéhez osztályindexével egyenlő számú érintő húzható,

$$p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_k + 1.)$$

A maximális osztályindexű síkgörbe irreducibilitásának és reducibilitásának előbb mondott topológiai tulajdonságán kívül van egy aritmetikai jellemző tulajdonsága is. A G maximális osztályindexű síkgörbe akkor irreducibilis, ha osztálysza 2-vel nagyobb, mint menetei osztályindexének összege. Ha G osztálysza $2k$ -val nagyobb, mint menetei osztályindexeinek összege, akkor a görbe k irreducibilis görbére esik szét (26b).

A fajsza segítségével a maximális osztályindexű síkgörbe kivételességeinek száma egyszerűen kifejezhető. Ha n jelöli a görbe osztályszaát, m a rendszámaát, c a csúspontok, d a kettőséríntők és a az áthajlás pontok számaát ($a=0$ vagy 1), akkor (26c)

$$c = n - 2 + 2p \text{ és } d + a = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.$$

A görbe m rendszámaára fennáll az

$$m \leq n(n-1) - 2d - 3a = 2n - 2 + 2p - a = n + c - a = M$$

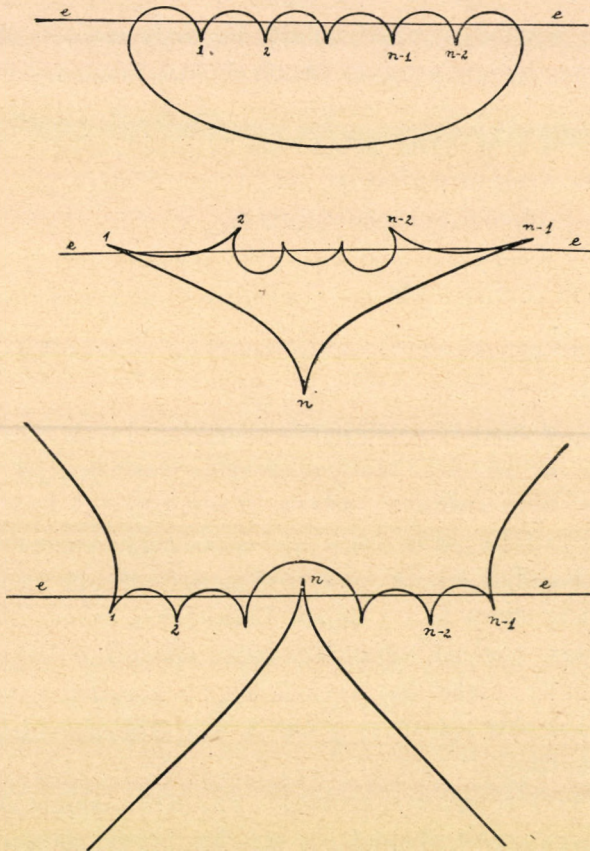
egyenlőtlenség. Ez az egyenlőtlenség pontos, mivel van olyan n -edosztályú d kettősponttal, a áthajlás ponttal és p fajszaával bíró maximális osztályindexű síkgörbe, amelynek rendszáma éppen M (26d).

Az alábbi három ábra egy-egy hetedosztályú maximális osztályindexű síkgörbét állít elő.

Az első görbe nulladfajú és 12-edrendű, a második illetőleg

harmadik görbe pedig elsőfajú és 12-edrendű illetőleg 14-edrendű. A síkban ugyanis nincs olyan egyenes, amely az illető görbét több pontban találná, mint az ábrán az e egyenes.

Ilyen görbékbl többmenetű maximális osztályindexű síkgörbék is előállíthatók. Ha pl. a síknak abban a tartományában, amely-



nek pontjaiból a harmadik görbe íveinek konvex oldala érhető el, az első görbével hasonló tulajdonságú görbét veszünk fel, akkor kétmenetű maximális osztályindexű reducibilis görbét kapunk. Ha pedig a második görbét a síknak abban a tartományában vesszük fel, melynek pontjaiból a harmadik görbének konkáv oldala érhető el, vagy pedig az alkalmasan megnagyobbított első

görbével határolt véges tartományba helyezzük, akkor két menetből álló maximális osztályindexű irreducibilis görbét kapunk. (26 b.)

A dualitás elve alapján megfelelő tételek mondhatók ki a maximális indexű síkgörbékre is.

Egymenetű síkgörbe csak akkor lehet egyszerre maximális indexű és maximális osztályindexű, ha vagy másodrendű, vagy csúcsponttal (és egy áthajlás érintővel) bíró harmadrendű görbe. Többmenetű ilyen görbe kétféle van, az egyik negyedrendű és negyedosztályú, a másik hatodrendű és hatodosztályú. Mindkétfajta görbe egymást két-két pontban kívülről érintő (két, illetőleg három) másodrendű görbéből áll (26d).

Bármely n -edrendű maximális indexű görbének legfeljebb annyi másodrendű menete, illetőleg legfeljebb annyi végesben fekvő másodrendű menete lehet, mint amennyi az $\frac{n}{2}$, illetőleg $\frac{n}{3}$ számban foglalt legnagyobb egész szám (26d).

Bármely n -edrendű p -edfajú és c ($c=0$ vagy 1) csúcsponttal bíró maximális indexű síkgörbének $n-2-p-c$ kettőspontját át lehet vágni úgy, hogy ezáltal a görbe $n-2$ harmadrendű álmenetre és menetre, továbbá zérus vagy egy másodrendű álmenetre vagy menetre bomoljék fel. (A $c=1$ esetben másodrendű menet vagy álmenet nem léphet fel.) A kapott álmeneteken egynél több szög-pont is lehet. Ezeknek lekerekítésével az álmeneteket ugyanolyan rendű menetekbe lehet úgy átvinni, hogy a kapott menetek n -edrendű, maximális indexű és $p=n-2-c$ fajszámmal bíró görbét alkossanak (26e).

A síkgörbék *cirkulációja* azoknak a pontoknak minimális száma, amelyekben a görbét síkjának egy páratlan (rendű) görbéje metszi. A görbe indexe és cirkulációja egymástól különbözhetik. Maximális indexű síkgörbék indexe és cirkulációja azonban egymással egyenlő. A maximális indexű görbék maximális cirkulációjúak és megfordítva (26e), (24), (5).

7. A maximális osztályindexű síkgörbék tulajdonságainak egyezése a valós algebrai görbék tulajdonságaival.

Ha a maximális osztályindexű n -edosztályú G síkgörbe algebrai és algebrailag is n -edosztályú, akkor hozzá kétlevelű KLEIN—RIEMANN-féle felület tartozik. Ennek a felületnek megszerkesztése a következőkép történik:

A G algebrai görbe bármely érintőjéhez a felület egy jól meghatározott valós pontját rendeljük, mégpedig valós érintőhöz az érintéspontot, képzetes érintőhöz pedig az érintő egyetlen valós pontját. Ha T jelöli a síknak azt az összefüggő tartományát vagy azt a különálló részekből álló tartományát, amelynek pontjaiból a G görbéhez csak $n-2$ valós érintő húzható, akkor a T tartomány minden pontja a KLEIN—RIEMANN-féle felületnek kétszeresen számított pontja; mivel belőle a G görbéhez húzható két képzetes érintőnek egyetlen valós pontja. A G görbének bármely P pontja az F felületnek egyszeres pontja, minthogy a G görbe P -ben nem metszheti önmagát és így P -be csak egy érintőnek érintéspontja esik. A síknak egy olyan pontja, amely nem esik sem a T tartományba, sem pedig annak határára, nem pontja az F felületnek.

Ebből következik, hogy az F felület a G görbe menetei mentén összeforrasztott két egymást fedő T tartományból áll. Ha a G görbe ellipszis, akkor az F felület egészen összelapított ellipszoidnak tekinthető.

Az F felület zárt, illetőleg határolt a szerint, amint a G görbének nincs, illetőleg van áthajlós érintője. Ha ugyanis az e egyenes a G görbének áthajlós érintője, akkor e hozzátartozik a T tartomány határához, mivel átlépésekor a G görbéhez húzható (valós) érintők száma kettővel változik. Áthajlós érintővel bíró G görbéhez tartozó KLEIN—RIEMANN-féle felületet zárttá tehetjük azáltal, hogy az egymásra fektetett két darab T tartományt a G görbe menetein kívül még az e egyenes mentén is összeforrasztjuk.

A G görbéhez tartozó KLEIN—RIEMANN-féle felület szerkesztéséből következik, hogy F és T egyszerre összefüggő, s ha közülök

az egyik k számú különálló, de önmagában összefüggő felületből áll, akkor a másik is így viselkedik.

Ebből következik, hogy egy olyan maximális osztályindexű algebrai görbére vonatkozólag, amelynek algebrai és realitási osztályszáma ugyanaz, az algebrai irreducibilitásból, illetőleg reducibilitásból következik a realitási irreducibilitás, illetőleg reducibilitás és megfordítva.

Az olyan maximális osztályindexű n -edosztályú algebrai G görbére vonatkozólag, amelynek a realitási osztályszáma is n , az algebrai és a realitási fajsám egyezése a görbéhez tartozó KLEIN—RIEMANN-féle felület és a T síktartomány közötti vonatkozásból következik.

A kétféle fajsám egyezéséből következik, hogy a G algebrai görbének valamennyi érintőkivételelessége valós, mivel az algebrai fajsám CLEBSCH-féle értelmezéséből következik, hogy a G algebrai görbe valós és képzetes érintőkivételelességeinek együttes száma a G görbe valós érintőkivételelességeinek számával egyenlő.

Mivel a G algebrai görbének nincsenek izolált érintőkivételelességei, azért a görbe algebrai M rendszámára az ismert KLEIN-féle összefüggés miatt fennáll az

$$M + a = n + c \quad (1)$$

összefüggés. A PLÜCKER-féle egyenlet, illetőleg a fajsám CLEBSCH-féle értelmezése miatt fennáll az

$$M = n(n-1) - 2d - 3a, \quad (2)$$

illetőleg a

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - a \quad (3)$$

egyenlet. Az (1), (2) és (3) egyenletből következik a

$$c = n + 2p - 2$$

egyenlet.

Tekintettel arra, hogy egy valós algebrai görbe algebrai rendszáma nem lehet kisebb, mint a realitási rendszáma, azért

$$m \leq M = 2n + 2p - 2 - a = n(n-1) - 2d - 3a.$$

Ebből következik, hogy a maximális osztályindexű síkgörbékre fennálló összefüggések ugyanazok, mint a csupa valós érintőkivételiségekkel bíró algebrai görbékre érvényes összefüggések (26d).

8. Harmad- és negyedrendű térgörbék.

A harmadrendű térgörbék egy menetből állanak és semmi-féle kivételességük sincs. Nincs tehát kettőspontjuk, csúspontjuk, nincs stacionárius síkjuk, vagyis nincs olyan símulósíkjuk, amely a görbét háromnál több összeeső pontban találja.

Kimutatható a következő tétel (7 e) :

Ha egy harmadrendű térgörbének bármely gömbbel legfeljebb hat közös pontja van, akkor a térgörbe véges számú olyan ívből előállítható, amelyeknek bármely gömbbel legfeljebb négy közös pontjuk van.

Az egyemenetű negyedrendű térgörbék épúgy, mint a negyedrendű racionális térgörbék, négy különböző csoportba oszthatók. (22 a)

Az I. csoportba a maximális indexű (kettősindeksű) negyedrendű térgörbék tartoznak. Ezeknek a tér bármely síkjával van közös pontjuk. Az ilyen görbéknek nincs stacionárius síkjuk, sem két pontban érintő síkjuk.

A többi három csoportba tartozó negyedrendű térgörbe kollineációval végesbe hozható. Föltételezzük tehát, hogy a térgörbe és vele együtt a térgörbe konvex B burokja egészen végesben fekszik.

A II. csoportba tartozó negyedrendű térgörbékét jellemzi az a tulajdonságuk, hogy teljesen a hozzájuk tartozó B konvex burok határán fekszenek.

Ha egy negyedrendű (nem maximális indexű) térgörbének van pontja a hozzátartozó B konvex burok belsejében, akkor a görbének B belsejében vagy egy, vagy pedig pontosan két (egymástól elválasztott) íve fekszik. Az első esetben a görbét a III., a másodikban pedig a IV. csoportba soroljuk.

A II. csoportba tartozó negyedrendű térgörbéknek négy stacio-

nárius síkjuk van, de nincs háromszorosan metsző egyenesük. A III., illetőleg a IV. csoportba tartozó negyedrendű térgörbéknek két stacionárius síkjuk van, illetőleg egy sincs. A III. és IV. csoportba tartozó görbéknek a hozzájuk tartozó konvex burok belsejébe eső íve vagy ívei harmadrendűek, a B belsejében fekvő bármely ponton át pontosan egy olyan egyenes megy át, amely a görbét három pontban találja.

Ha egy negyedrendű térgörbének van csúcspontja, akkor a térnek a görbén kívüli tetszőleges P pontján át a görbének 0, 2 vagy négy stacionárius síkja és 0, 1 vagy 2 kétszeresen metsző egyenese (biszekánsa) megy át. A csúcsponttal bíró negyedrendű térgörbe érintői felületét a térgörbének egy stacionárius síkja másodrendű, egy közöséges símulósíkja pedig harmadrendű görbében metszi a térgörbe érintőjén kívül. Egy térbeli egyenes legfeljebb öt érintőjét metszi a térgörbének (9m), (7d), (22a), (23), (12c).

9. Maximális indexű térgörbék.

A maximális indexű n -edrendű térgörbét a tér egy síkja vagy n , vagy $n-2$ (összeeső vagy különböző) pontban találja. Az I. csoportba tartozó negyedrendű görbékhez hasonlóan egy maximális indexű térgörbének sincs stacionárius síkja, sem pedig két pontban érintő érintősíkja. Az n -edrendű maximális indexű $G_n^{(3)}$ térgörbét bármely érintőjén átmenő síksor tagjai az érintéspont beszámításával mind n pontban találják (9i), (15a, b), (26a, f).

Az n -edrendű maximális indexű $G_n^{(3)}$ térgörbének nincs zérus-indexű menete vagy álmenete, meneteinek száma legfeljebb $n-2$. Ha a menetek száma ezt a felső határt eléri, akkor valamennyi menet harmadrendű és a görbének semmiféle kivételessége nincs.

Ha k, i_1, i_2, \dots, i_k és n

az

$$i_1 + i_2 + \dots + i_k = n - 2$$

egyenletnek eleget tevő tetszőleges pozitív szám, akkor mindig van olyan n -edrendű maximális indexű térgörbe, amely i_1, i_2, \dots, i_k indexű k menetből áll (26a, f).

Az n -edrendű maximális indexű térgörbe fajszerán a

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - h$$

számot értjük, ahol d a görbe kettőspontjainak számát, h pedig a görbe látszólagos kettőspontjai számának maximumát jelenti a térnek a görbén kívüli pontjaira vonatkozólag (26f).

Az egyemenetű maximális indexű térgörbék mind zérusfajúak. Az s menetből álló és k irreducibilis görbére szétcső maximális indexű térgörbéknek $p = s + 1 - 2k$ a fajszerük.

A reducibilitás és irreducibilitás fogalma a síkgörbékéhez hasonló. (Egy térgörbe tehát akkor reducibilis, ha meneteit lehet két vagy több csoportra úgy osztani, hogy az egyes csoportokba foglalt menetekből álló görbék rendszámainak összege a görbe rendszámával egyenlő. Ha ilyen csoportokba osztás nem lehetséges, akkor a görbe irreducibilis.)

Bármely n -edrendű és p -edfajú maximális indexű térgörbe valószáges és látszólagos kettőspontjainak együttes száma a térnek a görbén kívüli bármely pontjára vonatkozólag

$$\text{vagy} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p, \text{ vagy } \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p + 1.$$

A térgörbe osztályszáma a görbéhez a tér egy tetszőleges pontján átmenő símulósíkok számának maximuma. E símulósíkok számának minimuma a görbe osztályindexe. A maximális indexű térgörbék — az ilyen síkgörbékkel ellentétben — mind maximális osztályindexűek. Osztályszámuk $n + 2p$, ha n jelöli a görbe rendszámát, p pedig a fajszerát (26f).

A térgörbe rangszáma a görbe olyan érintőinek maximális száma, amelyek a tér egy egyenesét metszik. Az n -edrendű, p -edfajú maximális indexű térgörbéknek legfeljebb $2n + 2p - 2$ a rangszáma.

Bármely maximális indexű térgörbe olyan folytonos deformációkkal, amelyek alatt a görbe rendszáma, indexe és fajszerája változatlan marad, mindig átvihető kettő- és többszörös pont nélküli térgörbébe. Az így kapott térgörbének semmiféle kivételesége nincs (26f).

10. A többmértetű projektív térben fekvő görbékről.

A q -mértetű projektív R_q térben fekvő $G^{(q)}$ görbékről feltételezzük, hogy folytonosak, zártak és minden pontjukban a ponttal folytonosan változó símulótereik vannak, tehát folytonos érintőik, símulósíkjuk, ..., símuló hiperegnyesük és símulóhipersíkjuk van. A görbe rendszáma, illetőleg indexe azoknak a pontoknak maximális, illetőleg minimális száma, amelyekben a görbét az R_q térnek hipersíkjai találják $(7d)$, $(22b)$, (21) , $(26g)$.

A síkban $(q=2)$ a másodrendű és a harmadrendű görbék meneteinek és kettőspontjainak száma korlátos. A közönséges térben $(q=3)$ a harmadrendű, negyedrendű és ötödrendű görbék meneteinek és kettőspontjainak száma korlátos.

A negyedrendű síkgörbék és a hatodrendű térgörbék meneteinek és kettőspontjainak együttes számára ellenben nem adható meg egy felső korlát. Még kevésbbé korlátos a menetek és a kettőspontok száma olyan síkgörbékre és térgörbékre vonatkozólag, amelyeknek rendszáma négynél, illetőleg hatnál nagyobb.

Igaz a következő általános tétel $(26g)$:

A q -mértetű projektív R_q tér bármely n -edrendű $G_n^{(q)}$ görbéje meneteinek és kettőspontjainak együttes száma az $n < 2q$ esetben legfeljebb $n+1-q$ lehet $(26g)$. (Ebben a tételben a csúcspontokat a kettőspontok közé kell számítani.)

Ebből a tételből többek között a következő tétel hozható le:

Valamennyi $G_n^{(n)}$ görbe egymenetű, nincs kettőspontja, sem csúcspontja. Nincs olyan egyenes az R_n térben, amely a görbét három pontban találja, sem olyan két olyan egyenes, amely a görbét két-két pontban metszi és egymást a görbén kívül metszi.

A $G_n^{(n)}$ görbéknek osztályszáma is n $(22b)$.

Ez azt jelenti, hogy az R_n térnek egy tetszőleges P pontján át legfeljebb n símuló hipersíkja megy át a $G_n^{(n)}$ görbének, és azt, hogy van olyan P pont, amelyen a $G_n^{(n)}$ görbének éppen n símulóhipersíkja megy át.

A $G_n^{(n-1)}$ görbék vagy két menetből állanak és nincs kettőspontjuk, vagy egy menetből, s akkor legfeljebb egy kettőspontjuk lehet.

A harmadrendű síkgörbékre vonatkozó tételnek általánosítása a következő: Bármely $G_n^{(n-1)}$ görbe véges számú $(n-1)$ -edrendű ívből összetehető (7 f).

Az R_q térben fekvő n -edrendű $G_n^{(q)}$ görbének indexe legfeljebb $n-q^*$, ahol q^* a q számban foglalt legnagyobb páros számot jelenti (26 g).

A maximális indexű $(n-q^*$ indexű) $G_n^{(q)}$ görbék meneteinek száma akkor is korlátos, ha q -hoz képest akármilyen nagy is n . A menetek számának maximuma ugyanis $n+1-q$. Ha a menetek száma ezt a maximumot eléri, akkor a menetek, legfeljebb egy zérusindexű menetet leszámítva (q páros értéke esetén), mind egységindexűek.

Egy maximális indexű $G_n^{(q)}$ görbének egy zérusindexű menete sem lehet, ha q páratlan szám. Ha pedig q páros szám, akkor a görbének legfeljebb annyi zérusindexű menete lehet, mint amennyi a $\frac{2+n-q}{2}$ számban foglalt legnagyobb egész szám.

A maximális indexű síkgörbének és közönséges térbeli görbéknek nem egy tulajdonsága megfelelő változtatásokkal a háromnál magasabb méretű térben fekvő maximális indexű görbékre is érvényes. Így pl. páratlan q esetén a maximális indexű $G_n^{(q)}$ görbe egy símulóhiperegyesen áthaladó hipersík sor tagjai mind n pontban találják a görbét.

11. Görbeívek kiegészítése teljes görbéké rendszámuk megtartásával.

Bármely másodrendű I_2 görbeív a végpontjait összekötő egyik szakasszal együtt másodrendű görbét alkot. Az így kapott másodrendű görbének általában van szögpontja, azonkívül egyenes darabja. Ezt az egyenes darabot csak akkor nem lehet konvex ívvel helyettesíteni, ha az I_2 ív egyik végpontjának érintője a másik végponton átmegy (7h, i).

Ha I_2 végpontjainak érintői az I_2 íven kívüli O pontban metszik egymást, akkor az az O középpontú projektív tükrözés, amelynek tengelye az I_2 ív végpontjait összekötő egyenes, I_2 -t olyan I_2 ívbe

viszi át, amely I_2 -vel egy folytonos érintővel bíró másodrendű görbét alkot (7h, i), (21).

Egy I_3 harmadrendű térbeli görbéiv a végpontjait összekötő egyik szakasszal együtt harmadrendű (általában szögpontokkal bíró) zárt görbét alkot. Ezt az egyenes szakaszt, amikor az I_3 ív egyik végpontjának símulósíkja sem tartalmazza a másik végpontot és amikor a két végpont érintője nem metszi egymást, egy harmadrendű I'_3 ívvel úgy lehet helyettesíteni, hogy I_3 és I'_3 együttvéve folytonos érintővel és folytonos símulósíkkal bíró harmadrendű térgörbét alkosson (7h).

Ez a tétel az n -méretű R_n térben fekvő n -edrendű I_n görbéivekre is általánosítható, vagyis egy ilyen I_n görbéiv — bizonyos kivételek leszámításával — az R_n tér egy másik n -edrendű I'_n ívével kiegészíthető egy olyan n -edrendű zárt görbévé, amelynek az I_n ív végpontjaiban határozott érintője, símulósíkja, ..., símulóhiperegynese és símulóhipersíkja van (21).

Kivétel nélkül igaz a következő tétel:

Az R_n tér bármely n -edrendű I_n görbéive mindig kiegészíthető egy másik, szintén n -edrendű I'_n görbéívvvel egy olyan $(n+1)$ -edrendű zárt görbévé, amelynek az I_n ív végpontjaiban határozott símulóterei vannak (21).

A síkbeli n -edrendű I_n görbéiv a végpontjait összekötő egyik szakasszal együtt n -edrendű (általában szögponttal bíró) zárt síkgörbét alkot. Bizonyos kivételek leszámításával az egyenes szakasz úgy helyettesíthető egy konvex ívvel, hogy a kapott zárt görbének az I_n végpontjaiban is határozott érintői legyenek (7 h).

12. Görbék rendszámának általánosítása. Ciklikus rendszám.

A síkgörbék közönséges vagy lineáris (a sík egyeneseseivel való metszéspontjaira vonatkozó) rendszámán kívül más rendszámot is lehet értelmezni. Ilyen a *ciklikus rendszám*.

A G síkgörbe ciklikus rendszáma a görbe olyan pontjainak maximális száma, amelyek egy körön vannak (9 a), (7 g), (18).

A folytonos görbülettel bíró és ciklikusan n -edrendű konvex

görbén van legalább n olyan pont, amelyben a görbületnek szélső értéke van.

Bármely zérusindexű és ciklikusan n -edrendű síkgörbének a lineáris rendszáma n -nél nem nagyobb. (Természetesen feltételezzük, hogy a görbének véges számú többszörös pontja van). (13).

Van azonban véges lineáris rendszámú, de akármilyen nagy ciklikus rendszámú síkgörbe. Ilyen lehet egy ovális is (7c).

A síkgörbék ciklikus rendszámának a térgörbék szferikus rendszáma felel meg. Ez a rendszám a térgörbe olyan pontjainak maximuma, amelyek egy gömbön vannak. A lineárisan harmadrendű és szferikusan hatodrendű térgörbékre vonatkozólag már idéztünk egy tételt (7 e).

Egy G síkgörbe rendszáma tovább általánosítható. Legyen S a síkgörbéknek egy olyan folytonos rendszere, amelyben egy-egy görbét egyértelműen meghatároz k pont. A G görbének az S rendszerre vonatkozó rendszáma, illetőleg indexe a G görbe és a rendszer görbéi olyan metszéspontjainak maximális, illetőleg minimális számá, amelyek az S rendszer alappontjaitól különböznek (7 f).

A G görbének az így általánosított rendszámra vonatkozó kivételességei a G görbe közönséges kivételességeitől különbözhetnek.

A G síkgörbe rendszámának ezzel az általánosításával előállíthatók többméretű térben fekvő görbék. Ha ugyanis az S rendszernek derékszögű koordinátákban

$$\lambda_0 f_0(x, y) + \lambda_1 f_1(x, y) + \dots + \lambda_k f_k(x, y) = 0$$

az egyenlete, akkor a G görbét az

$$x_0 = f_0(x, y), \quad x_1 = f_1(x, y), \dots, \quad x_k = f_k(x, y)$$

transzformáció a k -méretű R_k térnek egy olyan görbéjébe viszi át, amelynek az R_k tér hipersíkjaira vonatkozólag ugyanaz a rendszáma, illetőleg az indexe, mint a G görbének az S görberendszer görbéire. Itt x_0, x_1, \dots, x_k az R_k tér egy pontjának homogén DESCARTES-féle koordinátáit jelöli (26 f, g).

A rendszám fogalmának további, halmazelméleti és topológiai általánosítása végett utalunk HAUPT O. összefoglaló dolgozatára (7 a).

13. Mozgásrendszám, eltolásrendszám, tükrözésrendszám.

Egy G síkgörbe lineáris, ciklikus vagy egy S rendszerre vonatkozó rendszáma és indexe a görbén kívül a tekintetbe vett alapgörbétől (egyenesektől, köröktől, illetőleg az S rendszer görbéitől) is függ. Lehet azonban a G görbének olyan rendszámát és indexét is értelmezni, amely csak a görbétől függ, amely tehát a görbének belső, intrinszekus tulajdonsága. Ilyen rendszám a G síkgörbe mozgásrendszáma, kinematikus rendszáma.

A G síkgörbe mozgásrendszáma a G görbe és a belőle a sík mozgásaival származó (G -vel egybevágó, de G -vel össze nem eső) G' görbék metszéspontjainak maximális száma. Ezeknek a pontoknak minimális száma a G síkgörbe mozgásindexe, kinematikus indexe (1), (3), (20).

A körök az egyedüli olyan görbék, amelyeknek mozgásrendszáma is kettővel egyenlő. A kinematikusan negyedrendű görbék a ciklikus negyedrendű görbékkel megegyeznek.

A G síkgörbe eltolásrendszáma azoknak a pontoknak maximális számával egyenlő, amelyekben a G görbét belőle a sík eltolásaival keletkező görbék metszhetik. A metszéspontokból azonban le kell számítani a G görbe végtelen távoli pontjait. Ezek ugyanis eltolással nem változnak.

Azok a zárt görbék, amelyeknek eltolásrendszáma kettővel egyenlő, az (egyenes szakaszt nem tartalmazó) másodrendű görbék. Azok a görbeívek, amelyeknek eltolásrendszáma az egység, olyan konvex ívek, amelyeknek nincsenek párhuzamos érintőik (20).

A lineáris rendszám az eltolásrendszámtól páratlan számban is különbözhetik. A NEIL-féle parabolának például 3 a lineáris rendszáma és 2 az eltolásrendszáma (20).

Egy G síkgörbének tükrözésrendszáma a G görbe és a belőle tengelyes tükrözéssel származott görbék metszéspontjainak maximális száma.

14. Másodrendű felületek.

Egy felület rendszáma, illetőleg indexe a felület és a háromméretű tér olyan egyenesei közös pontjainak maximális, illetőleg minimális

száma, amelyek nem esnek a felületre. Föltételezzük, hogy az olyan egyenesek, amelyeknek a felülettel van egy közös szakasza, teljesen a felülethez tartoznak.

A realitás szempontjából másodrendű felületek tulajdonságai lényegében megegyeznek az algebrai másodrendű felületek tulajdonságaival.

A másodrendű felületek az algebrai másodrendű felületekhez hasonlóan három osztályba foglalhatók.

Az első osztályba tartoznak az ovaloidok. Az ilyen felületek kollineációval a térnek véges részébe hozhatók s akkor valamennyi pontjuk elliptikus. Az algebrai másodrendű felületek közül ebbe az osztályba tartozik az ellipszoid, elliptikus paraboloid és a két-köpenyű hiperboloid.

A második osztályba foglalhatók azok a másodrendű felületek, amelyeknek van hiperbolikus pontjuk. Az ilyen felületeknek minden pontjuk hiperbolikus. Az ebbe az osztályba tartozó felületek kivétel nélkül mind algebraiak, mégpedig vagy egyköpenyű hiperboloidok vagy hiperbolikus paraboloidok.

A harmadik osztályba tartozó másodrendű felületeknek van parabolikus pontjuk. Ezeknek a felületeknek minden pontja parabolikus. Ezek a felületek másodrendű kúpfelületek vagy hengerfelületek. Ezek a felületek lehetnek algebraiak vagy nem algebraiak. Egy másodrendű nem algebrai síkgörbének egy síkján kívüli pontból való vetítésével ugyanis nem algebrai másodrendű kúpot kapunk (6), (9 b), (26 h).

Legyen F olyan végesben fekvő másodrendű felület, ovaloid, amelynek pontjaiban a normális metszetek görbületei folytonosak és zérustól különböznek és amelynek nincs gömbdarabja, sem körvonalgörbületi vonala.

Egy ilyen ovaloidot akkor mondunk ciklikusan negyedrendűnek vagy röviden ciklikusnak, ha bármely olyan körrel, amely nem fekszik teljesen a felületen, legfeljebb négy közös pontja van.

Egy olyan gömb, amely a ciklikus ovaloidot két pontban érinti és amelynek van még közös pontja a felülettel, a felületet két körben metszi.

A ciklikus ovaloidnak bármely pontján át a felületnek két köre megy át és ezeknek síkjai mind átmennek egy közös ponton. A ciklikus ovaloid algebrai felület, mégpedig vagy ellipszoid, vagy algebrai ciklida (9 *b*, *m*).

15. Harmadrendű felületek.

Az olyan harmadrendű felületek, amelyeknek van egy kettősvonaluk, végtelen sok egyenest tartalmaznak és vagy kúpfelületek (esetleg hengerfelületek), vagy pedig vonalfelületek (torzfelületek). A kettősvonal szükségképpen kettősegyenes, mert bármely két pontját összekötő egyenes a felületet háromnál több pontban találja és így hozzátartozik a felülethez. Ha tehát nem volna egyenes a kettősvonal, akkor kétszeresen végtelen sok egyenes tartoznék a felülethez. Ez azonban lehetetlen.

Ha a felület egy tetszőleges *P* pontjához tartozó érintősík a kettősegyenest egy *Q* pontban metszi, akkor a *PQ* egyenes a felülethez tartozik, mivel vele legalább négy közös pontja van.

Ezzel ki van mutatva, hogy a kettősvonallal bíró harmadrendű felületek végtelen sok egyenest tartalmaznak.

A kettősvonal nélküli harmadrendű felületeknek legfeljebb négy kúpos pontjuk van. Ha *A*, *B*, *C* és *D* négy ilyen kúpos pont, akkor az *ABCD* négylapnak mind a hat éle rajta van a felületen s ezenkívül a felületnek van még három egyenese (9 *k*).

Az általános harmadrendű felületen is mindig van egyenes, sőt mindig van három olyan egyenes, amelyek egy síkba esnek. A kúpos ponttal nem bíró harmadrendű felület egyeneseinek száma 3, 7, 15 vagy 27 (9 *f*).

A legegyszerűbb olyan harmadrendű felület, amely nem egyszerűsmind harmadrendű algebrai felület, a következő egyenlettel állítható elő:

$$xy = z^5 + z^3 + 1, \quad \text{vagy} \quad xy = z^5 + z^3 + 1 + \sin z.$$

Ezek közül az első felület algebrai, a második azonban nem algebrai (9 *f*).

Van olyan harmadrendű felület, amely pontosan 27 egye-

nest tartalmaz, s amely algebrailag nem harmadrendű felület (2), (14).

16. Negyedrendű felületek.

A nem algebrai negyedrendű felületek közül a kutatás tárgyát először a negyedrendű gyűrűfelület alkotta (9 g).

Egy ilyen felület egy oválisnak a síkjában fekvő, de az oválist nem metsző tengely körüli forgatásával keletkezik.

Ha az ovális tetszőleges, akkor a forgásfelület rendszáma akár milyen nagy páros szám lehet. A gyűrűfelület akkor és csak akkor negyedrendű, ha legfeljebb négy pontban találja az oválist síkjának bármely olyan hiperbolája, amelynek melléktengelye a gyűrűfelület tengelye.

A negyedrendű gyűrűfelület egyszersmind negyedosztályú is, vagyis a térnek egy egyenesén sem megy át négynél több érintő-síkja a felületnek, de van olyan egyenes, amelyen keresztül éppen négy érintősík megy a felülethez.

Azokon az egyeneseken, amelyek a negyedrendű gyűrűfelületet négy pontban metszik, a felületnek négy érintősíkja megy át. Az olyan egyeneseken át, amelyeknek a felülettel két közös pontjuk van, a felületnek két érintősíkja halad át. Az olyan egyeneseken át, amelyeknek a felülettel nincs közös pontjuk, a felületnek vagy négy érintősíkja megy át, vagy egy sem.

A negyedrendű gyűrűfelületet bármelyik kettősen érintő síkja két oválisban metszi. A felületnek konturja egy P pontból csak akkor tartalmaz áthajlós pontot, ha P a felületnek parabolikus pontja. Ha P a felületen kívül fekszik, akkor a konturgörbe mindig végesbe vetíthető.

JUEL a negyedrendű felületek közül a gyűrűfelületen kívül az általánosított STEINER-féle felületet vizsgálta (9 h, l).

Az algebrai STEINER-féle felület olyan negyedrendű felület, amelyet minden érintősíkja két kúpszeletben metsz. A nem algebrai STEINER-féle felület olyan negyedrendű felület, amelyet bármely érintősíkja két másodrendű görbében metsz. Ez a két másodrendű görbe azonban általában nem kúpszelet.

Az algebrai vagy nem algebrai STEINER-féle felületnek vagy egy kettősegyenesre van, vagy három. Az utóbbi esetben a három kettősegyenesnek van egy közös pontja. A felület összes kettős-érintői a felületnek azokba a kivételes síkjaiba esnek, amelyek a felületet egy-egy másodrendű görbe mentén érintik. Ha a felületnek csak egy kettősegyenesre van, akkor az ilyen kivételes síkok száma kettő. Ha ellenben három kettősegyenesre van a STEINER-féle felületnek, akkor a kivételes síkok száma vagy zérus, vagy négy.

A három kettősegyenessel bíró és (valós) kettősérintő nélküli STEINER-féle felület maximális indexű. Ez azt jelenti, hogy bármely egyenesnek van legalább két közös pontja a felülettel.

17. Maximális indexű felületek.

A magasabbrendű nem algebrai felületek közül eddig csak a maximális indexű felületekre vonatkozólag vannak általános eredmények (26 h), (9 d , l).

A maximális indexű felületeknek minden többszörös vonala egyenes. Egy n -edrendű maximális indexű felület fajsámán a

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$$

számot értjük, ahol d a felület kettősegyeneseseinek a száma. A többszörös egyeneseket megfelelő sokszorossággal kell kettősegyeneseknek számítani. Ha a felületnek van kuszpidális egyenesre (ilyen legfeljebb egy lehet), akkor azt is a kettősegyenesek közé kell számítani.

Miként egy síkgörbe több menetből állhat, akként egy felület több különálló felületből, köpenyből állhat.

A felületek irreducibilitását és reducibilitását éppúgy értelmezve, mint síkgörbék esetén, a következő tétel mondható ki:

Ha egy maximális indexű n -edrendű felület i_1, i_2, \dots, i_s indexű köpenyekből áll és ha

$$n = i_1 + i_2 + \dots + i_s + 2k,$$

akkor a felület k irreducibilis felületre esik szét. Ennek a tételnek megfordítása is igaz (26 h).

Az n -edrendű maximális indexű felület köpenyeinek száma legfeljebb $n-1$ lehet. Ha a köpenyek száma eléri az $n-2$ vagy az $n-1$ számot, akkor a felületnek $n-2$ harmadrendű köpenye van. Az esetleges $(n-1)$ -dik köpeny szükségképpen másodrendű. A $n-2$ páratlan köpeny páronként egy-egy egyenesben metszi egymást. A felület kettősegyeneseseinek van közös pontjuk. Ebben a tekintetben csak hatodrendű felület alkothat kivételt. Van ugyanis olyan hatodrendű maximális indexű felület, amelynek négy harmadrendű köpenye páronként egy tetraéder hat élében metszi egymást. Ennek a felületnek lehet egy ovaloidköpenye is, amely a tetraéder belsejében fekszik (26 h).

Ha egy maximális indexű felületnek az egyik köpenye kúpfelület (vagy hengerfelület), akkor — legfeljebb egy ovaloid kivételével — valamennyi köpenye ugyanazzal a csúccsal bíró kúpfelület (26 h).

Ha egy maximális indexű felületnek van ovaloidköpenye, akkor nem lehet a felületnek torzfelületköpenye, vagyis a felületnek vagy csak végesszámú egyenese lehet, vagy pedig minden más köpenye közös csúccsal bíró kúpfelület. Az ovaloidköpennyel bíró többköpenyű maximális indexű felület rendszáma és indexe nem változik meg akkor, ha a felületből az ovaloidköpenyt elhagyjuk (26 h).

Az egyköpenyű maximális indexű torzfelületek fajszáma zérus. Az ilyen n -edrendű felületek kétfélék : vagy van egy $(n-2)$ -szeres és egy kétszeres vezéregyenesük, vagy pedig van egy $(n-1)$ -szeres és egy egyszeres vezéregyenesük (9 l).

Van olyan maximális indexű kétköpenyű felület, amelynek két köpenye tetszőlegesen előre megadott $n_1(\geq 2)$ és $n_2(\geq 2)$ rendszámmal bíró torzfelület. Nincs ellenben olyan maximális indexű felület, amely kettőnél több torzfelületköpenyből állana (26 h).

A két torzfelületköpenyből álló maximális indexű felületek mindig reducibilis felületek, vagyis rendszámuk a két köpeny rendszámának összegével egyenlő (26 h).

Ez a tétel csak akkor áll, ha feltételezzük, hogy a felület egy egyenes szakasszal együtt szükségképpen a teljes egyenest tartalmazza (26 h), (9 l).

Az n -edrendű maximális indexű egyemenetű síkgörbék fajsza-
ma vagy zérus, vagy az egység. Ezzel szemben az n -edrendű maximális
indexű egyköpenyű felület fajsza-
ma elérheti az n -edrendű maxi-
mális indexű felületek fajsza-
mának maximumát, az $n-2$ szá-
mot is (26 h).

Az olyan maximális indexű n -edrendű felület, amelynek faj-
sza-
ma nagyobb, mint $n-5$, feltétlenül irreducibilis.

18. Sokszög mint görbe, soklap mint felület.

A síkgörbékét úgy is lehet értelmezni, hogy a görbefogalom a
projektív sokszögeket is magába foglalja.

A projektív síksokszögeknek értelmezése végett felvesszünk a sík-
ban n (≥ 3) egymástól különböző olyan A_1, A_2, \dots, A_n pontot,
amelyek közül nincs olyan három, amely egy egyenesre esik.
A ciklikusan egymásra következő $A_k A_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n; A_{n+1} \equiv A_1$)
pontpárokat összekötjük az $A_k A_{k+1}$ egyenesnek az A_k és A_{k+1}
ponttal meghatározott egyik szakaszával. Ez a szakasz lehet
véges vagy végtelen nagy. Az így kapott zárt törtvonal projektív
 n -szög. Az A_1, A_2, \dots, A_n pont a sokszög n szögpontja, az
egymásra ciklikusan következő szögpontpárok összekötő n szakasza
a sokszög n oldala.

Egy projektív sokszög akkor m -edrendű, ha a sík egyeneseivel
való közös elemeinek maximális száma m . A közös elem lehet pont
vagy sokszögoldal. A sokszögnek indexe azoknak a közös elemeknek
minimális száma, amelyekben a sokszöget síkjának egy egyenese
találhatja.

A közönséges konvex sokszög másodrendű. Ha azonban egyik
oldalát az azt az oldalt teljes egyenessé kiegészítő szakasszal
helyettesítjük, akkor harmadrendű sokszöget kapunk. Ha az
 n -oldalú konvex sokszögnek $k-2$ ($k \leq n$) oldalát helyettesítjük a
kiegészítő szakasszal, akkor k -adrendű és $(k-2)$ -indexű sokszöget

kapunk. Egy olyan egyenes ugyanis, amely a konvex sokszög meghagyott két oldalát találja, a többi oldalát nem metszi és így a $k-2$ oldal kiegészítését metszi. Az olyan egyenes pedig, amely a konvex sokszöget nem metszi, a $k-2$ oldalnak kiegészítő szakaszát metszi.

Könnyű belátni azt is, hogy egy konvex sokszög valamennyi oldalának, vagy egy kivételével valamennyi oldalának a kiegészítő szakasszal való helyettesítésével szintén maximális indexű projektív sokszöget kapunk.

A projektív sokszög A_k szögpontjában találkozó két oldalt tartalmazó két egyenes a projektív síkot két szögtérre bontja fel. Az egyik szögtérbe eső egyeneseket az A_k szögpontban érintőknek, a másikba esőket pedig metszőknek tekintjük. Az oldalak számának olyan módon való növelésével, hogy ezáltal az egyes oldalak hossza és az egyes szögpontokban az érintőket tartalmazó szögterek nyílásai zérus felé közeledjenek, a sokszög mind jobban és jobban megközelíti a görbe fogalmát.

A projektív sokszögekre vonatkozó tételekből tehát határértékként a görbékre vonatkozó tételeket kapunk.

A projektív sokszögnek görbékként való tárgyalása azért célszerű, mert rájuk a megfelelő tételek megállapítása gyakran könnyebb, mint a görbékre. Másrészt tárgyalásuk megengedi az egyes szakaszt és szögpontot nem tartalmazó görbékre vonatkozó tételeknek olyan görbékre vonatkozó általánosítását is, amelyeken vannak egyenesszakaszok és szögpontok (5 a, b), (7 i, j, k), (8 b), (10 c, d), (19 a, b, c), (26 k), (25).

Bármely végesrendű síkgörbe ugyanazon rendű sokszöggel egyenletesen közelíthető meg (7 i, k).

A térgörbék helyett a zárt térbeli sokszögeket lehet tárgyalni, s rájuk a térgörbékre vonatkozó tételeket megállapítani.

Hasonlókép szolgáltatnak a projektív soklapok olyan tételeket, amelyek a felületekre is érvényesek. Amíg síkgörbék és térgörbék sík-, illetőleg térsokszögekkel egyenletes megközelíthetők, addig ugyanezt felületekre és soklapokra nem állíthatjuk. Már a harmadrendű felületeknek harmadrendű soklapokkal való megközelítése sem mindig lehetséges (19 a).

Irodalom.

1. BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Integralgeometrie, 1. és 2. füzet. Leipzig, 1936 és 1937.
2. BLOCH, A.: Sur les surfaces élémentaires du 3^e ordre de la géométrie. Bol. Mat. (Baidaff) 4 (1931).
3. BOL, G.: Zur kinematischen Ordnung ebener Jordankurven. Abh. math. Sem. Hamburg 11 (1936).
4. BRUNN, H.: Über Kurven ohne Wendepunkte, München, 1889.
5. BRUSOTTI, L.: a) Sui poligoni del piano proiettivo aventi circolazione massima, Rendiconti d. R. Ist. Lombardo 66 (1933);
b) Poligoni e poliedri, Enciclopedia delle matematiche elementari, (Berzolari, Vivanti, Gigli) II. kötet I. rész 1937.
6. HAALMEYER, B. P.: Bijdragen tot de theorie der elementairoppeervlakken. Amsterdam, 1917.
7. HAUPT, O.: a) Geometrische Ordnungen, Jahresbericht d. DMV 49 (1940);
b) Zur Juelschen Theorie der reellen, ebenen Kurven 4. Ordnung, Sitz.-ber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1925;
c) Über Kontinua von beschränkter Ordnung, Sb. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1931;
d) Ein Satz über die Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung, Math. Annalen 108 (1933);
e) Über Raumbogen dritter Ordnung, welche die sphärische Ordnung fünf besitzen, Math. Zeitschr. 37 (1933);
f) Zur Theorie der Ordnung reellen Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen, Monatshefte f. Math. u. Phys. 40 (1933);
g) Verallgemeinerung eines Satzes der Herren Juel und Stenfors, Sb. d. Phys.-med. Soz. Erlangen 65 (1934); Ergänzung eines Zitates in meiner Note: Verallgemeinerung eines Satzes der Herren Juel und Stenfors, ugyanott 67 (1935);
h) Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung, Crelle-Journal (Journal f. d. r. u. angew. Math.) 170 (1934);
i) Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven, Math. Zeitschrift 39 (1935);
j) Gestaltsprobleme bei reellen Gebilden, Monatshefte f. Math. u. Phys. 43 (1936);
k) Über ordnungsfeste Annäherung ebener Bogen, Sb. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1934.
8. HJELMSLEV, J.: a) Om Grundlaget for Laeren om simple Kurver, Nyt Tidsskrift f. Math. 18 (1907);
b) Die graphische Geometrie, Forhandl. Attende skand. Mat. Kongr. Stockholm, 1934.

9. JUEL, C.: *a)* Om simple cykliske Kurver, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (7) 8 (1911);
- b)* Om algebraiske og ikke-algebraiske Flader, Skand. Mat. Kongr. Kopenhága, 1911;
- c)* Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, D. Kgl. Vidensk. Selsk. Skrifter (7) 11 (1914);
- d)* Über Elementarflächen, Jahresbericht d. DMV 22 (1913);
- e)* Einige Sätze über ebene ein- und mehrteilige Elementarkurven vierter Ordnung, Math. Ann. 76 (1915);
- f)* Einleitung in die Theorie der Elementarflächen dritter Ordnung, Math. Ann. 76 (1915);
- g)* Die elementare Ringfläche vierter Ordnung, D. Kgl. Vidensk. Selsk. Skrifter (8) 1 (1916);
- h)* Über die verallgemeinerte Steiner'sche Fläche, Jahresbericht d. DMV. 24 (1915);
- i)* Die gewundenen Kurven von Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung, D. Kgl. Vidensk. Selsk. Skr. (8) 2 (1917);
- j)* Note über die paaren Züge einer ebenen Elementarkurven vierter Ordnung, D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab. 3, Nr. 5 (1920);
- k)* Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten, ugyanott 3, Nr. 6 (1920);
- l)* Über Flächen von Maximalindex, ugyanott 6, Nr. 5 (1924);
- m)* Beispiele von Elementarflächen und Elementarkurven, Atti d. Congr. Int. d. mat. Bologna, 1928.
10. KIVIKOSKI, E. (= STENFORS, E.): *a)* Ein Satz über völlig stetige geschlossene Kurven, Comm. phys. math. Soc. Sci. Fennica 1, Nr. 27 (1923);
- b)* Kennzeichnung der Kurven zweiter und dritter Ordnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae A 44 (1935), Nr. 2;
- c)* Über Streckenzüge in der projektiven Ebene, ugyanott 38 (1928) Nr. 14.
- d)* Zur Theorie der projektiven Vielseite, ugyanott 33 (1929), Nr. 3.
11. KNESER, A.: Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven, Math. Annalen 41 (1893).
12. LINSMAN, M.: *a)* Sur la théorie de l'ordre des figures réelles et les travaux de M. Haupt, L'Enseignement Mathématique 37 (1938);
- b)* Sur les surfaces réglées du troisième ordre en géométrie finie, Bull. Sci. mat. (2) 60 (1936);
- c)* Sur les arcs et les courbes réels gauches du quatrième ordre, C. R. Acad. Paris 204 (1937).
13. MARCHAUD, A.: Sur les continus d'ordre borné, Acta mathematica 55 (1930).
14. MEYNIÉUX, R.: Sur les surfaces élémentaires du troisième ordre, Bull. des Sc. math. 60 (1936).

15. MOHRMANN, H.: *a)* Über algebraische und nichtalgebraische gewundene Kurven n -ter Ordnung vom Maximalindex, Math. Annalen 78 (1917);
b) Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle Singularität, Sb. d. Bayer. Akad. 1916.
16. MONTEL, P.: *a)* Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel, Bull. des Sc. math. 48 (1924);
b) Sur le principe de correspondance et une démonstration de Fatou, ugyanott 57 (1933).
17. MÖBIUS, F. A.: Über die Grundformen der Linien dritter Ordnung, Leipziger Abhandl. math. phys. Klasse 1 (1852), Gesammelte Werke II. (1886).
18. MUKHOPADHYAYA, S.: Collected Geometrical Papers, Calcutta, 1929—1931.
19. PIMIÁ, L.: *a)* Über Vielfache dritter Ordnung, Ann. Acad. Sc. Fennicae 49 (1938), Nr. 2;
b) Über projektive Vielseite dritter Ordnung, ugyanott 51 (1938), Nr. 5;
c) Über zusammengesetzte Vielfache dritter Ordnung, ugyanott 52 (1938), Nr. 1.
20. ROSENTHAL, A.: Die Translationsordnung ebener Kurven, Monatshefte für Math. u. Phys. 45 (1936).
21. SAUTER, I.: Zur Theorie der Bogen n -ter (Realitäts-) Ordnung im R_n , I—II. Math. Zeitschrift 41 (1936) és 42 (1937).
22. SCHERK, P.: *a)* Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung, Math. Annalen 112 (1936);
b) Über differenzierbare Kurven und Bögen, I—II. közlemény, Časopis pro pestování mat. fys. 66 (1937), III. közlemény, Annali di mat. pura ed appl. (4) 17 (1938).
23. SEGRE, B.: Intorno alle ovali sghembe, e su di un'estensione del teorema di Cavallieri-Lagrange alle funzioni di due variabili, R. Acad. d'Italia, memor. d. cl. di Sc. Fis., Mat. e Natur. 7 (1936).
24. SCOTT, CH. A.: On the Circuits of Plane Curves, Transactions of the Amer. Math. Soc. 3 (1902).
25. SZŐKEFALVI NAGY BÉLA: Projektív sokszögekről és sokoldalakról, Mat. és Természettudományi Értesítő 57 (1938).
26. SZŐKEFALVI NAGY GYULA: *a)* Sík- és térbeli algebrai görbék reális meneteiről, MTÉ (Mat. és Természettudományi Értesítő) 33 (1915); Über die reellen Züge algebraischer ebener und Raumkurven, Math. Annalen 77 (1916);
b) Über Kurven von Maximalklassenindex. Über Kurven von Maximalindex, Math. Ann. 89 (1923), 90 (1924);
c) Maximális osztályindexű síkgörbék jellemő számairól, MTÉ 43 (1926); Maximális osztályindexű síkgörbék meneteiről, MTÉ 44 (1927); Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve von

- Maximalklassenindex, Math. Ann. 100 (1928); Über die Züge der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, Math. Ann. 100 (1928);
- d) Maximális osztályindexű síkgörbék rendszámáról, MTÉ 44 (1927); Egy menetből álló maximális osztályindexű síkgörbék rendszámáról, MTÉ 44 (1927); Maximális osztályindexű síkgörbék rendszámára fennálló egyenlőtlenségekről, MTÉ 45 (1928); Maximális osztályindexű síkgörbék jellemző tulajdonságai között fennálló relációkról, MTÉ 45 (1928); Über die ebenen reduzierbaren Kurven gegebener Klasse vom Maximalklassenindex mit der Maximalanzahl ineinander liegender Ovale, Math. Ann. 103 (1930); Über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalindex, Math. Zeitschrift 35 (1932); Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, Math. Zeitschr. 35 (1933); Über die ebenen Kurven vom Maximalindex und von Maximalklassenindex, Jahresbericht d. DMV. 41 (1931);
- e) Über die irreduzierbaren ebenen Kurven vom Maximalindex, Acta Sc. Math. Szeged 3 (1927); Über eine Zerlegung der ebenen Kurven vom Maximalindex, u. ott 8 (1936); Über die Zirkulation der ebenen Kurven vom Maximalindex, u. ott 8 (1936);
- f) Maximális indexű térgörbékéről, MTÉ 54 (1936); Über Raumkurven vom Maximalindex, Crelle-Journal 177 (1937);
- g) Többméretű térben fekvő többmenetű görbékéről, MTÉ 55 (1937); Többméretű terekben fekvő maximális indexű görbékéről, MTÉ 55 (1937); Maximális indexű irreducibilis algebrai görbék a többméretű térben, MTÉ 60 (1941); Maximális indexű reducibilis algebrai görbék a többméretű térben, MTÉ 60 (1941); Über die Kurven n -ter Ordnung im projektiven q -dimensionalen Raum für $n < 2q$, Crelle-Journal 183 (1941);
- h) Maximális indexű felületek, Szent István Akadémia Értesítője 9 (1924); Über Flächen vom Maximalindex, Math. Ann. 98 (1927); Über die Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex, Acta Sc. Math. Szeged 6 (1934); Über die aus Regelflächen zweiter Ordnung bestehenden Flächen vom Maximalindex, Jahresbericht d. DMV. 47 (1937); Maximális indexű felületekre vonatkozó vizsgálatok, MTÉ 53 (1935); Olyan maximális indexű felületekről, amelyeknek egyik köpenye másodrendű torzfelület, MTÉ 56 (1937); Egyköpenyű maximális indexű felületek fajszáma, MTÉ 58 (1939); Zur Theorie der Flächen vom Maximalindex, Crelle-Journal 183 (1941);
- i) Über einen v. Staudtschen Satz, Acta Sc. Math. Szeged 2 (1924); Einige Sätze über ebene Elementarkurven, u. ott 5 (1931); Olyan síkgörbékéről, amelyeknek elsőfajú csúcspontokon kívül más szingularitásuk nincs, MTÉ 44 (1927);

- j) Érintőszingularitás nélküli végesben fekvő síkgörbékről, MTÉ 47 (1937); Érintőszingularitás nélküli és zéróindexű síkgörbékről, MTÉ 54 (1936); Über die Buschenveloppen von H. Brunn, Math. Zeitschr. 41 (1936); Über die Eigenschaften der beschränkten ebenen Kurven ohne Tangentensingularität, u. ott 46 (1940);
 k) Síksokszögekről, különösen egyszerű síksokszögekről, MTÉ 57 (1938).

Szőkefalvi Nagy Gyula.

GEOMETRIE ENDLICHER ORDNUNG.

Verfasser gibt einen Überblick über die wichtigsten Ergebnisse aus der im wesentlichen von C. JUEL eingeschlagenen Untersuchungsrichtung. Es handelt sich um die gestaltliche Beschreibung der einfachsten projektiv geschlossenen krummen Gebilde endlicher Ordnung mit gewissen Differenzierbarkeitseigenschaften.

Dieser Bericht gliedert sich in die folgenden 18 Paragraphen:

1. Einleitung. Definitionen. — 2. Ebene Kurven zweiter und dritter Ordnung. — 3. Ebene Kurven vierter Ordnung. — 4. Das Korrespondenzprinzip von C. Juel. — 5. Ebene Kurven vom Index Null ohne Tangentensingularitäten. — 6. Ebene Kurven vom Maximalindex. Ebene Kurven vom Maximalklassenindex. — 7. Übereinstimmung der Eigenschaften der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex mit denjenigen von den reellen ebenen algebraischen Kurven. — 8. Raumkurven dritter und vierter Ordnung. — 9. Raumkurven vom Maximalindex. — 10. Kurven in mehrdimensionalen projektiven Räumen. — 11. Ordnungsfeste Erweiterung eines Bogens zu einer geschlossenen Kurve. — 12. Verallgemeinerung der Ordnung von Kurven. Die zyklische Ordnung. — 13. Bewegungsordnung, Translationsordnung, Spiegelungsordnung. — 14. Flächen zweiter Ordnung. — 15. Flächen dritter Ordnung. — 16. Flächen vierter Ordnung. — 17. Flächen vom Maximalindex. — 18. Polygon als Kurve. Polyeder als Fläche.

Der Bericht schliesst mit einem Literaturverzeichnis. Dies macht aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es sei hier auf die von MONTEL, LINSMAN und insbesondere auf den Bericht von HAUPT [im Literaturverzeichnis Abhandlung (16a), (12a) bzw. (7a)] verwiesen. Im Bericht von HAUPT wurden auch solche Gesichtspunkte in Betracht gezogen, welche im gegenwärtigen Bericht ausser Acht gelassen wurden, wie z. B. die mengentheoretisch-topologische Verallgemeinerung der Ordnung und die Strukturfragen der allgemeinen krummen Gebilde.

Gyula (Julius) v. Sz. Nagy.

AZ ELLIPTIKUS, AZ EUKLIDESI ÉS A HIPERBOLIKUS GEOMETRIA SZÉTVÁLASZTÁSA.

Tartalom.

Bevezetés.

I. Az illeszkedés axiómái.

1. §. Axiomák.
2. §. Folyományok.

II. Az elválasztás axiómái.

3. §. Axiomák.
4. §. Két tétel.
5. §. Az elválasztás fogalma a sugársorban.
6. §. Az elválasztás fogalma a pontsorban.
7. §. Három tétel.
8. §. A lapszög, a szög és az egyenesrész fogalma.
9. §. A háromszögű síkrész.
10. §. Két egyenesrész hajlásszöge.

III. Az egybevágóság axiómái.

11. §. Axiomák.
12. §. Folyományok.
13. §. Egyenesrészek additivitása az egybevágósággal szemben.

IV. A metszési, a párhuzamossági és a nem-metszési axióma.

14. §. Egyenes metszése rajta kívüli ponton átmenő egyenesekkel.
15. §. A három különböző axióma.
16. §. A «között» fogalom a párhuzamossági vagy a nem-metszési axióma esetén.
17. §. Az egyenesdarab fogalma. Hilbert egybevágósági axiómáinak teljesülése.
18. §. Az egyenes zárt volta a metszési axióma esetén.

V. A folytonosság axiómája.

19. §. Axioma.
20. §. Az elliptikus, az euklidesi és a hiperbolikus geometria.

Bevezetés.

BOLYAI JÁNOS¹ az euklidesi geometria egyéb axiómáinak elfogadása mellett bebizonyította, hogy ha valamely e_0 egyenes és egy rajta kívüli P_0 pont síkjában P_0 -on át csak egy olyan egyenes fektethető, amely e_0 -t nem metszi, akkor ugyanaz bármely e egyenes és bármely rajta kívüli P pont esetében fennáll. Bizonyításában mélyen kihasználta a folytonosságot. R. BALDUS² és H. G. FORDER³ a HILBERT-féle I., II., III. axioma-csoportokat⁴ és a folytonosságból az ARCHIMEDES-féle axiómát használták fel az említett tétel bebizonyítására.⁵ (A P -n átmenő és e -t nem metsző egyenes létezése tudvalevőleg már következik az I., II. és III. axioma-csoportokból.) Végre J. HJELMSLEV⁶ tárgyalásaiból adódik a tételnek olyan bizonyítása, amely folytonossági axiómát egyáltalában nem használ fel.

Mind e bizonyítások lehetővé teszik az euklidesi és a hiperbolikus síkgeometriának *síkbeli* axiómák alapján való *szétválasztását*, vagyis annak kimutatását, hogy a síkban bizonyos axiómák elfogadása mellett vagy az egyik, vagy a másik geometriának fenn kell állania. A HJELMSLEV tárgyalásain alapuló szétválasztásnak nagy előnye, hogy a *folytonosságtól független*, de ez az előbbieknél persze bonyolultabb.

¹ JOHANNES BOLYAI DE EADEM: Appendix. Stientiam spatii absolute veram exhibens etc. Marosvásárhely, 1832., főkép 13. §. Magyarul I. STÄCKEL PÁL: Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai, ford. RADOS IGNÁC. Budapest, 1914. II. köt. 203. old., vagy Mat. és Fiz. Lapok VI. (1897) 157—158. old.

² R. BALDUS: Nichteuclidische Geometrie. Berlin und Leipzig, 1927 (Sammlung Göschel Nr. 970). 52—54. old.

³ H. G. FORDER: The Foundations of Euclidean Geometry. Cambridge, 1927. 307—308. old.

⁴ D. HILBERT: Grundlagen der Geometrie. 7. Aufl. Leipzig und Berlin, 1930.

⁵ Magyarul I. KERÉKJÁRTÓ BÉLA: A geometria alapjairól. I. köt. Szeged, 1937. 288—289. old.

⁶ J. HJELMSLEV: Neue Begründung der ebenen Geometrie. Mathematische Annalen 64 (1907), 449—474. old., főkép 1. §.

J. HJELMSLEV⁷ további tárgyalásai alapján ugyancsak-sikerül az elliptikus, az euklidesi és a hiperbolikus síkgeometriának síkbeli és a folytonosságtól független axiómák alapján való szétválasztása.

A három *térgeometria* szétválasztásának problémája természetesen sokkal egyszerűbben oldható meg. Mindazáltal azt hisszük, hogy pedagógiai szempontból nem felesleges és metodikai szempontból talán nem érdektelen, ha az alábbiakban bemutatjuk ennek az egyszerűbb problémának egy új megoldását. Ebben az axiómák közvetlenül az egész térre vonatkoznak, és a szétválasztás (az alábbi tétel bebizonyítása) szintén a folytonosság felhasználása nélkül történik.⁸

A HILBERT-féle illeszkedési axiómák mellett megfelelő rendezési (elválasztási) és egybevágósági axiómákat véve alapul (amelyek az egyenes nyílt vagy zárt voltának feltevésétől függetlenek), be lesz bizonyítható az ismert⁹ következő általános tétel:

Valamely e egyenes és egy rajta kívüli P pont síkjában a P-n átmenő egyenesek közül e-t vagy mindegyik metszi, vagy egy és csak egy nem metszi, vagy pedig több nem metszi, a szerint, hogy melyik eset áll fenn egyetlen e_0 egyenes és egyetlen rajta kívüli P_0 pontra vonatkozólag.

Az első, a második, illetőleg a harmadik eset bekövetkezését kifejező további axiómát rendre *metszési*, *párhuzamossági*, illetőleg *nem-metszési axiómának* fogjuk nevezni. A párhuzamossági vagy a nem-metszési axióma esetén fennállanak — megfelelő értelmezések mellett — a HILBERT-féle rendezési és egybevágósági axiómák. Ha a folytonosság axiómáját is elfogadjuk, akkor az axióma-rendszer teljessé válik s rendre az *elliptikus*, az *euklidesi*, illetőleg a *hiperbolikus*, azaz BOLYAI—LOBACSEVSKIJ-féle geometriát jellemzi, a szerint,

⁷ J. HJELMSLEV: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. Mathematisk-fysiske Meddelelser 8, Nr. 11; 10, Nr. 1 (København, 1929).

⁸ Más megoldást nyújt pl. J. L. COOLIDGE: The Elements of Non-Euclidean Geometry. Oxford, 1909.

⁹ V. Ö. F. ENRIQUES: Prinzipien der Geometrie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III. A B. 1., főkép 43. old.

amint a metszési, a párhuzamossági vagy a nem-metszési axiómát tesszük fel a többiek mellett. (Az alábbi II_5 . axiómát csak a párhuzamossági és a nem-metszési axióma elfogadása esetén kell külön feltenni.)

I. Az illeszkedés axiómái.

1. §. A *pont*, az *egyenes* és a *sík*, valamint a pont és egyenes, illetőleg a pont és sík *illeszkedése* fogalmát (amit másképp úgy fejezünk ki, hogy a pont az egyenesen, ill. a síkon *rajta van* stb.) adottnak tekintjük. Ezekre vonatkozólag feltesszük az alábbi axiómákat.¹⁰

I_1 . Minden egyenesen van legalább két pont.

I_2 . Bármely két ponton át fektethető egy és csak egy egyenes.

I_3 . Van legalább három olyan pont, amelyek nincsenek ugyanazon egyenesen.

I_4 . Bármely három, nem egy egyenesen fekvő ponton át, fektethető egy és csak egy sík.

I_5 . Minden síkon van legalább egy pont.

I_6 . Ha az egyenes átmegy a sík két pontján, akkor minden pontja rajta van a síkon. (Ekkor azt mondjuk: az egyenes a síkon *rajta van* stb.)

I_7 . Ha két síknak van közös pontja, akkor azoknak van még egy közös pontja.

I_8 . Van legalább négy, nem egy síkon fekvő pont.

2. §. Az I_3 . axiómából folyólag minden egyeneshez található rajta kívüli pont s az I_1 ., I_4 ., I_6 . axiómákból következik, hogy *valamely e egyenesen és egy rajta kívüli P ponton át egy és csak egy sík fektethető*. E síkot így jelöljük: (e, P) .

Az I_3 . és I_2 . axiómák alapján bármely pont legalább két egyenesnek közös pontja s az I_1 ., I_2 ., I_4 ., I_6 . axiómákból folyik, miszerint *két egymást metsző egyenesen át egy és csak egy sík fektethető*. Az e és f egyeneseken átmenő síkot így jelöljük: (e, f) .

Az I_7 . I_2 ., I_6 ., I_4 . axiómákból folyólag *az ugyanazon ponton*

¹⁰ D. HILBERT,⁴ 3—4. old. Itt az axiómák számozása más.

átmenő α és β síkok egymást egyenesben metszik. Ez egyenest így jelöljük: (α, β) .

Az $I_1.$, $I_3.$, $I_4.$, $I_8.$, $I_6.$ axiomákból következik, hogy bármely egyenesen át fektethető két különböző sík. Ennek alapján az $I_5.$, $I_8.$, $I_2.$, $I_7.$, $I_6.$, $I_4.$ axiomákból folyik, miszerint minden síkon van három, nem egy egyenesben fekvő pont.

Az $I_3.$, $I_4.$, $I_8.$, $I_2.$, $I_6.$ axiomákból pedig következik, miszerint minden ponton át fektethető három olyan sík, amelyek nem mennek át ugyanazon az egyenesen.

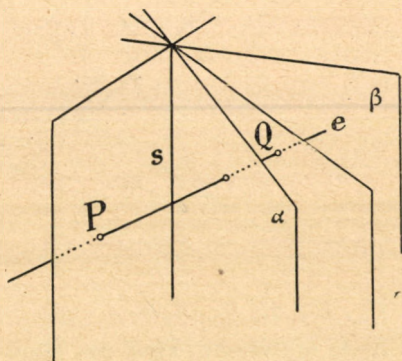
II. Az elválasztás axiomái.

3. §. Legyenek α , β , γ , δ ugyanazon egyenesen átmenő síkok. Ezeknek bizonyos vonatkozását így fejezzük ki: az α , β síkokat elválasztják a γ , δ síkok.

E fogalmat adottnak tekintjük és feltesszük az alábbi axiomákat,¹¹ ahol is $\alpha, \beta | \gamma, \delta$, ill. $\alpha, \beta \times \gamma, \delta$ azt jelenti, hogy az α , β síkokat elválasztják, ill. nem választják el a γ , δ síkok. (Az α és β , ill. γ és δ sorrendje nem jön tekintetbe.)

II₁. Ha α és β egymást az s egyenesben metsző síkok és egyikük az e egyenest valamely s -en kívüli pontban metszi, akkor az e egyenesen van olyan P és Q pont, hogy $\alpha, \beta | (s, P)$, (s, Q) (1. ábra).

II₂. Ha $\alpha, \beta | \gamma, \delta$, akkor e síkok mind különbözők s egyszersmind $\gamma, \delta | \alpha, \beta$.



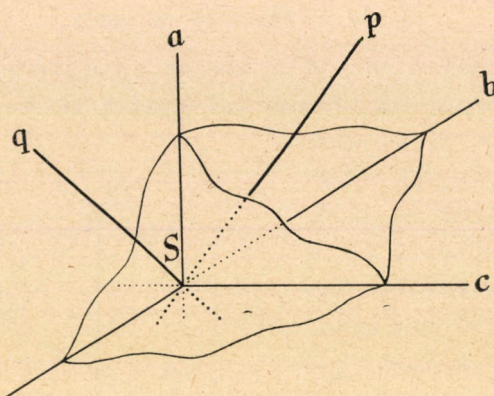
1. ábra.

¹¹ V. Ö. WEBER—WELLSTEIN: Encyklopädie der Elementar-Mathematik II., 3. Aufl. Leipzig und Berlin, 1915. 153—154. old., ahol is a projektív geometriának a pontpárok elválasztására vonatkozó megfelelő axiomái vannak felsorolva.

Π_3 . Ha $a, \beta \mid \gamma, \delta$, akkor $a, \gamma \times \beta, \delta$ és $a, \delta \times \beta, \gamma$.

Π_4 . Legyenek $(a, b), (b, c), (c, a)$ az S ponton átmenő síkok, amelyek nem metszik egymást ugyanazon egyenesben, p és q pedig az S -en átmenő oly egyenesek, amelyek nem fekszenek e síkok egyikén sem.¹² Ha $(a, b), (a, c) \mid (a, p), (a, q)$, akkor vagy $(b, a), (b, c) \times (b, p), (b, q)$ viszont $(c, a), (c, b) \mid (c, p), (c, q)$, vagy fordítva (2. ábra).

Ez axiómában az a szemléleti megállapítás nyer kifejezést, hogy az $(a, b), (b, c), (c, a)$ síkok az S ponton átmenő egyenesek halmozát négy részre (háromélű térszögre) osztják, amelyek közül kettő-kettő e síkok közti hat lapszögből egyet-egyet tesz ki.



2. ábra.

Π_5 . Ha A_1, A_2, A_3 nem egy egyenesen fekvő pontok, ezek síkjában az $A_i A_k$ egyeneseken kívül van olyan P pont, hogy ha Q e síkon kívüli pont, $i=1, 2, 3$ -ra az $A_i Q$ egyenesen átmenő minden σ sík, amelyre $A_i Q A_k, A_i Q A_l \times A_i Q P, \sigma$ (tehát maga $A_i Q P$ is), metszi az $A_k A_l$ egyenest (3. ábra).

Megjegyzendő, e Π_5 . axióma az alábbi IV. metszési axióma mellett felesleges.

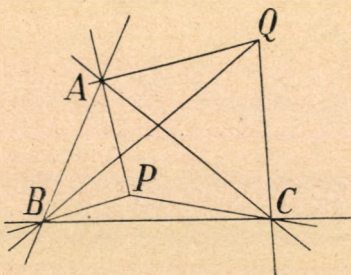
4. §. Érvényesek a következő tételek:

1. tétel. Ha $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ ugyanazon egyenesen átmenő különböző síkok, akkor a λ, μ síkokat az $\alpha, \beta; \beta, \gamma; \gamma, \alpha$ sík-párok közül vagy kettő választja el, vagy egy sem.

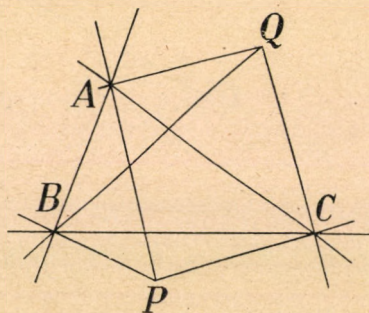
¹² Ilyenek létezése a Π_1 . axiómából következik (2. §.).

1. tétel. Ha a és b egymást az S pontban metsző egyenesek s egyikük az ugyanazon síkban fekvő e egyenest valamely S -től különböző pontban metszi, akkor az e egyenesen van olyan P és Q pont, hogy $a, b \mid SP, SQ$ (4. ábra).

2. tétel. Ha $a, b \mid c, d$, akkor ez egyenesek mind különbözők s egyszersmind $c, d \mid a, b$.



5a. ábra.

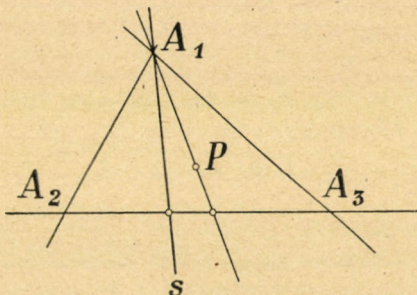


5b. ábra.

3. tétel. Ha $a, b \mid c, d$, akkor $a, c \times b, d$ és $a, d \times b, c$.

4. tétel. Legyenek A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, P és Q pedig olyan pontok ezek síkjában, amelyek nem fekszenek az AB, BC, CA egyenesek egyikén sem. Ha $AB, AC \mid AP, AQ$, akkor vagy $BA, BC \times BP, BQ$, viszont $CA, CB \mid CP, CQ$, vagy fordítva (5a., 5b. ábra).

5. tétel. Ha A_1, A_2, A_3 nem egy egyenesen fekvő pontok, ezek síkjában az $A_i A_k$ egyeneseken kívül van olyan P pont, hogy $i=1, 2, 3$ -ra az A_i -n átmenő minden s egyenes, amelyre $A_i A_k, A_i A_l \times A_i P$, s (tehát maga $A_i P$ is), metszi az $A_k A_l$ egyenest (6. ábra).



6. ábra.

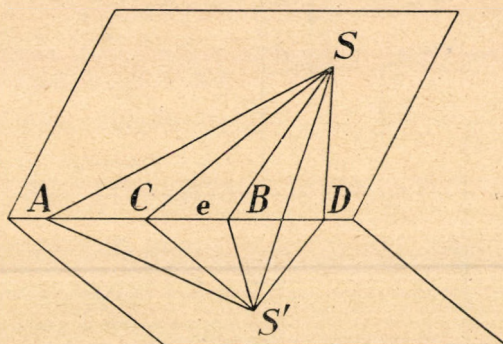
6. §. Tétel. Legyenek A, B, C, D az e egyenesen fekvő pontok, S és S' pedig ezen kívüli pontok. Ha $SA, SB \mid SC, SD$, akkor egyszersmind $S'A, S'B \mid S'C, S'D$.

Bizonyítás. Ha az (e, S)

és (e, S') síkok különbözők (7. ábra), akkor az SS' egyenesen és rendre a A, B, C, D pontokon átmenő síkokra a feltevés szerint $SS'A, SS'B \mid SS'C, SS'D$. Ennélfogva $S'A, S'B \mid S'C, S'D$.

Tegyük fel most, hogy az (e, S) , és (e, S') síkok összeesnek. Akkor egy ezen kívüli S'' pontot választván, az előbbiek szerint $S''A, S''B \mid S''C, S''D$. Ebből pedig épen úgy következik, hogy $S'A, S'B \mid S'C, S'D$. Qu. e. d.

E tétel alapján az elválasztás fogalmát átvihetjük a sugársorról a pontsorra: az e egyenesen fekvő A, B, C, D pontokról azt mondjuk,



7. ábra.

hogy az A, B pontokat elválasztják a C, D pontok, jelben $A, B \mid C, D$, ha valamely e -n kívüli S pontra $SA, SB \mid SC, SD$.

7. §. Minthogy két egymást metsző sík mindig elválasztható (II₁. ax.), a 4. §. 1. tételéből folyik a következő

1. tétel. Ha α, β, γ egy egyenesen átmenő különböző síkok, akkor van oly δ sík, amelyre $\alpha, \beta \mid \gamma, \delta$.

2. tétel. Ugyanazon egyenesen átmenő négy különböző sík kettejét a másik kettő elválasztja.

Bizonyítás.¹⁵ Legyenek e síkok $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ s tegyük fel, hogy

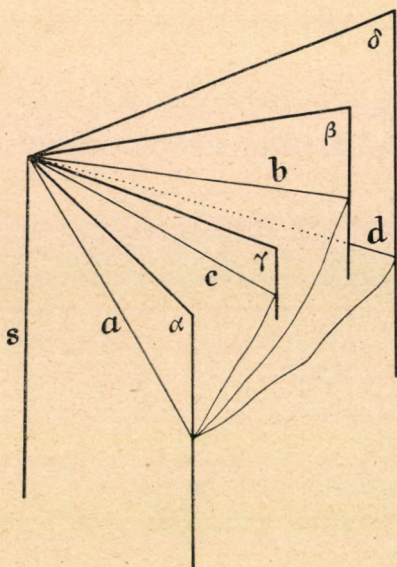
$$\alpha, \gamma \times \beta, \delta \quad (1)$$

és

$$\alpha, \delta \times \beta, \gamma. \quad (2)$$

¹⁵ V. ö. K. FREUDENTHAL,¹⁴ 12—13. old., ahol is az egyenespárok elválasztására vonatkozó megfelelő tétel van bebizonyítva.

Messzük e síkok s metszésvonalát valamely síkkal, amely a -t az a , β -t a b egyenesben metszi (8. ábra). Azután fektessünk a -n át két olyan síkot, amelyek az a és (a, b) síkokat elválasztják (Π_1 . ax.), s messe ezek egyike a γ síkot c -ben, másika pedig a δ síkot d -ben.



8. ábra.

Ekkor a szerkesztés szerint

$$a, (a, b) \mid (a, c), (a, d), \quad (3)$$

tehát (Π_3 . ax.)

$$a, (a, c) \times (a, b), (a, d) \quad (4)$$

és

$$a, (a, d) \times (a, b), (a, c). \quad (5)$$

A b, d egyeneseknek az a, c, s egyenesekhez viszonyított helyzetét tekintve, (1)- és (4)-ből folyólag (Π_4 . ax.)

$$\gamma, (c, a) \times (c, b), (c, d). \quad (6)$$

A b, c egyeneseknek az a, d, s egyenesekhez viszonyított helyzetét tekintve pedig (2)- és (5)-ből (Π_4 . ax.)

$$\delta, (d, a) \times (d, b), (d, c). \quad (7)$$

Ha mármost b, c, d nincsenek egy síkban, akkor az a, s egyeneseknek e b, c, d egyenesekhez viszonyított helyzetére (6)- és (7)-ből (Π_2 ., Π_4 . ax.)

$$(b, c), (b, d) \times (b, a), \beta, \quad (8)$$

s a c, d egyeneseknek az a, b, s egyenesekhez viszonyított helyzetére (3)- és (8)-ból (Π_2 ., Π_4 . ax.) $\alpha, \beta \mid \gamma, \delta$. Ha viszont b, c, d egy síkban vannak, akkor (b, c) és (b, d) összeesvén (Π_2 . ax.)

$$\beta, (b, a) \times (b, c), (b, d) \quad (9)$$

s a c, d egyeneseknek az a, b, s egyenesekhez viszonyított helyzetére (3)- és (9)-ből (Π_4 . ax.) ismét $\alpha, \beta \mid \gamma, \delta$. Qu. e. d.

3. tétel. Ha a $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ síkokra $\lambda, \alpha \mid \mu, \beta$ és $\lambda, \beta \mid \mu, \gamma$, akkor $\lambda, \alpha \mid \mu, \gamma$.

Ez a Π_3 . axioma alapján könnyen adódik a 4. §. 1. tételéből.

8. §. Tétel. Legyenek λ és μ egymást az s egyenesben metsző síkok. Akkor az s -en átemnő többi sík két meghatározott osztályba sorozható úgy, hogy

1^o ha a és a' egy osztályban vannak, akkor $\lambda, \mu \times a, a'$;

2^o ha a az egyik és β a másik osztályban van, akkor $\lambda, \mu \mid a, \beta$;

3^o ha a és a' az egyik, β és β' a másik osztályban van, akkor

$a, a' \times \beta, \beta'$.

És mindkét osztályban végtelen sok sík van.

Ez a 4. §. 1., és a 7. §. 1., 2., 3. tétele alapján nehézség nélkül belátható.

Az egyenespárookra vonatkozó hasonló tétel ennek nyilván folyománya (5. §.). A pontpárookra vonatkozó duál tétel pedig ugyanúgy bizonyítható be, az idézett tételek duáljai alapján (6. §.).

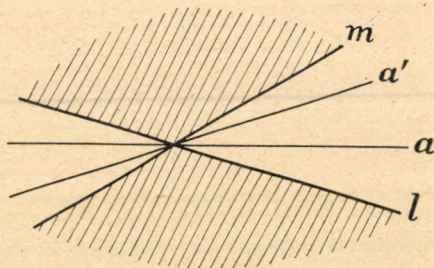
A λ és μ síkok által a fenti tétel szerint meghatározott síkosztályok mindegyikét, a λ és μ síkokat is hozzászámítva, *lapszögnek* nevezzük és így jelöljük:

$(\lambda, \mu) \angle$. Hasonlóan definiálható az egymást metsző l és m egyenesek által meghatározott két szög (9. ábra), amelyek mindegyikét így jelöljük:

$(l, m) \angle$. Ezek egymás *mellékszögei*. Ugyancsak hasonlóan definiálhatjuk az L és M pontok meghatározta két egyenesrész (10. ábra), amelyek mindegyikét így jelöljük:

\overline{LM} .

Valamely $(\lambda, \mu) \angle$ lapszög közbülső a, a' síkjairól azt mondjuk, hogy λ -tól μ felé a megelőzi a' -t vagy a' követi a -t, ha $\lambda, a' \mid a, \mu$. Hasonlóképp definiáljuk a szög és az egyenesrész irányítását (9., 10. ábra).

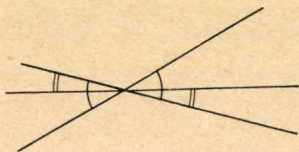


9. ábra.



10. ábra.

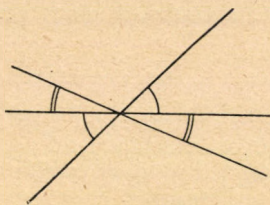
Ugyanabban a síkban fekvő két szöget, amelyeknek közös csúcsa és egy közös szára van, akkor mondunk *egyenlő fekvésűnek*,



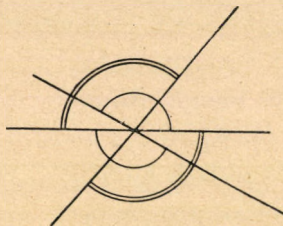
11. ábra.

ha egyik a másikonak része (11. ábra), különben pedig *ellenkező fekvésű* szögekről beszélünk (12a., 12b. ábra). Hasonlóan definiáljuk az *egyenlő és ellenkező fekvésű egyenesrészek* fogalmát.

Könnyen belátható, miszerint *adva lévén a síkban az S pont és a rajta átmenő l egyenes, mindazok a szögek, amelyeknek csúcsa S és egyik szára l , két csoportra oszlanak úgy, hogy különböző csoportba*



12a. ábra.



12b. ábra.

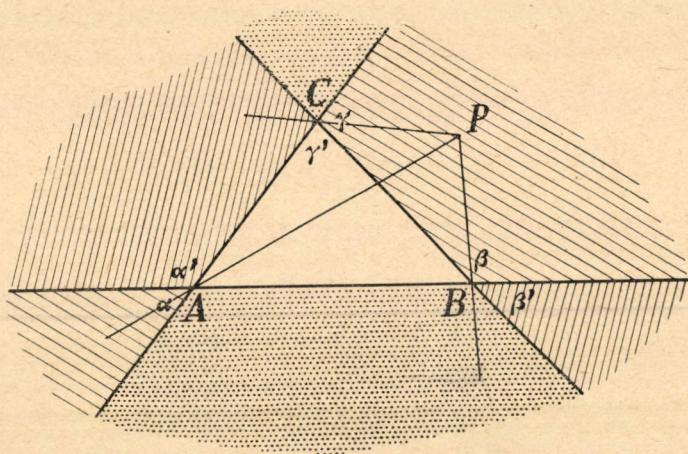
tartozók ellenkező, egy csoportba tartozók viszont egyenlő fekvésűek. Természetesen hasonló tétel áll fenn az egyenesrészekre vonatkozólag.

9. §. Legyenek A , B , C nem egy egyenesen fekvő pontok s P olyan pont ezek síkjában, amely nem esik az AB , BC , CA egyenesek egyikére sem. Ez egyenesek által meghatározott hat szög közül legyenek az AP , BP , CP egyeneseket tartalmazók rendre α , β , γ , ezek mellékszögei pedig α' , β' , γ' . Az 5. §. 4. tétele értelmében a síknak az AB , BC , CA egyeneseken kívüli bármely pontja vagy az α , β , γ , vagy az α , β' , γ' , vagy az α' , β , γ' , vagy pedig az α' , β' , γ szögeknek közös pontja, és az 5. § 1. tételéből következik, hogy mind a négy szögcsoportnak van közös belső pontja (13. ábra).

Egy-egy ilyen szögcsoport közös pontjainak összességét *háromszögű síkrésznek* nevezzük. Az A , B , C pontok e négy háromszögű síkrész *szögpontjai*, egy-egy szögcsoport tagjai a megfelelő három-

szögű síkrész *szögei*, az ezek által tartalmazott \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} egyenesrészek az *oldalai*, mindegyik oldal az őt tartalmazó szöggel *szemben* fekszik és fordítva.

Minthogy a szóbanforgó szögek közül bármelyik kettő, amelyek nem mellékszögek, meghatározza azt a harmadikat, amely velük a fenti szög-csoportok egyikét alkotja, két-két ilyen szöghöz meghatározott háromszögű síkrész tartozik, amelynek ezek két szögét alkotják.



13. ábra.

10. §. Ha \overline{AB} és \overline{AC} nem egy egyenesen fekvő egyenesrészek, ezek *hajlásszögének* azon ABC háromszögű síkrész harmadik szögét nevezzük, amelynek két szöge az \overline{AB} -t tartalmazó (CA, CB) \angle és az \overline{AC} -t tartalmazó (BA, BC) \angle szög (9. §.). E szöget így jelöljük: $BAC \angle$. (E jelölésnek csak akkor van határozott értelme, ha az \overline{AB} és \overline{AC} egyenesrészek meg vannak adva.)

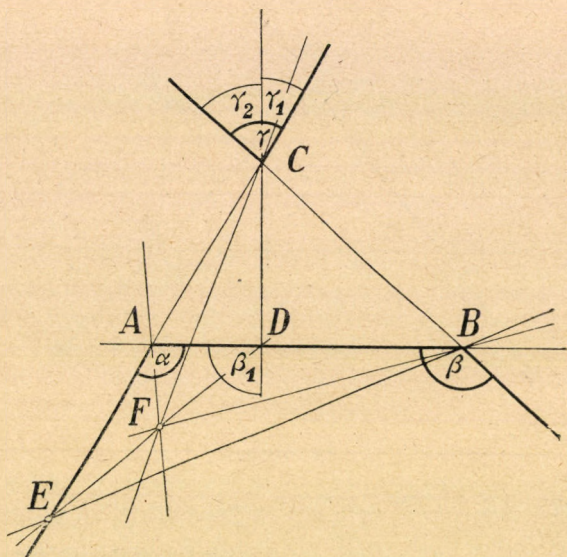
Megmutatjuk, hogy ha \overline{AD} az \overline{AB} -vel *egyenlő fekvésű egyenesrész*, akkor $DAC \angle$ azonos a $BAC \angle$ szöggel.

Bizonyítás. Feltelhetjük, hogy \overline{AD} az \overline{AB} -nek része, vagyis D az \overline{AB} egyenesrész közbülső pontja, amely azt az \overline{AD} és \overline{DB} részekre osztja.

Legyenek a szóbanforgó ABC háromszögű síkrész A, B, C csúcsú

szögei rendre α , β , γ (14. ábra) s legyen γ -nak az \overline{AD} -t, ill. \overline{DB} -t tartalmazó része γ_1 , ill. γ_2 . Jelöljük β_1 -gyel annak az ADC háromszögű síkrésznek D csúcsú szögét, amelynek másik két szöge α és γ_1 ; a tétel be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy az \overline{AC} egyenesrész tartalmazó $(DA, DC) \sphericalangle$ szög éppen ez a β_1 .

Az 5. §. 1. tétele szerint az AC egyenesen van olyan E pont, hogy DE a β_1 szögnek közbülső egyenese. Ugyanazon tétel értelmében a DE egyenesen van olyan F pont, hogy CF a γ_1 szögnek



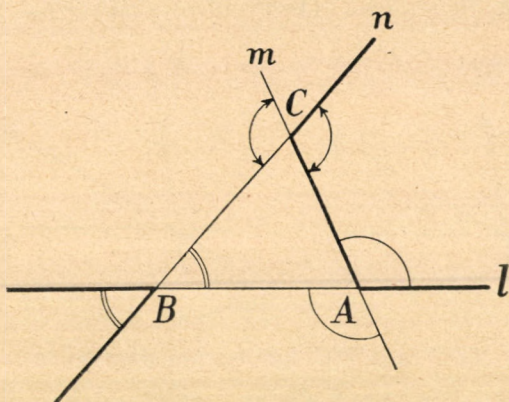
14. ábra.

közbülső egyenese. Minthogy γ_1 jelentése folytán CF a γ_2 mellékszögehez, vagyis a CE -t tartalmazó $(CB, CD) \sphericalangle$ szöghöz tartozik, azért $CD, CB \times CE, CF$. S mivel a DE, DF egyenesek összeesvén $DB, DC \times DE, DF$, az 5. §. 4. tétele szerint $BC, BD \times BE, BF$. De F a szerkesztés értelmében a β_1 és γ_1 szögek közös belső pontja lévén, a β_1 jelentése folytán α -nak is belső pontja, tehát α -nak és γ -nak s ennél fogva β -nak is belső pontja, vagyis BF a β szögnek közbülső egyenese. Így pedig az előbbiből következik, miszerint BE is a β szögnek közbülső egyenese, vagyis E az \overline{AC} egyenesrész közbülső

pontja. Mivel pedig E választása folytán DE a β_1 szögnek közbülső egyenese, ezzel kimutattuk, hogy az \overline{AC} -t tartalmazó $(DA, DC) \sphericalangle$ szög β_1 -gyel azonos. Qu. e. d.

Megmutatjuk továbbá, miszerint az A csúcsú $(l, m) \sphericalangle$ szög l szárán felvén valamely \overline{AB} egyenesrészt, ehhez az m száron található oly \overline{AC} egyenesrész, hogy $BAC \sphericalangle$ ez $(l, m) \sphericalangle$ szöggel azonos.

Bizonyítás. Válasszunk m -en egy az A -tól különböző C pontot s tekintsük az \overline{AB} egyenesrészt tartalmazó C csúcsú $(m, n) \sphericalangle$



15. ábra.

szöget (15. ábra). Ha mármost az $(l, m) \sphericalangle$ és $(m, n) \sphericalangle$ szögek által meghatározott ABC háromszögű síkrészben a B csúcsú $(l, n) \sphericalangle$ szöggel szemben levő oldal \overline{AC} , akkor a $BAC \sphericalangle$ szög éppen az $(l, m) \sphericalangle$. Qu. e. d.

III. Az egybevágóság axiomái.

11. §. Az $(a, b) \sphericalangle$ és $(a', b') \sphericalangle$ szögek, ill. az \overline{AB} és $\overline{A'B'}$ egyenesrészek bizonyos vonatkozását így fejezzük ki: $(a, b) \sphericalangle$ szög egybevágó az $(a', b') \sphericalangle$ szöggel, ill. \overline{AB} egyenesrész egybevágó az $\overline{A'B'}$ egyenesrésszel, jelben $(a, b) \sphericalangle \equiv (a', b') \sphericalangle$, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. E fogalmakat adottaknak tekintjük és feltesszük a következő axiomákat.

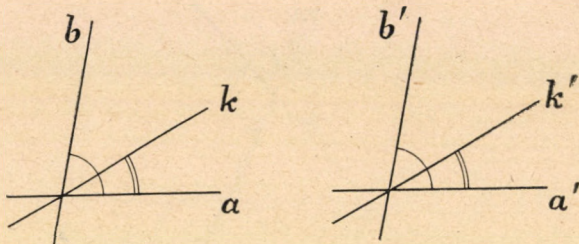
III₁. Adva lévén az $(a, b) \sphericalangle$ szög, bármely $(a', c') \sphericalangle$ szög

ható egy és csak egy vele egyenlő fekvésű (a', b') ∇ , amelyre $(a, b) \nabla \equiv (a', b') \nabla$.

III₂. Minden szög egybevágó önmagával.

III₃. Ha $(a, b) \nabla \equiv (a', b') \nabla$ és $(a', b') \nabla \equiv (a'', b'') \nabla$, akkor $(a, b) \nabla \equiv (a'', b'') \nabla$.

III₄. Ha $(a, b) \nabla \equiv (a', b') \nabla$ és k közbülső egyenese az $(a, b) \nabla$ szögnek s az ezzel egyenlő fekvésű $(a, k) \nabla$ szögre $(a, k) \nabla \equiv (a', k') \nabla$, ahol $(a', k') \nabla$ az $(a', b') \nabla$ -vel egyenlő fekvésű, akkor k' közbülső egyenese $(a', b') \nabla$ -nek, és az $(a, b) \nabla$, ill. $(a', b') \nabla$ -vel egyenlő fekvésű $(b, k) \nabla$, ill. $(b', k') \nabla$ szögekre $(b, k) \nabla \equiv (b', k') \nabla$ (16. ábra).



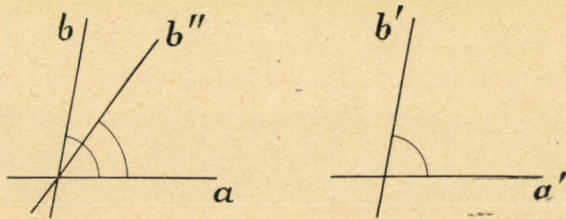
16. ábra.

III₅. Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögű síkrészekben $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ és $BAC \nabla \equiv B'A'C' \nabla$, akkor $ABC \nabla \equiv A'B'C' \nabla$, $ACB \nabla \equiv A'C'B' \nabla$.

III₆. Adva lévén az \overline{AB} egyenesrész, bármely $\overline{A'C'}$ egyenesrészhez található oly vele egyenlő fekvésű $\overline{A'B'}$, amelyre $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

III₇. Ha $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ és $\overline{A''B''} = \overline{AB}$, akkor $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$.

12. §. A III₁., III₂., III₃. axiómákból következik, hogy ha $(a, b) \nabla \equiv (a', b') \nabla$, akkor fordítva $(a', b') \nabla \equiv (a, b) \nabla$. Legyen ugyanis (17. ábra) $(a', b') \nabla \equiv (a, b'') \nabla$, ahol az utóbbi az $(a, b) \nabla$



17. ábra.

szöggel egyenlő fekvésű (III₁. ax.). Akkor a feltevés alapján egyszerűsítve $(a, b) \simeq (a, b'') \simeq (a, b')$ (III₃. ax.). De mivel másrészt $(a, b) \simeq (a, b) \simeq (a, b')$ (III₂. ax.), azért az $(a, b'') \simeq (a, b)$ összeesik (a, b) -vel (III₁. ax.), tehát valóban $(a', b') \simeq (a, b)$. E szerint a szögek egybevágósága nemcsak *identikus* és *transzitiv* (III₂., III₃. ax.), hanem *szimmetrikus* vonatkozás is.

A III₆. és III₇. axiómák alapján egymás után adódik,¹⁶ miszerint $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$, továbbá ha $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, akkor $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$, és ha $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$ akkor $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$. Tehát az egyenesrészek egybevágósága is *identikus*, *szimmetrikus* és *transzitiv* vonatkozás.

A 10. §-ban mondottakra tekintettel a III₁., III₂. és III₅. axiómák alapján könnyen belátható most már,¹⁷ hogy ha $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ és $\overline{AB} \equiv \overline{A'B''}$, ahol $\overline{A'B'}$ és $\overline{A'B''}$ egyenlő fekvésűek, akkor $\overline{A'B'}$ összeesik $\overline{A'B''}$ -vel. Vagyis az egyenesrész átrakása egyértelmű, mint a szögé (III₁. ax.). A III₁., III₅. és III₆. axiómákból pedig következik,¹⁸ hogy ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögű síkrészekben $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ és $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$, akkor $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.

13. §. Tétel. Ha $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ és K közbülső pontja az \overline{AB} egyenesrésznek s az ezzel egyenlő fekvésű \overline{AK} egyenesrészre $\overline{AK} \equiv \overline{A'K'}$, ahol $\overline{A'K'}$ az $\overline{A'B'}$ -vel egyenlő fekvésű, akkor K' közbülső pontja $\overline{A'B'}$ -nek és az \overline{AB} , ill. $\overline{A'B'}$ -vel egyenlő fekvésű \overline{BK} , ill. $\overline{B'K'}$ egyenesrészekre $\overline{BK} \equiv \overline{B'K'}$.

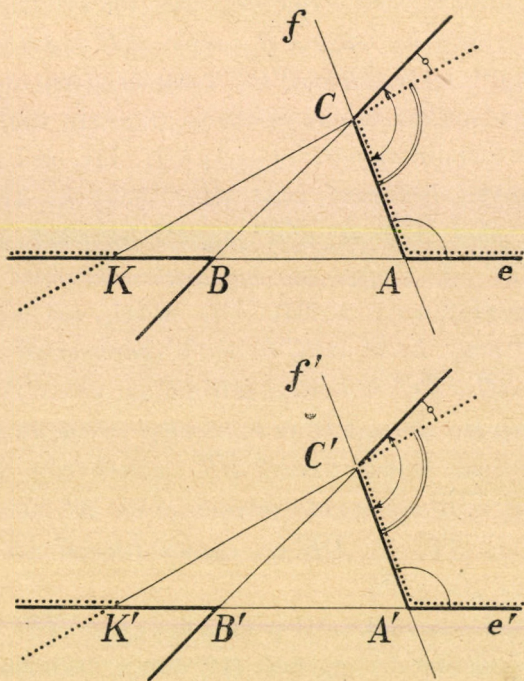
Bizonyítás. Fektessünk az A ponton át egy az \overline{AB} -t tartalmazó e egyenestől különböző f egyenest (18. ábra). Tekintsük az egyik $(e, f) \simeq$ szöget s legyen az $\overline{A'B'}$ -t tartalmazó e' egyenes mellé az A' pontnál felrakva $(e, f) \simeq (e', f')$ (III₁. ax.). Vegyünk fel f -en egy az A -tól különböző C pontot, tekintsük azt az \overline{AC} egyenesrészt, amelyre a $\angle CAB \simeq$ szög azonos az $(e, f) \simeq$ szöggel (10. §.) s legyen f' -re A' -ből felrakva $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ (III₆. ax.), úgy, hogy $C' A' B' \simeq$ azonos legyen az (e', f') -vel. Akkor a megfelelő CAB és

¹⁶ V. ö. D. HILBERT,⁴ 11—12. old.

¹⁷ V. ö. D. HILBERT,⁴ 15. old.

¹⁸ V. ö. D. HILBERT,⁴ 16. old.

$C'A'B'$, ill. a CAK és $C'A'K'$ háromszögű síkrészekben $ACB \sphericalangle \equiv A'C'B' \sphericalangle$ és $ACK \sphericalangle \equiv A'C'K' \sphericalangle$ (III₅. §.). Minthogy pedig a feltevésből folyólag CK az $ACB \sphericalangle$ szögnek közbülső egyenese és $ACB \sphericalangle$ az $ACK \sphericalangle$ -val, valamint $A'C'B' \sphericalangle$ az $A'C'K' \sphericalangle$ -vel egyenlő fekvésű, azért (III₄. ax.) $C'K'$ az $A'C'B' \sphericalangle$ szögnek közbülső egyenese, vagyis K' az $A'B'$ egyenesrésznek



18. ábra.

közbülső pontja, továbbá az $ACB \sphericalangle$, ill. $A'C'B' \sphericalangle$ -vel egyenlő fekvésű $BCK \sphericalangle$ és $B'C'K' \sphericalangle$ szögekre $BCK \sphericalangle \equiv B'C'K' \sphericalangle$. Mivel még a CAB és $C'A'B'$, ill. CAK és $C'A'K'$ háromszögű síkrészekben $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$ és $\overline{CK} \equiv \overline{C'K'}$ (12. §.), azért az \overline{AB} , ill. $\overline{A'B'}$ -vel egyenlő fekvésű \overline{BK} és $\overline{B'K'}$ egyenesrészekre ugyanazon tétel értelmében $\overline{BK} \equiv \overline{B'K'}$. Qu. e. d.

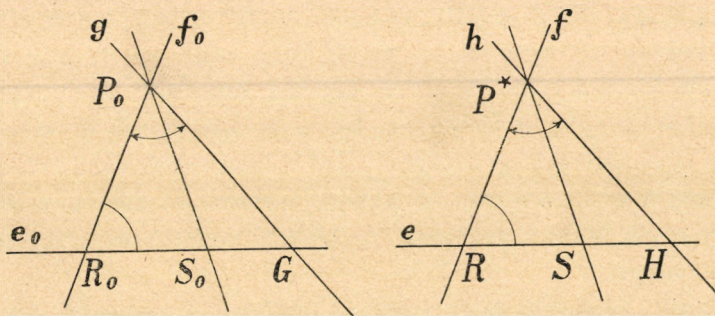
Tekintettel az egyenesrész átrakásának egyértelműségére (12. §.), e tételből folyik, hogy ha \overline{KA} és \overline{KB} ellenkező fekvésű oly egyenes-

részek, amelyeknek K -tól különböző közös pontja nincsen s $\overline{K'A'}$ és $\overline{K'B'}$ ellenkező fekvésű olyan egyenesrészek, amelyekre $\overline{KA} \equiv \overline{K'A'}$ és $\overline{KB} \equiv \overline{K'B'}$, akkor ezeknek K' -től különböző közös pontja nincsen, továbbá a K -t, ill. K' -t tartalmazó \overline{AB} és $\overline{A'B'}$ egyenesrészekre $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

IV. A metszési, a párhuzamossági és a nem-metszési axioma.

14. §. Megmutatjuk, miszerint valamely e egyenes és egy rajta kívüli P pont síkjában a P -n átmenő egyenesek közül e -t vagy mind-egyik metszi, vagy egy és csak egy nem metszi, vagy pedig több nem metszi, a szerint, hogy melyik eset áll fenn, egyetlen e_0 egyenes és egyetlen rajta kívüli P_0 pontra vonatkozólag.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, miszerint az (e_0, P_0) síkban P_0 -on átmenő egyenesek s az e egyenes és bizonyos rajta kívüli



19. ábra.

P^* pont síkjában P^* -on átmenő egyenesek között olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozás létesíthető, hogy e_0 -t metsző egyenesnek e -t metsző felel meg és fordítva.

Vegyük fel e végből az e_0 egyenesen az R_0 és S_0 pontokat (19. ábra) s tekintsük az egyik $\overline{R_0P_0}$ és az egyik $\overline{R_0S_0}$ egyenesrészt, továbbá az ezek $P_0R_0S_0 \not\equiv$ hajlásszögével azonos $(e_0, f_0) \not\equiv$ szöget (10. §.). Legyen egy az e egyenesen átmenő síkban az e valamely R pontjánál e mellé felrakva $(e_0, f_0) \not\equiv (e, f) \not\equiv$ (III₁. ax.) és f -re R -ből felrakva $\overline{R_0P_0} \equiv \overline{RP^*}$ (III₆. ex.) s válasszuk e -n az \overline{RS} egyenesrészt

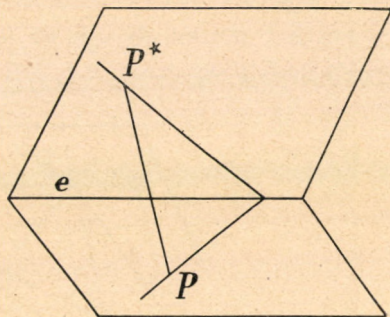
úgy, hogy $P^*RS \not\sim$ az $(e, f) \not\sim$ szög legyen (10. §.). Az (e_0, P_0) síkban P_0 -on át valamely g egyenest fektetvén, tekintsük azt az $(f_0, g) \not\sim$ szöget, amely az $\overline{R_0S_0}$ -t tartalmazó $R_0P_0S_0 \not\sim$ szöggel egyenlő fekvésű (8. §.) s legyen az (e, P^*) síkban f mellé P^* -nál az \overline{RS} -et tartalmazó $RP^*S \not\sim$ szöggel egyenlő fekvésben felrakva $(f_0, g) \not\sim \equiv (f, h) \not\sim$ (III₁. ax.). Minthogy a szögek egybevágósága szimmetrikus vonatkozás (12. §.), a III₁. axiómából következik, miszerint az (e_0, P_0) síkban P_0 -on átmenő g egyenesek az (e, P^*) síkban P^* -on átmenő h egyenesekkel ily módon kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban vannak. Tegyük fel mármost, hogy g metszi e_0 -t valamely G pontban. Akkor tekintsük az $\overline{R_0S_0}$ -lal egyenlő fekvésű $\overline{R_0G}$ egyenesrészt, amelyet tehát az előbbi $(f_0, g) \not\sim$ szög tartalmaz (8. §.), és legyen R -ből e -re az \overline{RS} -sel egyenlő fekvésben felrakva $\overline{R_0G} \equiv \overline{RH}$ (III₆. ax.). Minthogy $P_0R_0G \not\sim$ azonos a $P_0R_0S_0 \not\sim$, a $P^*RH \not\sim$ pedig a $P^*RS \not\sim$ szöggel (10. §.), a szerkesztésből folyólag $(f_0, g) \not\sim \equiv RP^*H \not\sim$ (III₅. ax.), ahol is $\overline{HP^*}$ az $(e, f) \not\sim$ szög által tartalmazot egyenesrész. De ez $RP^*H \not\sim$ szög az $(f, h) \not\sim$ -val egyenlő fekvésű lévén, a P^*H egyenes összeesik h -val (III₁. ax.), következésképp h metszi e -t. Ugyanígy következik (a szögek és az egyenesrészek egybevágóságának szimmetrikus volta (12. §.) folytán), hogy ha h metszi e -t, akkor g metszi e_0 -t. Látjuk, a g és h egyenesek közti kölcsönösen egyértelmű vonatkozás a kívánt tulajdonságú.

Ebből következik, hogy a szerint, amint a g egyenesek közül e_0 -t mindegyik metszi, egy és csak egy nem metszi, vagy több nem metszi, a h egyenesek közül is e -t mindegyik metszi, egy és csak egy nem metszi, ill. több nem metszi.

Ki kell még mutatnunk, hogy az e egyenes és bármely rajta-kívüli P pont síkjában a P -n átmenő egyenesek közül e -t vagy mindegyik metszi, vagy egy és csak egy nem metszi, vagy pedig több nem metszi, a szerint, amint az első, a második vagy a harmadik eset áll fenn a P^* pontra vonatkozólag.

Legyen először P az (e, P^*) síkon kívüli pont. A PP^* egyenesen átmenő síkok és az (e, P^*) síkban P^* -on átmenő egyenesek között

nyilván kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesíthetünk azáltal, hogy minden ilyen síkhoz az (e, P^*) síkkal való metszésvonalát rendeljük (20. ábra). Ekkor minden síknak, amely e -t metszi, nyilván e -t metsző egyenes felel meg, és fordítva. Ugyanígy létesíthetünk kölcsönösen egyértelmű vonatkozást a PP^* egyenesen átmenő síkok és az (e, P) síkban P -n átmenő egyenesek között, mikor is e -t metsző síknak szintén e -t metsző egyenes felel meg és fordítva. Ennélfogva az (e, P^*) sík P^* -on átmenő egyenesei és az (e, P) sík P -n átmenő egyenesei között olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozás van, hogy e -t metsző egyenesnek ugyancsak e -t metsző felel meg. Tehát az állítás az (e, P) síkban P -n átmenő egyenesekre érvényes.



20. ábra.

De ugyanígy következik, hogy az (e, P^*) síkban valamely e -n kívüli P' ponton átmenő egyenesek közül az e -t vagy mindegyik metszi, vagy egy és csak egy nem metszi, vagy pedig több nem metszi, a szerint, hogy melyik eset áll fenn az (e, P) síkban P -n átmenő egyenesekre. Ebből folyólag érvényes az állítás az (e, P^*) síkban a P' ponton átmenő egyenesekre is. Qu. e. d.

15. §. Az alábbi három axioma közül akármelyiket téve fel, a fentebbiek értelmében ugyanaz bármely e egyenesre és bármely rajta kívüli P pontra fennáll.

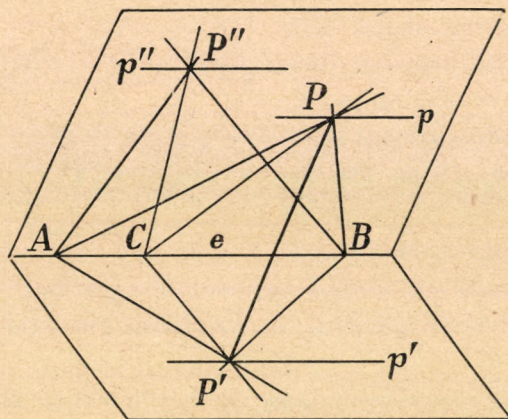
IV. Van olyan e_0 egyenes és rajta kívüli P_0 pont, hogy az (e_0, P_0) síkban P_0 -on átmenő minden egyenes metszi e_0 -t. (Metszési axioma.)

IV.* Van olyan e_0 egyenes és rajta kívüli P_0 pont, hogy az (e_0, P_0) síkban P_0 -on át egy és csak egy olyan egyenes fektethető, amely e_0 -t nem metszi. (Párhuzamossági axioma.)

IV.** Van olyan e_0 egyenes és rajta kívüli P_0 pont, hogy az (e_0, P_0) síkban P_0 -on át több olyan egyenes fektethető, amely e_0 -t nem metszi. (Nem-metszési axioma.)

A mondottak szerint ez axiómák bármelyike a másik kettőt kizárja.

16. §. Elfogadván a IV.* párhuzamossági vagy a IV.** nem-metszési axiómát, valamely e egyenes különböző A, B, C pontjairól akkor mondjuk, hogy C az A és B között van, ha felvévén egy, az e -n kívüli P pontot, és egy, az (e, P) síkban a P -n átmenő és e -t nem metsző p egyenest, $PA, PB \mid PC, p$ (21. ábra).



21. ábra.

E definíciónak van értelme, mert bebizonyítjuk, hogy ez a megállapítás a P pont és a p egyenes speciális választásától független.

Bizonyítás. Az 5. §. 5. tételéből folyólag az egyik $(PA, PB) \not\subset$ szögnek minden egyenese metszi e -t, tehát az (e, P) síkban P -n átmenő és e -t nem metsző bármely p egyenes a másik $(PA, PB) \not\subset$ szöghöz tartozik. Ennélfogva a fenti megállapítás a P pont felvétele után a p egyenes választásától nyilván független (8. §.). Ki kell még mutatnunk, hogy e megállapítás a P pont választásától is független.

Legyen először P' az (e, P) síkon kívüli pont és p' az (e, P') síkban P' -n átmenő, e -t nem metsző egyenes (21. ábra). Akkor a (p', P) sík az (e, P) síkot olyan p egyenesben metszi, amely az utóbbi síkban P -n átmegy és az e egyenest nem metszi. Mivel pedig a feltevés szerint $PA, PB \mid PC, p$, vagyis (5. §.) a PP'

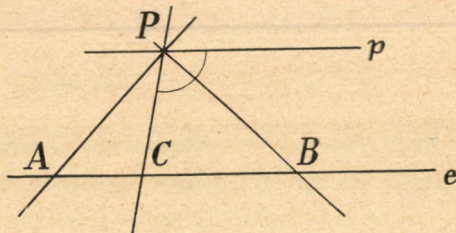
egyenesen átmenő APP' , BPP' , CPP' és (p, PP') síkokra $APP', BPP' | CPP'$, (p, PP') , azért e síkoknak az (e, P') síkkal való metszeteire $P'A, P'B | P'C, p'$.

Ebből épen így következik, hogy ha P'' az (e, P) síknak valamely e -n kívüli pontja s p'' e síkban a P'' -n átmenő és e -t nem metsző egyenes, akkor szintén $P''A, P''B | P''C, p''$. Qu. e. d.

Nyilvánvaló, hogy ha C az A és B között van, akkor egyszersmind C a B és A között van (3. §.).

Megmutatjuk most, miszerint *valamely e egyenes A és C pontjaihoz mindig található olyan B pont ez egyenesen, hogy C az A és B között van.*

U. i. választván valamely e -n kívüli P pontot, legyen p az (e, P) síkban egy, a P -n átmenő és e -t nem metsző egyenes. Az 5. §. 1. tételéből folyólag a PA egyenest nem tartalmazó (p, PC) szögnek (22. ábra) van olyan közbülső egyenese, amely metszi e -t bizonyos B pontban. Erre $PC, p | PA, PB$ (8. §.), tehát $PA, PB | PC, p$ (II₂. ex.), vagyis C az A és B között van.



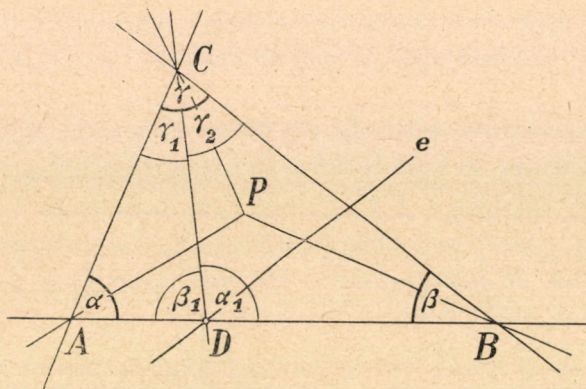
22. ábra.

A II₃. axiómára tekintettel evidens, hogy ha C az A és B között van, akkor B nincs az A és C között.

Végül megmutatjuk, hogy ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok és e valamely A és B közti D ponton átmenő oly egyenes az ABC síkban, amely nem megy át az A, B, C pontok egyikén sem, akkor vagy A és C , vagy B és C között van pontja az e egyenesnek (23. ábra).

Bizonyítás. Az 5. §. 5. tétele értelmében az AB, BC, CA egyeneseken kívül van olyan P pont az ABC síkban, hogy az AP egyenest tartalmazó (AB, AC) szögnek minden egyenese metszi a BC -egyenest s hasonló áll fenn BP és CP -re vonatkozólag. Legyenek a szóbanforgó szögek rendre α, β, γ ; ezek az egyik ABC háromszögű síkrész szögei (9. §.). Ebben a $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ oldalak köz-

bülső pontjai a fenti definíció értelmében rendre a B és C , a C és A , az A és B közti pontok összeségét alkotják. A feltevés szerint D az A és B közé esik, vagyis az \overline{AB} oldal közbülső pontja, tehát a CD egyenes két részre osztja a γ szöget; legyenek ezek γ_1 és γ_2 , amelyek \overline{AB} -nek rendre \overline{AD} , \overline{DB} részeit vágják ki az AB egyenesből. Jelöljük β_1 -gyel annak az ADC háromszögű síkrésznek D csúcsú szögét, amelynek két szöge α és γ_1 , α_1 -gyel pedig annak



23. ábra.

a BDC háromszögű síkrésznek D csúcsú szögét, amelynek két szöge β és γ_2 . Ez α_1 és β_1 szögek mellékszögek. U. i. legyen α , γ_1 és β_1 -nek valamely közös belső pontja Q . Akkor ez mint α és γ közös belső pontja, egyben β -nak is belső pontja. De így nem lehet pontja α_1 -nek, mert akkor mint α_1 és β közös belső pontja, a γ_2 -nek is belső pontja volna, holott γ_1 és γ_2 -nek nincs közös belső pontja. Szóval Q a β_1 -nek olyan belső pontja, amely α_1 -nek nem pontja s gy α_1 és β_1 nem lehetnek azonosak, hanem mellékszögek. Mármint a 10. §-ból tudjuk, hogy β_1 tartalmazza a fenti \overline{AC} egyenesrészt, s hasonlóképp α_1 tartalmazza a \overline{BC} egyenesrészt. Mivel pedig ez \overline{AC} egyenesrész közbülső pontjai A és C között vannak, azért a fenti definíció szerint β_1 -nek minden közbülső egyenese metszi AC -t egy A és C közti pontban. Hasonlóan az α_1 -nek minden közbülső egyenes metszi a BC egyenest valamely B és C közti pontban. De α_1 és β_1 mellékszögek lévén, az e egyenes a feltevésből

folyólag vagy α_1 -nek vagy β_1 -nek közbülső egyenese, tehát van pontja vagy B és C , vagy A és C között. Qu. e. d.

Ezek szerint a fenti «között» fogalom megfelel a HILBERT-féle rendezési axiómáknak.¹⁹

17. §. A IV.* párhuzamossági vagy a IV.** nem-metszési axioma elfogadása esetén az A és B pontok által meghatározott két \overline{AB} egyenesrész közül *egyenесdarabnak* nevezzük azt, amelynek közbülső pontjai A és B «között» (16. §.) vannak. A két \overline{AB} egyenesrész egyike, és csak egyike egyenesdarab. Ez a IV.* axioma feltevése esetén evidens, a IV.** axioma feltevése mellett pedig az 5. §. 5. tételéből következik. Nyilvánvaló, hogy csak az \overline{AB} egyenesdarabnak van pontja A és B között, míg a másik \overline{AB} egyenesrésznek nincsen.

A definíció szerint valamely \overline{AB} egyenesrész egyenesdarab voltát az jellemzi, hogy pontjait egy az AB egyenesen kívüli P ponttal összekötő egyenesek az egyik $(PA, PB) \not\sim$ szöveget alkotják. Minthogy a két \overline{AB} egyenesrész közül csak az egyik egyenesdarab, azt mondjuk, hogy a párhuzamossági vagy a nem-metszési axioma mellett az egyenes «nyílt».

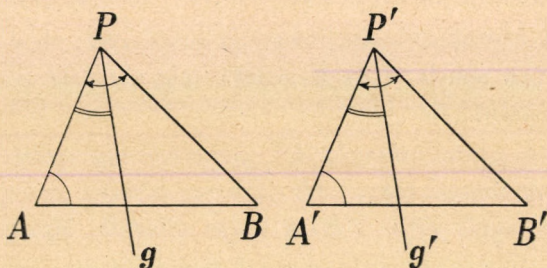
Megmutatjuk, hogy ha két egybeeső egyenesrész egyike egyenesdarab, akkor a másik is az.

Bizonyítás. Legyen $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ és tegyük fel, hogy az \overline{AB} egyenesrész egyenesdarab. Felvén az AB egyenesen kívül valamely P pontot, tekintsük azt a $(PA, PB) \not\sim$ szöveget, amely \overline{AB} -t vágja ki ez egyenesből (24. ábra). Tekintsük továbbá az \overline{AP} egyenesdarabot s legyen egy az $A'B'$ egyenesen átmenő síkban $A'B'$ mellé A' -nél felrakva $PAB \not\sim \equiv P'A'B' \not\sim$ (III₁. ax., 10. §.), ahol is $\overline{AP} \equiv \overline{A'P'}$ (III₆. ax.). Ekkor a feltevésből folyólag az \overline{AB} -t, illetőleg $\overline{A'B'}$ -t tartalmazó $APB \not\sim$ és $A'P'B' \not\sim$ szögekre $APB \not\sim \equiv A'P'B' \not\sim$ (III₅. ax.). Ha mármost az utóbbi szögnek valamely közbülső egyenese g' , tekintsük azt a $(P'A', g') \not\sim$ szöveget, amely ez $A'P'B' \not\sim$ -vel egyenlő fekvésű, és legyen az $APB \not\sim$ szög-

¹⁹ D. HILBERT,⁴ 4—5. old.

gel egyenlő fekvésben felrakva $(P'A', g') \simeq (PA, g) \simeq$. Ekkor g az $APB \simeq$ szögnek közbülső egyenesese (III₄. ax.), mert a szerkesztésből folyólag $A'P'B' \simeq APB \simeq$ (12. §.). Tehát a feltevés szerint g metszi az AB egyenest. Ebből azonban következik, hogy g' is metszi $A'B'$ -t (14. §.). Szóval az $\overline{A'B'}$ egyenesrészt tartalmazó $A'P'B' \simeq$ szögnek minden közbülső egyenesese metszi az $A'B'$ egyenest, vagyis $\overline{A'B'}$ is egyenesdarab. Qu. e. d.

Tekintettel a III₆., III₇. axiómákra és a 13. §. tételének folyományára, továbbá a III₁., III₂. és III₅. axiómákra, a mondottakból



24. ábra.

olyólag az egyenesdarabok és a szögek egybevágósága megfelel a HILBERT-féle egybevágósági axiómáknak.²⁰

18. §. Ha a IV. metszési axiómát fogadjuk el, akkor az A és B pontok által meghatározott két \overline{AB} egyenesrész mindegyikének megvan az a tulajdonsága, hogy pontjait egy az AB egyenesen kívüli P ponttal összekötő egyenesek az egyik $(PA, PB) \simeq$ szöget alkotják (14. §.). Vagyis ez esetben mind a két \overline{AB} egyenesrész «*egyesdarab*» (17. §.). Ennek alapján azt mondjuk, hogy a IV. metszési axióma mellett az egyenes «*zárt*».

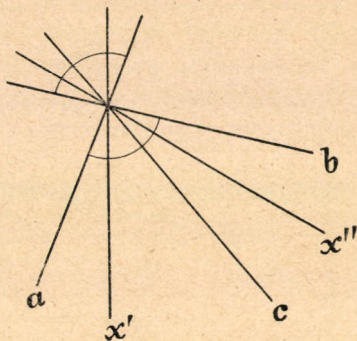
V. A folytonosság axiómája.

19. §. Legyen c valamely $(a, b) \simeq$ szög közbülső egyenesese, és osztályozzuk e szög összes közbülső egyenesseit így: a c -t a -tól b felé megelőző x' egyeneseket tegyük az első, a c -t követő x''

²⁰ D. HILBERT,⁴ 11—14. old.

egyeneseket a második osztályba, c -t magát pedig vagy az első, vagy a második osztályba (25. ábra). Ez osztályozás mellett az első osztály egyenesei megelőzik a második osztály egyeneseit. A folytonosság alábbi axiómája azt a feltevést fejezi ki, hogy ily tulajdonságú osztályozás csakis a leírt módon — valamely közbülső egyenes által — létesíthető.

V. Ha valamely (a, b) szög közbülső egyenesei két osztályba vannak sorozva úgy, hogy a -tól b felé az első osztály bármely egyenese megelőzi a második osztály bármely egyenesét, akkor e szögnek van oly közbülső c egyenes, hogy a -t megelőző egyenesek mind az első, a -t követők viszont mind a második osztályba tartoznak.



25. ábra.

A szóbanforgó osztályozást valamely c -től különböző c' közbülső egyenes már nem létesítheti, mert akkor a és c' közé eső egyenesek mindkét osztályba tartoznának.

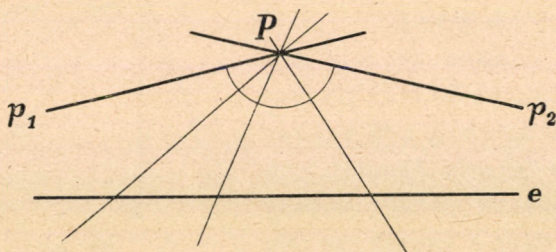
Ez axiómából folyik az egyenesdarab pontjainak osztályozására vonatkozó hasonló tétel.²¹

20. §. Ha az illeszkedés, az elválasztás, az egybevágóság fenti axiómái és a IV.* párhuzamossági axióma mellett még az V. folytonossági axiómát is elfogadjuk, akkor axióma-rendszerünk az euklidesi geometriát jellemzi. Ez axiómák ugyanis igazak az euklidesi geometriában (megfelelő értelmezések mellett) és belőlük következik — mint láttuk — e geometriának ismert teljes axióma-rendszere.

Ha a IV.* párhuzamossági axióma helyett a IV.** nem-metszési axiómát tesszük fel (a többiek megtartásával), akkor az ú. n. hiperbolikus vagy BOLYAI-LOBACSEVSKIJ-féle geometriával állunk

²¹ V. ö. R. DEDEKIND: Stetigkeit und irrationale Zahlen. 5. Aufl. Braunschweig, 1927. 11. old.

szemben. Ekkor ugyanis a HILBERT-féle rendezési és egybevágósági axiómák ismét érvényesek (16., 17. §§.) s az V. folytonossági axioma alapján egyszerűen következik, miszerint bármely (e, P) síkban a P -n átmenő és e -t metsző egyenesek bizonyos $(p_1, p_2) \not\propto$ szög közbülső egyeneseit alkotják (26. ábra), vagyis fennáll a hiperbolikus geometria *elpattanási axiómája*.²² A $(p_1, p_2) \not\propto$



26. ábra.

szög szárai, amelyek tehát már nem metszik e -t, a P pontból az e egyeneshez húzott ú. n. *elpattanó egyenesek* vagy *hiperbolikus paralellák*.

Végül a IV. metszési axioma a többi fenti axiómával együtt²³ az ú. n. *elliptikus geometriát* jellemzi. Ekkor ugyanis egy síkban fekvő két egyenes mindig metszi egymást (14. §.) és a II₁—II₄. axiómákból folynak (4—7. §§.) a projektív geometriának a pontpárok elválasztására vonatkozó rendezési axiómái.²⁴

Szász Pál.

²² D. HILBERT: Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie. Mathematische Annalen 57 (1903), főkép 139. old., vagy D. HILBERT,⁴ 162. old.

²³ Ezek közül II₅. most felesleges.

²⁴ Lásd¹¹.

ABSONDERUNG DER ELLIPTISCHEN, EUKLIDISCHEN UND HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE.

In der vorliegenden Arbeit wird von neuem ein Axiomensystem der *Raumgeometrie* aufgestellt, aus welchem der Reihe nach die *elliptische*, die *euklidische*, die *hyperbolische* (BOLYAI—LOBATSCHESKISche) Geometrie folgt, wenn man nur noch das entsprechende Parallelenaxiom für eine *einzig*e Gerade und für einen *einzig*en ausser ihr gelegenen Punkt voraussetzt. Die gewählten Axiome beziehen sich unmittelbar auf den gesamten Raum, und die Absonderung der drei Geometrien (der Beweis des unten stehenden Satzes) geschieht ohne Benützung der Stetigkeit.¹

Zunächst wird auf Grund der gemeinsamen Verknüpfungs-, Ordnungs- und Kongruenzaxiome (die naturgemäss von der Hypothese der offenen oder geschlossenen Gerade unabhängig sind) der bekannte² allgemeine Satz bewiesen:

Unter den Geraden, die in einer Ebene (g, P) durch den Punkt P gezogen werden, gibt es entweder keine, oder eine und nur eine, oder aber mehrere, die die Gerade g nicht schneiden, je nachdem der erste, zweite oder dritte Fall für eine einzige Gerade g_0 und für einen einzigen ausser ihr gelegenen Punkt P_0 vorliegt.

Weiter wird gezeigt, dass die drei verschiedenen Parallelenaxiome, die das Eintreten des ersten, zweiten, bzw. dritten Falles bestimmen, zusammen mit den obigen und mit dem DEDEKINDSchen Stetigkeitsaxiom, je ein *vollständiges Axiomensystem* der elliptischen, euklidischen, bzw. hyperbolischen Geometrie bilden.

Paul v. Szász.

¹ Anders geht zuwerke z. B. J. L. COOLIDGE: The Elements of Non-Euclidean Geometry. Oxford, 1909.

² Vergl. F. ENRIQUES: Prinzipien der Geometrie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III. A1., insb. S. 43.

A HERMITE-FÉLE INTERPOLÁCIÓRÓL.

1. Legyen adva a $-1 \leq x \leq +1$ számközben n különböző szám

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1)$$

és legyen

$$y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_n^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2)$$

további n tetszőleges szám, akkor a LAGRANGE-féle interpolációs formula

$$L_n[x] \equiv \sum_{k=1}^n y_k^{(n)} l_k^{(n)}(x), \quad (3)$$

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}, \quad \omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)})$$

előállítja azt az egyetlen legfeljebb $(n-1)$ -edfokú racionális egész függvényt, amely az (1) helyeken rendre a (2) értékeket veszi fel. Ha a (2) számok speciálisan az $f(x)$ függvénynek az (1) helyeken felvett értékei, tehát

$$y_k^{(n)} = f(x_k^{(n)}), k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

akkor az $L_n[x] \equiv L_n[f(x)]$ polinómot az $f(x)$ függvény (1) alappontokhoz tartozó n -edik LAGRANGE-féle interpolációs polinómjának nevezzük. Az $L_n[f(x)]$ polinómsorozat ($n=1, 2, \dots$) vizsgálatával igen sok kutató foglalkozott. Az idevonatkozó eredmények közül most csak a következő negatív irányút említjük meg: tetszőleges $\alpha^{(1)}$

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \quad (5)$$

«alappontcsoport» esetén is található olyan a $-1 \leq x \leq +1$ számközben folytonos függvény, amelyre a LAGRANGE-féle inter-

polációs polinómkok $L_n[f(x)]$ ($n=1, 2, \dots$) sorozata nem konvergál egyenletesen az $f(x)$ függvényhez.¹ Az egyenletes konvergenciához az $f(x)$ függvényre újabb feltevések szükségesek; így pl. egyes alappontcsoportok esetén elég feltenni az $f(x)$ függvényről, hogy bizonyos LIPSCHITZ-feltételnek tesz eleget.² Ha olyan interpolációs polinómsorozatot keresünk, amely minden folytonos $f(x)$ függvényre egyenletesen konvergens, akkor csak olyanok közt válogathatunk, amelynél az n -edik polinóm — amely tehát az $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ helyeken megegyezik az $f(x)$ függvénnyel — fokszáma $(n-1)$ -nél magasabb. Természetes követelmény itt, hogy lehetőleg egyszerű képzésű interpolációs polinómkokat vizsgáljunk és az n -ediknek a fokszáma ne legyen túl magas.³ Erre az útra először FEJÉR lépett és pedig vizsgálatai az ú. n. HERMITE-

¹ S. BERNSTEIN, Quelques remarques sur l'interpolation, *Comm. Soc. Math. Charkow* 14 (1914).

G. FABER, Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, *Jahresber. D. M. Ver.* 23. (1914) 102—240. 1.

Egy különösen egyszerű bizonyítás található L. FEJÉR, Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalls gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen c. dolgozatában, *Math. Zeitschr.*, 32 (1930) 426—457. 1. Ha speciálisan $\omega_n(x) = T_n(x) = n$ -edik CSEBISEV-polinóm, van olyan folytonos függvény, amelynek LAGRANGE-féle interpolációs polinómjai mindenütt divergálnak. L. G. GRÜNWARD, Über Divergenzerscheinungen der Lagrange-schen Interpolationspolynome stetiger Funktionen, *Annals of Mathematics* 37 (1936) 908—918. 1.

² Ilyen pl. a CSEBISEV-alappontok esete. Egy általános alappontcsoport-osztályra, amelyről éppen e dolgozatban lesz szó, ezt FEJÉR bizonyította be. L. pl. L. FEJÉR, Lagrange-sche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen* 106 (1932) 1—55. 1. Egy másik általános pontcsoport-osztályt, amelyre ez érvényes, szolgáltatnak bizonyos ortogonális polinómrendszerek. L. I. SHOHAT, On Interpolation, *Annals of Mathematics* 34 (1933) 130—146. 1. és G. GRÜNWARD—P. TURÁN, Über Interpolation, *Annali d. R. Sc. Normale Sup. di Pisa* 16 (1938) 1—10. 1.

³ Ha az n -edik interpolációs polinóm fokszáma tetszőleges magas lehet, akkor minden mindenütt sűrű pontcsoportsorozathoz lehet egy olyan interpolációs polinómsorozat megadni, amely minden folytonos függvényre egyenletesen konvergál. L. G. GRÜNWARD, On Interpolation, *Bull. of Am. Math. Soc.*, nyomtatás alatt.

féle interpolációs polinómokra vonatkoznak.⁴ Az $f(x)$ függvény n -edik HERMITE-féle interpolációs polinómja az az egyetlen legfeljebb $(2n-1)$ -edfokú polinóm, amely az $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ helyeken rendre az $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \dots, f(x_n^{(n)})$ értékeket veszi fel és amelynek differenciálhányadosa ugyancsak ezeken a helyeken rendre az adott $d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, \dots, d_n^{(n)}$ értékeket veszi fel. Könnyű igazolni,⁵ hogy ennek a polinómnak explicit alakja a következő:

$$H_n[f(x)] \equiv \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) v_k^{(n)}(x) \{l_k^{(n)}(x)\}^2 + \sum_{k=1}^n d_k^{(n)} (x - x_k^{(n)}) \{l_k^{(n)}(x)\}^2, \quad (6)$$

ahol

$$v_k^{(n)}(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} (x - x_k^{(n)}) \quad (7)$$

és ugyanúgy, mint a LAGRANGE-féle interpolációnál,

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)}) (x - x_k^{(n)})}, \quad (8)$$

$$\omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)}).$$

A $\sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) v_k^{(n)}(x) \{l_k^{(n)}(x)\}^2$ polinómot lépésőparabolának, a $\sum_{k=1}^n d_k^{(n)} (x - x_k^{(n)}) \{l_k^{(n)}(x)\}^2$ polinómot pedig, ha $|d_k^{(n)}| < A$, $k=1, \dots, n$; $n=1, 2, \dots$ (A állandó), általánosított lépésőparabolának nevezzük. Amint látjuk, ezek a klasszikus interpolációs polinómok egyszerű képzésűek és az n -edik fokszáma n -el magasabb, mint a megfelelő LAGRANGE-féle interpolációs polinómé. Ennél lényegében kisebb fokszámú polinómmal nem is jutnánk célhoz.⁶ FEJÉR bebizonyította, hogy

⁴ FEJÉR első HERMITE-féle interpolációs polinómokra vonatkozó vizsgálatainál az alappontok az n -edik LEGENDRE-polinóm gyökei voltak. L. FEJÉR, Über Interpolation, *Nachrichten d. K. Gesellschaft zu Göttingen* (1916) 66—91. l.

⁵ L. pl. L. FEJÉR, Über WEIERSTRASS'sche Approximation, besonders durch HERMITE'sche Interpolation, *Math. Annalen* 102 (1930) 707—725. l.

⁶ Így pl. a CSEBISZEV esetben legalább $n-1 + cn$ ($c > 0$)-nek kell az n -edik interpolációs polinóm fokszámának lenni, ha minden folytonos függvényre egyenletes konvergenciát akarunk. G. GRÜNWARD, On a Theorem of S. Bernstein, *Acta Szeged*, nyomtatás alatt. Nagyon valószínű, hogy ez általános pontcsoport esetén is igaz.

bizonyos nevezetes alappontcsoportok esetén a lépcsőparabolák, illetve az általánosított lépcsőparabolák sorozata minden folytonos függvényre egyenletesen konvergens.⁷ Így pl., ha $\omega_n(x) = T_n(x)$ = az n -edik CSEBISEV-polinóm (és így $x_k^{(n)} = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}$, $k = 1, 2, \dots, n$), az $f(x)$ folytonos függvény általánosított lépcsőparabolái egyenletesen konvergálnak az $f(x)$ folytonos függvényhez. A további vizsgálatok azt mutatták, hogy amely pontcsoportsorozatokra a lépcsőparabolák konvergenciáját egyszerűen sikerül bebizonyítani, ott a (7) alatti $v_k^{(n)}(x)$ lineáris függvény a k és n minden értékére pozitív. Azok a pontcsoportok, amelyekre a $-1 \leq x \leq +1$ számközben

$$v_k^{(n)}(x) \equiv 1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x - x_k^{(n)}) \geq 2\varrho > 0, \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots,$$

vagy legalább is

$$v_k^{(n)}(x) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

más vizsgálatokban is igen szabályos viselkedést mutatnak.⁸ FEJÉR ezeket a pontcsoportokat szigorú értelemben vett szabályos, illetve szabályos pontcsoportoknak nevezte el és felvetette azt a kérdést, hogy ilyen pontcsoportok esetén érvényes-e az egyes speciális pontcsoportokra igazolt konvergencia,⁹ vagyis hogy minden folytonos függvényre igaz-e, hogy

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) v_k^{(n)}(x) \{l_k^{(n)}(x)\}^2 \rightarrow f(x), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

illetve általánosabban

⁷ L. pl. L. FEJÉR ² és ⁵ alatt idézett munkáit.

⁸ Így pl. ilyen pontcsoportok eloszlására szép eredményeket találtak ERDŐS PÁL és TURÁN PÁL, On Interpolation II, III, *Annals of Math.* 39 (1940) 703–724. l., 41 (1940) 510–533. l.

⁹ L. FEJÉR, On the Characterization of Some Remarkable System of Points of Interpolation by Means of Conjugate Points. *Am. Math. Monthly* 41 (1934) 1–14. l.

függvény integrálközepéhez konvergál. Ha csak azt tudjuk, hogy $v_k^{(n)}(x) \geq 0$ a $(-1 <) a < x < b (< +1)$ számközben érvényes, akkor a tetszőleges $f(x)$ folytonos függvény általánosított lépcső-parabolái az $a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon$ számközben konvergálnak egyenletesen az $f(x)$ függvényhez.

2. Legyen $P(x)$ egy legfeljebb $(2n-1)$ -edfokú polinóm; akkor a (7) értelmezésből következik, hogy ¹¹

$$\sum_{k=1}^n P(x_k) v_k(x) l_k^2(x) + \sum_{k=1}^n P'(x_k) (x - x_k) l_k^2(x) \equiv P(x) \quad (16)$$

és, ha speciálisan $P(x) \equiv 1$,

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) l_k^2(x) \equiv 1. \quad (17)$$

Ha $v_k(x_0) \geq 2\rho > 0$, $k=1, 2, \dots, n$, (17)-ből következik, hogy

$$\sum_{k=1}^n l_k^2(x_0) \leq \frac{1}{2\rho}. \quad (18)$$

3. A továbbiakban feltesszük, hogy minden x -re

$$v_k(x) \equiv 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} (x - x_k) \geq 2\rho > 0, \quad (19)$$

$$k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots; \quad -1 \leq x \leq +1.$$

Megjegyezzük, hogy $\rho < 1/2$, mert $v_k(x_k) = 1$.

Szükségünk lesz a következő tételre: Legyen $f(x)$ a $-1 \leq x \leq +1$ számközben differenciálható és differenciálhányadosa folytonos; akkor, ha (19) teljesül,

$$H_n[f] \equiv \sum_{k=1}^n f(x_k) v_k(x) l_k^2(x) + \sum_{k=1}^n f'(x_k) (x - x_k) l_k^2(x) \Rightarrow f(x), \quad (20)$$

ahol \Rightarrow a $-1 \leq x \leq +1$ számközben való egyenletes konvergenciát jelzi (ezt a jelölést a későbbiekben is használni fogjuk).

Ugyanis a WEIERSTRASS-féle approximációs tételből következik,

¹¹ A továbbiakban, mivel ez félreértésre nem ad okot, a felső indexeket elhagyjuk.

hogy, hogy a tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $P(x)$ polinóm, amelyre

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad |f'(x) - P'(x)| < \varepsilon. \quad (-1 \leq x \leq +1) \quad (21)$$

Tehát, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges előre megadott kis szám és $P(x)$ az ehhez meghatározott (21)-nek eleget tevő polinóm, akkor elég nagy n -től kezdve:

$$P(x) \equiv \sum_{k=1}^n P(x_k) v_k(x) l_k^2(x) + \sum_{k=1}^n P'(x_k) (x - x_k) l_k^2(x) \quad (22)$$

és

$$\begin{aligned} |H_n[f] - f(x)| &= |H_n[f - P] + P(x) - f(x)| \leq |H_n[f - P]| + \varepsilon \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - P(x_k)| v_k(x) l_k^2(x) + \\ &+ \sum_{k=1}^n |f'(x_k) - P'(x_k)| |x - x_k| l_k^2(x) + \varepsilon < \\ &< \varepsilon \sum_{k=1}^n |v_k(x)| l_k^2(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^n |x - x_k| l_k^2(x) + \varepsilon \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^n |v_k(x)| l_k^2(x) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^n l_k^2(x) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (23)$$

Tehát $v_k(x) > 0$ és (17), (18) miatt

$$|H_n[f] - f(x)| < 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{2\rho} = \varepsilon \left(2 + \frac{1}{\rho} \right), \quad (24)$$

amiből következik állításunk.

4. A továbbiakban egy speciális függvénynek az interpolációs polinómjait fogjuk vizsgálni. Ez a függvény a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -1 \leq x \leq a \\ (x-a)^q & \text{ha } a \leq x \leq +1, \end{cases} \quad (25)$$

ahol a a $-1 \leq x \leq +1$ számközben tetszőlegesen felvett, de fixen tartott hely. Az értelmezésben szereplő q szám azonos a (19) alapfeltevésünkben levő q számmal. A $H_n[f]$ az $x=a$ helyen felírható, ha a nem gyökhely. Arra az esetre, amikor a éppen gyökhely, rögtön vissza fogunk térni.

$$\begin{aligned} H_n[f]_{x=a} &= \sum_{k=1}^n f(x_k) v_k(a) l_k^2(a) + \sum_{k=1}^n f'(x_k) (a - x_k) l_k^2(a) = \\ &= \sum_{a < x_k} (x_k - a)^q v_k(a) l_k^2(a) + \sum_{a < x_k} q (x_k - a)^{q-1} (a - x_k) l_k^2(a) = \\ &= \sum_{a < x_k} (x_k - a)^q l_k^2(a) (v_k(a) - q). \end{aligned} \quad (26)$$

Ez a formula egyik legfontosabb segédeszköze az egész bizonyításnak. Különösen megjegyzésre méltó, hogy az utolsó összegben szereplő tagok mind pozitívak ($v_k(a) - \varrho \geq \varrho > 0$). Az utolsó formulában, ha $a = x_k$, minden tag 0 és az összeg értéke is 0; megengedjük tehát azt az esetet is, amikor egy gyökhely éppen a -ba esik és ekkor $H_n[f]_{x=a}$ alatt nullát értünk. Kimutatjuk, hogy a (26) számsorozat zérushoz konvergál. A bizonyításhoz bevezetjük a következő függvényeket:

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -1 \leq x \leq a \\ -\nu^2(x-a)^{\varrho+2} + 2\nu(x-a)^{\varrho+1} & \text{ha } a \leq x \leq a+1/\nu, \nu=1, 2, 3, \dots, \\ (x-a)^\varrho & \text{ha } a+1/\nu \leq x \leq +1. \end{cases} \quad (27)$$

Az $f_\nu(x)$ az egész $-1 \leq x \leq +1$ számközben differenciálható és differenciálhányadosa folytonos. Ez minden $a+1/\nu$ -től különböző helyre világos. Az $a+1/\nu$ helyen először is az $(x-a)^\varrho$ és a $-\nu^2(x-a)^{\varrho+2} + 2\nu(x-a)^{\varrho+1}$ megegyezik (mert $-\nu^2\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\varrho+2} + 2\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\varrho+1} = \left(\frac{1}{\nu}\right)^\varrho$), másrészt ugyanezen két függvény differenciálhányadosa

$$\varrho(x-a)^{\varrho-1} \text{ és } -\nu^2(\varrho+2)(x-a)^{\varrho+1} + 2\nu(\varrho+1)(x-a)^\varrho$$

az $a+1/\nu$ helyen megegyezik és értéke $\varrho\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\varrho-1}$. Érvényes továbbá az

$$f_\nu(x) \Rightarrow f(x) \quad \text{ha } \nu \rightarrow \infty \quad (28)$$

limesz-reláció. Ugyanis, ha $\varepsilon > 0$ előre megadott kis szám és ν olyan nagy, hogy $3\left(\frac{1}{\nu}\right)^\varrho < \varepsilon$, akkor minden x -re ($-1 \leq x \leq +1$)

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (29)$$

mert a $-1 \leq x \leq a$ és $a+1/\nu \leq x \leq +1$ számközben $f_\nu(x) - f(x) = 0$, az $a \leq x \leq a+1/\nu$ számközben pedig

$$\begin{aligned} |f_\nu(x) - f(x)| &= |-\nu^2(x-a)^{\varrho+2} + 2\nu(x-a)^{\varrho+1} - (x-a)^\varrho| \leq \\ &\leq \nu^2\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\varrho+2} + 2\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\varrho+1} + \left(\frac{1}{\nu}\right)^\varrho = 3\left(\frac{1}{\nu}\right)^\varrho < \varepsilon. \end{aligned} \quad (30)$$

A 3. pontban említett tétel szerint minden fix ν -re

$$H_n[f_\nu] \Rightarrow f_\nu(x), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Legyen most már $\varepsilon > 0$ adott és ν olyan nagy, hogy

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (32)$$

(ez (28) miatt lehetséges) és

$$\frac{3}{\varrho} \left(\frac{1}{\nu} \right)^\varrho < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (33)$$

Egy ilyen ((32) és (33)-nak eleget tevő) ν -t fixáljunk és határozzuk meg n -t olyan nagyra, hogy erre és az ennél nagyobb n -ekre

$$|H_n[f_\nu]_{x=a} - f_\nu(a)| = |H_n[f_\nu]_{x=a}| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad (34)$$

ez a (31) miatt lehetséges. A (32), (33) és (34)-et figyelembevéve kapjuk, hogy elég nagy n -re

$$\begin{aligned} & |H_n[f]_{x=a} - f(a)| = |H_n[f]_{x=a}| = \\ & = |H_n[f - f_\nu]_{x=a} + H_n[f_\nu]_{x=a}| \leq |H_n[f - f_\nu]_{x=a}| + \frac{\varepsilon}{3}, \quad (35) \\ & |H_n[f - f_\nu]_{x=a}| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f_\nu(x_k)) v_k(a) l_k^2(a) + \sum_{k=1}^n (f'(x_k) - f'_\nu(x_k)) (a - x_k) l_k^2(a) \right| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=1}^n v_k(a) l_k^2(a) + \sum_{k=1}^n |f'(x_k) - f'_\nu(x_k)| |a - x_k| l_k^2(a) = \\ & = \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=1}^n |f'(x_k) - f'_\nu(x_k)| |a - x_k| l_k^2(a) \end{aligned} \quad (36)$$

és figyelembe véve, hogy ha x_k nincs az $a \leq x \leq a + 1/\nu$ számközben, $f'(x_k) = f'_\nu(x_k)$,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |f'(x_k) - f'_\nu(x_k)| |a - x_k| l_k^2(a) = \sum_{a < x_k < a + 1/\nu} |f'(x_k) - f'_\nu(x_k)| |a - x_k| l_k^2(a) = \\ & = \sum_{a < x_k < a + 1/\nu} |\varrho(x_k - a)^{\varrho-1} + \nu^2(x_k - a)^{\varrho+1}(\varrho+2) - 2\nu(x_k - a)^{\varrho}(\varrho+1)| |a - x_k| l_k^2(a) \leq \\ & \leq \sum_{a < x_k < a + 1/\nu} \left(\varrho \left(\frac{1}{\nu} \right)^{\varrho-1} + \nu^2(\varrho+2) \left(\frac{1}{\nu} \right)^{\varrho+1} + 2\nu(\varrho+1) \left(\frac{1}{\nu} \right)^{\varrho} \right) \frac{1}{\nu} l_k^2(a) < \quad (37) \\ & < \sum_{k=1}^n (4\varrho+4) \left(\frac{1}{\nu} \right)^{\varrho} l_k^2(a) < (4\varrho+4) \left(\frac{1}{\nu} \right)^{\varrho} \frac{1}{2\varrho} = \\ & = \frac{2(1+\varrho)}{\varrho} \left(\frac{1}{\nu} \right)^{\varrho} < \frac{3}{\varrho} \left(\frac{1}{\nu} \right)^{\varrho} < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

A (35), (36) és (37) együtt adja, hogy

$$|H_n[f]_{x=a}| = \sum_{a \leq x_k} (x_k - a)^q l_k^2(a) (v_k(a) - \rho) < \varepsilon \quad (38)$$

és ezt akartuk bebizonyítani. A (38)-ból következik, figyelembe véve a $v_k(a) - \rho \geq \rho > 0$ egyenlőtlenséget, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{a \leq x_k} (x_k - a)^q l_k^2(a) = 0. \quad (39)$$

Ugyanígy be lehet bizonyítani a

$$g(x) = \begin{cases} (a-x)^q & \text{ha } -1 \leq x \leq a \\ 0 & \text{ha } a \leq x \leq +1 \end{cases} \quad (40)$$

függvény segítségvételével, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_k \leq a} (a - x_k)^q l_k^2(a) = 0. \quad (41)$$

A (39) és (41) együtt adja, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |a - x_k|^q l_k^2(a) = 0. \quad (42)$$

A (42)-ből következik, hogy tetszőleges fix $\delta > 0$ -ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|a - x_k| > \delta} l_k^2(a) = 0, \quad (43)$$

tehát, ha $\varepsilon > 0$ adott fix szám,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a - x_k| l_k^2(a) &= \sum_{|a - x_k| \leq 2\varepsilon\rho} |a - x_k| l_k^2(a) + \sum_{|a - x_k| > 2\varepsilon\rho} |a - x_k| l_k^2(a) < \\ < 2\varepsilon\rho \sum_{k=1}^n l_k^2(a) + 2 \sum_{|a - x_k| > 2\varepsilon\rho} l_k^2(a) < 2\varepsilon\rho \frac{1}{2\rho} + 2 \sum_{|a - x_k| > 2\varepsilon\rho} l_k^2(a) \rightarrow \varepsilon. \end{aligned} \quad (44)$$

Vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |a - x_k| l_k^2(a) = 0. \quad (45)$$

Mivel a tetszőleges hely volt a $-1 \leq x \leq +1$ számközben, kapjuk, hogy szigorú értelemben szabályos pontcsoportokra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |x - x_k| l_k^2(x) = 0. \quad (46)$$

Ennek egy érdekes, de a továbbiakban nem használandó következménye, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)} \right)^2 = 0. \quad (47)$$

A (46) reláció egyenletesen érvényes az egész $-1 \leq x \leq +1$ számközben, mert két különböző a -ra képzett $f(x) - f_v(x)$ különbségek ugyanazon v -re tehetők kicsivé, továbbá, ha ezt a v -t fixáltuk, a különböző a -kra képzett $f_v(x)$ függvényekre a $H_n[f_v]$ a megfelelő a helyeken ugyanazon n -től kezdve válik kicsivé. Röviden ezt úgy is ki lehet fejezni, hogy a használt becslések mind a -tól függetlenek voltak.

5. A bizonyítás további része a

$$\sum_{k=1}^n |x - x_k| l_k^2(x) \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty \quad (48)$$

reláció felhasználásával már egyszerű. Legyen $f(x)$ egy tetszőleges a $-1 \leq x \leq +1$ számközben folytonos függvény és legyen $\varepsilon > 0$ adott kis szám. Határozzuk meg a $P(x)$ polinómot úgy, hogy

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon/3, \quad -1 \leq x \leq +1. \quad (49)$$

Ez WEIERSTRASS approximációs tétele miatt lehetséges. Jelölje M a $|P'(x)|$ maximumát a $-1 \leq x \leq +1$ számközben, vagyis $M = \max_{-1 \leq x \leq +1} |P'(x)|$. (48) miatt elég nagy n -től kezdve

$$\left| \sum_{k=1}^n P'(x_k) (x - x_k) l_k^2(x) \right| < M \sum_{k=1}^n |x - x_k| l_k^2(x) < \varepsilon/3, \quad (50)$$

tehát elég nagy n -re

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n f(x_k) v_k(x) l_k^2(x) - f(x) \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^n f(x_k) v_k(x) l_k^2(x) + P(x) - f(x) - P(x) \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^n f(x_k) v_k(x) l_k^2(x) - \sum_{k=1}^n P(x_k) v_k(x) l_k^2(x) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^n P'(x_k) (x - x_k) l_k^2(x) + P(x) - f(x) \right| = \quad (51) \\ & = \left| \sum_{k=1}^n (f(x_k) - P(x_k)) v_k(x) l_k^2(x) + P(x) - f(x) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^n P'(x_k) (x - x_k) l_k^2(x) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - P(x_k)| v_k(x) l_k^2(x) + |P(x) - f(x)| + \\ & + \sum_{k=1}^n |P'(x_k)| |x - x_k| l_k^2(x) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + M \sum_{k=1}^n |x - x_k| l_k^2(x) < \varepsilon, \end{aligned}$$

amiből adódik, hogy tetszőleges folytonos $f(x)$ függvényre

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) v_k(x) l_k^2(x) \Rightarrow f(x), \text{ ha } n \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Az (48) és (52)-ből következik, hogy tetszőleges folytonos $f(x)$ függvényre

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) v_k(x) l_k^2(x) + \sum_{k=1}^n d_k(x - x_k) l_k^2(x) \Rightarrow f(x), \text{ ha } n \rightarrow \infty, \quad (52a)$$

hacsak a $|d_k|$ számok a k -tól és n -től független korlát alatt maradnak, amivel tételünket bebizonyítottuk.

6. Ha a pontesoportsorozatról csak azt tudjuk, hogy szabályos, tehát, hogy

$$v_k(x) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad (53)$$

akkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan ϱ , hogy

$$v_k(x) \geq 2\varrho > 0 \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots, \quad -1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon. \quad (54)$$

Tehát érvényes a következő tétel: *Tetszőleges a $-1 \leq x \leq +1$ számközben folytonos $f(x)$ függvény szabályos pontesoporthoz tartozó általánosított lépcsőparabolái minden a $-1 \leq x \leq +1$ számköz belsejében fekvő részközben egyenletesen konvergálnak az $f(x)$ függvényhez.* Ugyanígy, ha az (54) csak egy a $(-1 \leq) a \leq x \leq b (\leq 1)$ számközben teljesül, akkor ennek az $a \leq x \leq b$ számköznek minden belsejében fekvő részközében van egyenletes konvergencia.

A szigorú értelemben szabályos pontesoportokra levezetett (48) relációból érdekes következtetések vonhatók le más interpolációs kérdések esetében is, így pl. a LAGRANGE-féle interpolációs polinómok konvergencia-kérdése esetében is; ezeknek részletezésére azonban itt nem térünk ki.

Grünwald Géza.

ÜBER DIE HERMITESCHE INTERPOLATION.

Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $-1 \leq x \leq +1$ stetige Funktion. Das Hermitesche Interpolationspolynom der Funktion $f(x)$ ist die einzige ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$ -tem Grade, die an dem gegebenen Stellen (1) mit der Funktion $f(x)$ zusammenfällt und deren Ableitung an denselben Stellen der Reihe nach die gegebenen Werte $d_k^{(n)}$ ($k=1, 2, \dots, n$) annimmt. Die explizite Form dieses Polynoms ist mit den Formeln (6), (7), (8) gegeben. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der folgende allgemeine Satz: Wenn die «Punktgruppenfolge» (13) so beschaffen ist, dass die Ungleichung (14) für alle k und n in sämtlichen Punkten des Intervalls $-1 \leq x \leq +1$ gültig ist, dann konvergiert die Folge (15) der Interpolationspolynome der beliebigen im Intervalle $-1 \leq x \leq +1$ stetigen Funktion $f(x)$ gleichmässig gegen $f(x)$, wenn nur $|d_k^{(n)}| < A$ (wo A eine von k und n unabhängige Konstante ist). Die Hauptschwierigkeit des Beweises ist der Beweis von (48) (\Rightarrow bezeichnet gleichmässige Konvergenz). Zu diesem Zweck beweisen wir, dass die mit der Formel (26) an der Stelle a gegebenen Interpolationspolynome der in (25) definierten Funktion gegen 0 konvergieren. Die Relation (45) folgt nämlich leicht daraus. Die Konvergenz von (26) ergibt sich aus der für alle in (27) definierten $f_\nu(x)$ ($\nu=1, 2, \dots$) geltende Limesgleichung (20) und aus der Relation $f_\nu(x) \Rightarrow f(x)$.

Géza Grünwald.

A HAAR-FÉLE VARIÁCIÓS LEMMA ÉS ALKALMAZÁSAI.

Bevezetés.

A többdimenziós variációproblémák elméletében az első variáció vizsgálata a következő kérdésre vezet: milyeneknek kell lenniök a g, v_1, v_2, \dots, v_n függvényeknek ahhoz, hogy valamely n -dimenziós B tartományban

$$K(\zeta) = \int_B \left(g\zeta + v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \dots + v_n \frac{\partial \zeta}{\partial x_n} \right) dV = 0 \quad (1)$$

$$(dV = dx_1 dx_2 \dots dx_n)$$

legyen minden olyan egyszer folytonosan differenciálható ζ -ra, amely a B határán eltűnik. Ugyanis a szokásos módszerekkel adódik, hogy az

$$I = \int_B f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) dV = \min. \quad (2)$$

$$\left(p_\alpha = \frac{\partial z}{\partial x_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, n \right)$$

variációproblémának (a z értékeit a B határán előre megadva) első szükséges feltétele

$$I'(\zeta) = \int_B \left(\frac{\partial f}{\partial z} \zeta + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial \zeta}{\partial x_n} \right) dV = 0 \quad (3)$$

minden, a határon eltűnő ζ -ra. (Ha ez a feltétel teljesül, z -t a probléma extrémálásának mondjuk.)

A régebbi tárgyalásban az (1), ill. (3) feltételt a GREEN-féle tétel ($n = 1$ esetében parciális integráció) segítségével úgy ala-

kíttették át, hogy ζ differenciálhányadosai ne szerepeljenek benne. Azután felhasználták azt az egyszerű tételt, hogy a 0 az egyetlen olyan függvény, amely valamennyi, a határon eltűnő ζ -ra ortogonális, s így adódik az EULER-LAGRANGE differenciálegyenlet:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

A GREEN-féle tétel alkalmazásánál ki kell kötnünk, hogy valamennyi v_{α} (ill. $\frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}$) egyszer folytonosan differenciálható minden x_{β} szerint, amit — az f függvényre vonatkozó megfelelő feltevésen kívül — legegyszerűbben úgy biztosíthatunk, ha feltesszük, hogy a z extrémális függvény kétszer folytonosan differenciálható. Ez a feltevés túlságosan erős és nem illik össze a probléma természetével, mert hiszen a problémában csak az első deriváltak szerepelnek. Azonkívül nagyon megnehezíti a variációs problémákra és a velük kapcsolatos másodrendű parciális differenciálegyenletekre vonatkozó existencia-bizonyításokat és az extrémális analitikus természetének vizsgálatát is.

Az extrémális kétszeri folytonos differenciálhatóságának fel-tételét a legegyszerűbb, egydimenziós, esetben DU BOIS-REYMOND által eliminálta, hogy nem ζ -t, hanem a ζ -t tartalmazó tagot integrálta parciálisan és a további tárgyalást a következő lemmára alapította:

Ha az $a \leq x \leq b$ intervallumban folytonos $u(x)$ függvényre és bármely, az a és b helyen eltűnő, az intervallum belsejében egyszer folytonosan differenciálható $\zeta(x)$ függvényre áll az

$$\int_a^b u \zeta' dx = 0$$

reláció, akkor $u = \text{konstans}$.

Ez a lemma az egydimenziós esetben ugyancsak az EULER-LAGRANGE-féle differenciálegyenletre vezet, de abban az élesebb formában, hogy a benne szereplő $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)$ differenciálhányados létezését nem kell feltennünk, hanem bebizonyítjuk. Ha még

feltesszük, hogy $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \neq 0$, akkor a z kétszer (sőt akárhányszor) differenciálható. Hasonlót nem várhatunk az n -dimenziós esetben, mert, mint HADAMARD¹ egy egyszerű példán megmutatta, az extrémális második deriváltjai kétváltozós variációproblémák esetében nem szükségképpen léteznek.

HAAR ALFRÉDnek mégis sikerült a DU BOIS-REYMOND-féle módszereket többdimenziós variációs problémákra átvinni. Vizsgálatait a DU BOIS-REYMOND-féle lemma egy általánosítására építi fel, amely a kétdimenziós esetben a következőképpen hangzik:²

Ha valamely síkbeli B tartományban folytonos g , u , v függvényekre és bármely, B határán eltűnő és B belsejében egyszer folytonosan differenciálható ξ függvényre áll az

$$\iint_B \left(g\xi + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

reláció, akkor van három oly G , U , V függvény, hogy

$$g = -G_{xy}, \quad u = U_y, \quad v = V_x, \quad G + U + V = 0. \quad (4)$$

A (4) relációt nyilván a következő alakban is ki lehet mondani:³

¹ J. HADAMARD, Sur les variations des intégrales doubles, *Comptes Rendus Paris*, **144**, (1907), 1092—1093. old.

² HAAR A., A kettős integrálok variációjáról, *Math. és Természettudományi Értesítő*, **35**, (1917), 1—19. oldal; A. HAAR, Über das Plateausche Problem, *Math. Annalen*, **97** (1927), 124—158. oldal. Az utóbb idézett dolgozatban HAAR arra az esetre is kimondta a lemmát, amikor g , u , v korlátos, mérhető függvények.

³ A HAAR-féle lemma így nyert integrálalakja a két-, ill. háromdimenziós esetben szerepel HAAR² alatt idézett dolgozatában, ill. a következő dolgozatban: A. SZÜCS, Sur la variation des intégrales triples et le théorème de Stokes, *Acta Scientiarum Math.*, **3** (1927), 81—95. oldal. E két helyen csak az a speciális eset szerepel, amikor $g=0$; az általános eset erre a GREEN-féle tétel alkalmazásával könnyen visszavezethető. L. még M. CORAL, On the Necessary Conditions for the Minimum of a Double Integral, *Duke Math. Journal*, **3** (1937), 585—592. oldal. Egyébként az integrálalak a kétdimenziós esetben közbeeső eredményként szerepel a differenciálegyenlet-rendszer-alak levezetésében például HAAR² alatt idézett és a háromdimenziós esetben SZÜCS most idézett dolgozatában. A levezetésükben tehát burkoltan benne van az a tétel is, hogy az integrálalakból következik a differenciálegyenlet-rendszer-alak.

bármely, a B belsejében fekvő olyan T tartományra, amelynek határa, S szakaszonként folytonos érintőjű görbe,

$$\int_T g dx dy = \int_S (u dy - v dx).$$

Ennek a dolgozatnak 1. §-ában a HAAR-féle lemmára ebben az integrál-alakban új bizonyítást adunk. Ennek a bizonyításnak az az előnye, hogy egyszerre elvégezhető akárhány dimenzióban, míg az a módszer, amellyel HAAR többdimenziós esetben bebizonyította lemmáját⁴, rekurzív természetű, azaz az n -dimenziós esetet az $n-1$ -dimenziósra vezeti vissza. (Például a 2-dimenziós esetet a DU BOIS-REYMOND-féle lemmára, míg a tárgyalandó módszer erre a lemmára is új bizonyítást ad.) Egyszerűbb bizonyítást adunk a HAAR-lemma HAARTÓL ÉS SCHAUDERTÓL⁵ eredő megfordítására is.

HAAR lemmáját a fentemlített (2) alakú (u. n. fix határú) variációproblémára alkalmazta. Ezáltal az első variáció eltűnését az EULER-LAGRANGE-féle egyenlet helyett olyan egyenletrendszerrel fejezte ki, amelyben az extrémálisnak csak az első differenciálhányadosai szerepelnek. Ezt az egyenletrendszert, amely $n=2$ esetében a következő:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x dy}, \quad U + V + W = 0,$$

a (2) probléma HAAR-féle egyenletrendszerének fogjuk nevezni. A változó határú problémát GERGELY⁶ tárgyalta a HAAR-féle lemma segítségével. GERGELY eredményét az ú. n. hengeres esetben egyszerűbb módszerekkel fogjuk levezetni.

A 2. §-ban a HAAR-féle lemmát a második variáció JACOBI-féle elméletére alkalmazzuk.

⁴ A. HAAR, Zur Variationsrechnung, *Abhandlungen Math. Seminar Hamburg*, 8 (1931), 1—27. old.

⁵ J. SCHAUDER, Über die Umkehrung eines Satzes aus der Variationsrechnung, *Acta Scientiarum Math.*, 4 (1928—29), 38—50. old.

⁶ F. GERGELY, Über die Variation von Doppelintegralen mit einer variierender Begrenzung, *Acta Scientiarum Math.*, 2 (1924—26), 139—146. oldal.

A klasszikus módszerek adják, hogy a (2) variációproblémának az első variáció eltűnésén kívül további szükséges feltétele:

$$I''(\zeta) = \int_B \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \zeta^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \right) dV \geq 0 \quad (5)$$

minden megengedett (azaz B határán eltűnő és B -ben egyszer folytonosan differenciálható) ζ -ra. A baloldalon álló integrált az I integrál második variációjának fogjuk nevezni. Az (5) egyenlőtlenséghez viszont, mint ismeretes, szükséges, hogy a

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} y_\alpha y_\beta \quad (6)$$

kvadratikusság alak ne vegyen fel negatív értéket, azaz vagy pozitív definit, vagy pozitív szemidefinit legyen (LEGENDRE-féle feltevés). Az első esetben, amikor tehát Q pozitív definit (bármely, B -be eső (x_1, x_2, \dots, x_n) értékrendszer mellett), a (2) variációproblémát a z extrémálisra nézve elliptikusnak nevezzük; a továbbiakban csak elliptikus problémákra szorítkozunk.

Már most a klasszikus variációszámítás a második variáció további vizsgálata végett minden z extrémálisához (feltéve z kétszeri folytonos differenciálhatóságát), hozzárendeli a következő, ú. n. akcesszorius (JACOBI-féle) parciális differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} u \right),$$

ahol u az ismeretlen függvény. E parciális differenciálegyenlet és a második variáció közötti kapcsolatot fejezi ki a következő két tétel: 1. Ha az akcesszorius differenciálegyenletnek van olyan megoldása, amely B -nek sem belső, sem határpontjában nem 0, akkor a második variáció pozitív minden megengedett ζ -ra. 2. Ha az akcesszorius differenciálegyenletnek van olyan nem triviális megoldása, amely valamely, B belsejében fekvő

síma, zárt S felületen mindenütt eltűnik, akkor van olyan megengedett ξ , amely mellett a második variáció negatívvá válik. Ismeretes továbbá, hogy, ha $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ a t minden értéke mellett extrémálisa a (2) problémának, akkor $u = \frac{\partial z}{\partial t}$ megoldása az akcesszorius differenciálegyenletnek.

Ezeket a tételeket HAAR vitte át arra az esetre, amikor az extrémálisról csak egyszeri folytonos differenciálhatóságot teszünk fel (l. a ⁴ lábjegyzetet). E célból az akcesszorius differenciálegyenletet olyan differenciálegyenletrendszerrel helyettesítette, amelyben z -nek csak az első deriváltjai szerepelnek s amely hasonló eljárással (polarizálás) adódik az első variáció eltűnését kifejező HAAR-féle egyenletrendszerből, mint az akcesszorius egyenlet a klasszikus EULER-LAGRANGE-féle differenciálegyenlethől. HAAR eredményeit a 2. §-ban egyszerűbb módszerrel vezetjük le azáltal, hogy a HAAR-féle akcesszorius egyenletrendszer helyett egy akcesszorius variációproblémát vizsgálunk, amelynek EULER-LAGRANGE-féle egyenlete épp az akcesszorius egyenlet, a HAAR-féle egyenletrendszere pedig épp a most említett HAAR-féle akcesszorius egyenletrendszer.⁷

A 3. §-ban reguláris variációproblémák extrémálásának analitikus természetét vizsgáljuk. A (2) problémát akkor nevezzük regulárisnak, ha a Q quadratikusan alak minden B -be eső, továbbá a z, p_1, p_2, \dots, p_n független változók minden értékénél pozitív definit.

A legismertebb reguláris variációprobléma a DIRICHLET-féle probléma, amelynek a harmonikus függvények, vagyis a LAPLACE-féle differenciálegyenlet megoldásai az extrémálisai. Ismeretes, hogy e megoldások — ha például csak kétszeri folytonos

⁷ Ez az akcesszorius variációprobléma szerepel a következő dolgozatban is: W. T. REID, The Jacobi Condition for the Double Integral Problem of the Calculus of Variations, *Duke Math. Journal*, 5 (1939), 856—870. oldal. REID ugyancsak átvizsgálja a JACOBI-féle elmélet egyes tételeit arra az esetre, amikor nem tesszük fel az extrémális kétszeri folytonos differenciálhatóságát; tárgyalásai azonban komplikáltabbak a mienknél.

differenciálhatóságot teszünk is fel — analitikusak. Ezt a tételt többen általánosították ú. n. elliptikus parciális differenciálegyenletekre. Ezek az általánosítások érvényesek a reguláris variációproblémák extrémálisaira is, mert az elliptikus és ennél fogva a reguláris problémák is, ha az extrémális kétszer differenciálható, elliptikus parciális differenciálegyenletekre vezetnek. A legfontosabb idevágó eredmények a következők: HOPF⁸ bebizonyította, hogy, ha egy elliptikus probléma extrémálisai háromszor folytonosan differenciálhatóak, akkor analitikusak. Speciális (lineáris differenciálegyenletre vezető) esetekben elég kétszeri differenciálhatóságot feltenni. Lényeges haladást jelent ehhez képest MORREY⁹ eredménye, aki az extrémális analitikus természetét pusztán a LIPSCHITZ-feltétel alapján bizonyítja be. MORREY módszere azonban lényegesen felhasználja a komplex változós függvénytan módszereit (a konjugált harmonikus függvény fogalmát) és így a kétdimenziós esethez van kötve. A lineáris differenciálegyenletre vezető, vagyis a (z, p_1, \dots, p_n) -ben quadratikusan probléma esetén azonban jóval egyszerűbb és n -dimenziós esetre is érvényes bizonyítás adható, mint e dolgozatban látni fogjuk. Az általános problémára azonban ezzel a módszerrel csak annyit tudunk bebizonyítani, hogy a második deriváltak majdnem mindenütt léteznek, négyzetesen integrálhatóak és az első deriváltak különbségi hányadosai quadratikusan középértékben konvergálnak a megfelelő második deriválthoz.¹⁰ Egyébként eredményünk nemcsak reguláris variáció-

⁸ E. HOPF, Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), 194—233. oldal.

⁹ Ch. B. MORREY, On the Solutions of Quasi-linear Partial Differential Equations. *Transaction of the American Math. Society*, **43** (1938), 126—166. oldal.

¹⁰ E dolgozat kéziratának első fogalmazványát 1939. júniusában elküldtem J. SCHAUDERnek. SCHAUDER 1939. július 5-én kelt válaszában közölte velem, hogy ezt az eredményt ő is megtalálta és 1939. májusában előadta a lemergi matematikai társulatban. Nem tudom megállapítani, vajjon SCHAUDER nyomtatásban közölte-e ezt az eredményt.

problémákra vonatkozik, amennyiben a Q forma definittségét a (z, p_1, \dots, p_n) -térnek csak egy véges, a szóbanforgó extrémális által meghatározott részében fogjuk felhasználni.

A továbbiakban az írásmód egyszerűsége kedvéért vektorjelöléseket használunk; például az (1) egyenletet így írjuk:

$$\int_B (g\zeta + v \operatorname{grad} \zeta) dV = 0,$$

ahol v a (v_1, v_2, \dots, v_n) vektort, $\operatorname{grad} \zeta$ pedig a $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \zeta}{\partial x_n}\right)$ vektort jelenti. Ezenkívül azzal a tenzorelméletben szokásos megállapodással élünk, hogy, ha valamely görög betűvel jelölt index egy tagban két helyen szerepel egy képletben, akkor ennek az indexnek 1, 2, ..., n értékeire nézve összegezni kell. Így például a (6) quadratikus alakot rövidebben így írjuk:

$$Q(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} y_\alpha y_\beta; \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Ezek a jelölések módot adnak arra, hogy az egész tárgyalást n dimenzióban végezzük, a nélkül, hogy képleteink komplikáltabbak lennének, mint két dimenzióban.

1. §. A HAAR-lemma és korroláriumai.

1. *A HAAR-féle lemma. Tétel.* Legyen B egy n -dimenziós tartomány. $g(x_1, \dots, x_n)$ és $v(x_1, \dots, x_n)$ legyen a B -ben folytonos skaláris, ill. n -dimenziós vektorfüggvény. Ha

$$K(\zeta) = \int_B (\zeta g + v \operatorname{grad} \zeta) dV = 0 \quad (7)$$

minden, a B határán eltűnő folytonosan differenciálható ζ -ra, akkor

$$\int_T g dV = \int_S v_\nu dS \quad (8)$$

bármely, a B belsejében fekvő olyan T tartományra, amelyet egy síma (azaz folytonos normálisú) többszörös pont nélküli

$n-1$ -dimenziós S felület határol.¹¹ Itt v , a v -nak a külső normális irányába eső vetületét jelenti. Érvényes a lemma abban az esetben is, ha g -ről és v -ról csak azt tesszük fel, hogy mérhetőek és korlátosak; akkor azonban a fenti összefüggés nem lesz érvényes minden S -re, hanem csak, bizonyos értelemben, majdnem mindegyikre. Ezen pontosan azt értjük, hogy ha S_2 síma felületek olyan egyparaméteres serege, amelyek összességükben egyszeresen kitöltik a teret (például koncentrikus gömb-sereg), akkor a (8) egyenlőség λ majdnem minden értékére teljesül S_2 -ra és az általa határolt B_2 tartományra.

A tétel rövidebb kimondására a következő kifejezésmodot vezetjük be: Ha (7) teljesül minden, a B határán eltűnő, folytonosan differenciálható ζ -ra, azt mondjuk, a (g, v) pár első variációja 0 és a (g, v) párt variációs párnak nevezzük.¹² Ha pedig (8) teljesül majdnem minden, a B belsejében fekvő síma S felületre és az általa határolt T tartományra, akkor azt mondjuk, a (g, v) -ra teljesülnek B -ben a HAAR-féle összefüggések, ill., hogy (g, v) HAAR-féle pár. Ha nem lehet félreértés, a tartomány megnevezését el is hagyjuk. Ezzel a definícióval a HAAR-lemmát így fogalmazhatjuk:

Minden mérhető és korlátos variációs pár HAAR-féle pár.

Bizonyítás. Először arra a legegyszerűbb esetre bizonyítjuk be a lemmát, amikor v folytonosan differenciálható.

Az első variáció eltűnéséből következik, hogy, ha ζ a T kerületén differenciálhányadosaival együtt 0, akkor

$$\int_T (\zeta g + v \operatorname{grad} \zeta) dV = 0.$$

¹¹ Ha B határa síma felület, akkor T egybeeshetik B -vel is; ugyanez a megjegyzés vonatkozik a HAAR-féle lemma később szereplő általánosításaira is.

¹² Például ha z a (2) probléma extrémálisa, akkor \mathfrak{S} -szel jelölve a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n} \right)$$

vektort, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \mathfrak{S} \right)$ variációs pár.

Ebből a GAUSS-féle divergencia-tétel alapján következik, hogy

$$\int_T \zeta (\operatorname{div} v - g) dV = \int_S \zeta v, dS = 0.$$

Mivel ζ egyébként tetszőleges, a variációszámítás klasszikus tétele alapján következik, hogy

$$g = \operatorname{div} v.$$

Ebből a GAUSS-tétel alapján megkapjuk a HAAK-lemmát:

$$\int_T g dV = \int_S v, dS.$$

Ha v -ről csak annyit teszünk fel, hogy folytonos, akkor előbb egy (G, \mathfrak{B}) folytonosan differenciálható segédpárt vezetünk be a következő definícióval:

$$G(x, u) = \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} g(x + u) du,$$

$$\mathfrak{B}(x, u) = \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} v(x + u) du.$$

A képletben rövidség kedvéért $G(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$, ill. $g(x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n)$ stb. helyett $G(x, u)$, ill. $g(x + u)$ stb.-t, $du_1 du_2 \dots du_n$ helyett pedig du -t írtunk. Hogy definíciónknak mindig legyen értelme, feltesszük, hogy g és v a B -n kívül is definiálva vannak és folytonosak. Ez nem megszorítás, mert, ha nem így volna, (g, v) -t a tartomány határán kívül folytonos függvényekkel folytathatnók.

Bebizonyítjuk, hogy, ha $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 < d$, ahol d tetszőleges pozitív szám, akkor (G, \mathfrak{B}) első variációja is eltűnik minden olyan B -ben fekvő B_1 -ben, amely a B határától legalább d távolságra van. A bizonyítás a következő. Könnyű látni, hogy $(g(x), v(x))$ első variációjának eltűnéséből következik, hogy bármely, a B_1 határán differenciálhányadosaival együtt eltűnő, egyszer folytonosan differenciálható ζ -ra

$$\int_{B_1} [g(x + u) \zeta(x) + v(x + u) \operatorname{grad} \zeta] dV = 0.$$

Integráljuk ezt az egyenlőséget egymásután u_1, \dots, u_n szerint. Azt kapjuk, hogy $(G(x, u), \mathfrak{B}(x, u))$ első variációja is 0 a B_1 tartományban.¹³ $\mathfrak{B}(x, u)$ folytonosan differenciálható mindegyik x szerint. Ezt úgy látjuk be, hogy \mathfrak{B} -t új integrációs változók bevezetésével

$$\mathfrak{B}(x, u) = \int_{x_1}^{x_1+u_1} \dots \int_{x_n}^{x_n+u_n} v(y) dy$$

alakra hozzuk. Folytonosan differenciálható \mathfrak{B} esetére azonban már bebizonyítottuk, hogy érvényes a HAAR-féle lemma. Ennélfogva, ha T a B_1 belsejében fekszik,

$$\int_T G(x, u) dV = \int_S \mathfrak{B}_v(x, u) dS.$$

Differenciáljunk az integráljel alatt sorban u_1, u_2, \dots, u_n szerint és helyettesítsünk $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$ -t. Akkor azt kapjuk, hogy

$$\int_T g(x) dV = \int_S v_v(x) dS$$

bármely, a B_1 -ben fekvő T -re. Tartassuk d -t 0-hoz, akkor megkapjuk a tételt, hogy (g, v) B -ben HAAR-féle pár.

Tárgyaljuk most azt az esetet, amikor g -ről és v -ről csak azt tesszük fel, hogy mérhetőek és korlátosak. Az előző bizonyításmenet csak annyiban módosul, hogy a (G, \mathfrak{B}) segédpáron kívül még a

$$G_1(x, u) = \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_n} G(x, u) du,$$

$$\mathfrak{B}_1(x, u) = \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_n} \mathfrak{B}(x, u) du$$

egyenletekkel definiált (G_1, \mathfrak{B}_1) segédpárt vezetjük be. A végkövetkeztetés pedig annyiban változik, hogy a HAAR-relációk csak majdnem minden felületre érvényesek, mert hiszen az

¹³ Attól a feltevéstől, hogy ζ differenciálhányadosai is eltűnjenek B_1 határán, a «szögletek lekerekítése» ismert módszerével megszabadulhatunk; egyébként a bizonyítás első része mutatja, hogy erre nincs is szükség.

integráljel alatti differenciálás is csak majdnem minden felületre van megengedve.

2. A HAAR-féle lemma megfordítása. Tétel. *Mérhető és korlátos HAAR-féle pár variációs pár.*

Bizonyítás. Ha g és v folytonosan differenciálható, akkor, ha az

$$\int_T g dV = \int_S v, dS$$

HAAR-relációt valamely α pont körüli gömbökre írjuk fel és a gömb sugarát 0-hoz tartatjuk, adódik, hogy

$$g = \operatorname{div} v.$$

Az első variáció eltűnése ebből triviálisan következik a GAUSS-tétel alapján. Ha g -ről és v -ről csak azt tesszük fel, hogy mérhetőek és korlátosak, akkor előbb azt mutatjuk meg, integrációval (hasonlóan, mint a HAAR-lemma bizonyításánál), hogy a HAAR-féle relációk (G, \mathfrak{B}) -ra, ill. (G_1, \mathfrak{B}_1) -re is teljesülnek. Ebből pedig a már bebizonyítottak szerint következik, hogy (G_1, \mathfrak{B}_1) első variációja is eltűnik. Ebből differenciálással következik a tétel az általános esetre. (Differenciálni szabad az integráljel alatt, mert csak térfogatintegrálok fordulnak elő, felületi integrálok nem.)

3. A HAAR-féle lemma általánosítása. Tétel. *Ha egy mérhető és korlátos (g, v) pár első variációja 0 egy bizonyos B tartományban, akkor majdnem minden síma S -re*

$$K(\varphi) = \int_T (g\varphi + v \operatorname{grad} \varphi) dV = \int_S \varphi v, dS$$

(T az S felület határolta tartomány). Itt $\varphi(x)$ egy tetszőszerinti, LIPSCHITZ-féle feltételnek eleget tevő függvényt jelent, amelyet a továbbiakban paraméter-függvénynek nevezünk. Más szóval

$$(g\varphi + v \operatorname{grad} \varphi, \varphi v)$$

HAAR-féle pár a B -ben.

Ugyanez érvényes akkor is, ha az első variáció eltűnése helyett azt tesszük fel, hogy (g, v) HAAR-féle pár.

Bizonyítás. Szorítkozzunk először folytonosan differenciálható $\varphi(x)$ -re. Az első variáció kifejezésében $\zeta(x)$ helyett $\varphi(x)\zeta(x)$ -et helyettesítünk:

$$\int_B [(g\varphi + v \operatorname{grad} \varphi) \zeta + \varphi v \cdot \operatorname{grad} \zeta] dV = 0.$$

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy

$$(g\varphi + v \operatorname{grad} \varphi, \varphi v)$$

első variációja 0. Ha a HAAR-féle lemmát alkalmazzuk, megkapjuk tételünk első részét, egyelőre azonban csak folytonosan differenciálható $\varphi(x)$ -re. A csak LIPSCHITZ-feltételnek eleget tevő φ -kre úgy kapjuk meg a tétel első felét, ha φ -t megfelelő folytonosan differenciálható függvények sorozatával úgy közelítjük meg négyzetes középértékben, hogy a közelítő függvények gradiensei négyzetes középértékben $\operatorname{grad} \varphi$ -hez konvergáljanak. Ilyen megközelítés például $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ FOURIER-sorba fejtéséből adódik. A tétel második fele a HAAR-féle lemma megfordításából következik.

Megjegyzés. A most bebizonyított tétel látszólag triviális általánosítása a HAAR-féle lemmának. Mégis célszerű külön kimondani, mert ellenkező esetben a bizonyításához szükséges fogást ($\varphi\zeta$ helyettesítése ζ helyébe) kellene a továbbiakban gyakran alkalmaznunk. Ez a fogás különben ugyanaz, mint amivel a GREEN-tételt vezetik le a GAUSS-tételből. Tárgyalásunkban az általánosított HAAR-féle lemma ugyanazt a szerepet tölti be, mint a HAAR-féle tárgyalásban a GREEN-tétel. A későbbiekben az általánosított HAAR-lemmát röviden «lemma» névvel is fogjuk idézni.

4. A HAAR-féle lemma alkalmazása a (2) variáció-problémára. Ha z a (2) probléma extrémálisa, akkor, mint a

¹² lábjegyzetben megjegyeztük, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \mathfrak{S}\right)$ variációs pár, ahol

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n}\right).$$

A HAAR-lemmából adódik tehát bármely B -ben fekvő zárt síma S felületre, hogy

$$\int \frac{\partial f}{\partial z} dV = \int_S \mathfrak{E}_\nu dS = \int_S \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \nu_\alpha dS,$$

ahol $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ az S felület külső ν normálisának iránykoszinuszai. Ezt az összefüggést a (2) probléma HAAR-féle relációjának fogjuk nevezni.

A HAAR-lemma megfordításából adódik, hogy viszont, ha z teljesíti a HAAR-féle relációt, akkor extrémálisa a (2) variáció problémának.

5. A HAAR-féle lemma alkalmazása változó határu variációs problémákra. Tekintsük a (2) variációproblémát, azonban a nélkül, hogy z értékeit B határán megadnók. A $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ felületet határoló $n-1$ -dimenziós felület tehát nincs rögzítve, hanem sz. szabadonváltozhat azon az (x_1, x_2, \dots, x_n) térre merőleges hengerfelületen, amely átmegy B határán. Feltesszük, hogy B határa egy síma S felület. Ismeretes és a variációszámítás klasszikus módszereivel adódik, hogy ha z az I integrált e konkurrencia mellett minimummá teszi, akkor S -en teljesíti a

$$\mathfrak{E}_\nu = \frac{\partial f}{\partial p_1} \nu_1 + \frac{\partial f}{\partial p_2} \nu_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_n} \nu_n = 0 \quad (9)$$

feltételt. A klasszikus módszerek azonban megkívánják, hogy z kétszer folytonosan differenciálható legyen. A (9) feltételt GERGELY⁶ bizonyította be arra az esetre, amikor z -ről csak egyszeri differenciálhatóságot teszünk fel. A következőkben GERGELY eredményeit lényegesen rövidebben bizonyítjuk be.

Az ismert módszerrel kapjuk, hogy

$$K(\zeta) = \int_B \left(\frac{\partial f}{\partial z} \zeta + \mathfrak{E} \operatorname{grad} \zeta \right) dV = 0, \quad (10)$$

mégpedig bármely, B -ben folytonosan differenciálható ζ -ra; öbök között azokra is, amelyek S mentén eltűnnek. Enn él-fogva alkalmazhatjuk a HAAR-féle lemma általánosítását és kap-

juk, hogy bármely folytonosan differenciálható φ paraméterfüggvényre

$$K(\varphi) = \int_S \varphi \mathfrak{S}_i dS.$$

A baloldal azonban (10) miatt 0. Minthogy φ az S mentén tetszőleges, adódik a bebizonyítandó (9) egyenlőség.

2. §. A JACOBI-elmélet.

6. *Az akcessorius probléma.* Legyen z a (2) variáció-probléma extrémálisa. A variációs problémának a z extrémális-hoz tartozó akcessorius problémáján a következőt értjük:

$$J = \int_B \mathcal{Q}(u) dV = \min.,$$

ahol¹⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(u) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} u \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} u \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + Q(\text{grad } u). \end{aligned} \quad (11)$$

Az akcessorius probléma első variációja így írható:

$$J'(\zeta) = 2 \int_B \mathcal{Q}(u, \zeta) dV, \quad (12)$$

ahol $\mathcal{Q}(u, v)$ az $\mathcal{Q}(u)$ quadratikus alakhoz tartozó bilineáris alak:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(u, v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} uv + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + v \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\beta} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} uv + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} \frac{\partial(uv)}{\partial x_\alpha} + Q(\text{grad } u, \text{grad } v). \end{aligned} \quad (13)$$

Itt $Q(a, b)$ a Q quadratikus alakhoz tartozó bilineáris alak:

$$Q(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} a_\alpha b_\beta.$$

¹⁴ Emlékeztetünk arra, hogy minden görög indexre, amely valamely tagban kétszer szerepel, összegezni kell 1-től n -ig.

Az \mathcal{Q} alak segítségével az eredeti (2) probléma második variációját így írhatjuk:

$$J''(\zeta) = \int_B \mathcal{Q}(\zeta) dV. \quad (14)$$

$\mathcal{Q}(u, v)$ még a következőképp is írható:

$$\mathcal{Q}(u, v) = gv + v \operatorname{grad} u,$$

ahol

$$g = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$$

és a v vektor α -adik komponense:

$$v_\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} u + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta}.$$

Tehát az akcesszorius probléma HAAR-féle relációja a következő:

$$\int_T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} u + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) dV = \int_S \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} u + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) \nu_\alpha dS.$$

7. Tétel. Legyen a probléma elliptikus és az extrémálisa folytonosan differenciálható, akkor

1. Ha van az akcesszorius problémának egy folytonosan differenciálható u extrémálisa, amelyik a zárt (azaz torlódási pontjaival kiegészített) B tartományban sehol sem 0, akkor a második variáció minden nem identikusan eltűnő megengedett (azaz B -ben és B határán eltűnő és folytonosan differenciálható) ζ -ra pozitív.

2. Ha van az akcesszorius problémának egy folytonosan differenciálható u extrémálisa, amely egy, a B tartomány belsejében fekvő síma, zárt S felületen mindenütt 0, de $\operatorname{grad} u$ az S -en nem identikusan 0, akkor van olyan megengedett ζ , amelyre az első variáció negatív.

3. Ha $z(x, t)$ az eredeti problémának folytonosan differenciálható extrémálisserege t paraméterrel, továbbá $\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial t}$ egyszer folytonosan differenciálható függvénye x_1, x_2, \dots, x_n -nek, akkor \dot{z} extrémálisa az akcesszorius problémának.

Bizonyítás. 1. Legyen ζ valamely megengedett függvény, továbbá legyen u az akcesszorius problémának B -ben sehol sem eltűnő extrémálisa. Akkor $\frac{\zeta^2}{u}$ is megengedett függvény, tehát (12) folytán

$$\int_B \mathcal{Q}\left(u, \frac{\zeta^2}{u}\right) dV = 0. \quad (15)$$

Itt (13) és (10), továbbá a

$$\text{grad } \frac{\zeta^2}{u} = \frac{2\zeta}{u} \text{grad } \zeta - \frac{\zeta^2}{u^2} \text{grad } u$$

és az

$$u \text{ grad } \frac{\zeta}{u} = \text{grad } \zeta - \frac{\zeta}{u} \text{grad } u$$

identitások figyelembevételével

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\left(u, \frac{\zeta^2}{u}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \zeta^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_a} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_a} + Q\left(\text{grad } u, \text{grad } \frac{\zeta^2}{u}\right) = \\ &= \mathcal{Q}(\zeta) - Q(\text{grad } \zeta) + \frac{2\zeta}{u} Q(\text{grad } u, \text{grad } \zeta) - \frac{\zeta^2}{u} Q(\text{grad } u) = \\ &= \mathcal{Q}(\zeta) - Q(\text{grad } \zeta - \frac{\zeta}{u} \text{grad } u) = \\ &= \mathcal{Q}(\zeta) - Q\left(u \text{ grad } \frac{\zeta}{u}\right). \end{aligned}$$

Tehát (15) így írható:

$$\int_B \mathcal{Q}(\zeta) dV = \int_B Q\left(u \text{ grad } \frac{\zeta}{u}\right) dV.$$

Itt $\text{grad } \frac{\zeta}{u}$ nem identikusan 0 a B tartományban, mert különben $\frac{\zeta}{u}$ konstans volna, ellentétben azzal, hogy ζ a kerületen mindenütt 0, belül pedig nem mindenütt 0. Mivel Q pozitív definit, a jobboldali integrál pozitív. Tehát (14) figyelembevételével

$$I''(\zeta) > 0.$$

2a. Először megmutatjuk, hogy az első variációt 0-vá tehetjük egy nem identikusan eltűnő, folytonos és az S felület kivételével

vel folytonosan differenciálható $\zeta = \zeta_1$ -gyel. Evégett ζ_1 -nek a következő függvényt választjuk:

$$\zeta_1 = \begin{cases} u & T\text{-ben} \\ 0 & \text{mindenütt másutt,} \end{cases}$$

ahol u az akcesszorius problémának az S felületen eltűnő extrémálisa, T pedig az S által határolt tartomány. Bár ζ_1 nem megengedett függvény, a szögletlekerekítés ismert módszerével adódik, hogy az akcesszorius probléma első variációja ζ_1 -re 0, azaz

$${}^{1/2}J'(\zeta_1) = \int_B \mathcal{Q}(u, \zeta_1) dV = 0.$$

Jelen esetben azonban

$$\mathcal{Q}(u, \zeta_1) = \mathcal{Q}(\zeta_1, \zeta_1) = \mathcal{Q}(\zeta_1).$$

(S -en belül azért, mert $u = \zeta_1$; S -en kívül, mert mindkét oldal 0.) Tehát csakugyan

$$I''(\zeta_1) = \int_B \mathcal{Q}(\zeta_1) dV > 0.$$

2b. Legyen most

$$\zeta_2 = \zeta_1 + kv,$$

ahol v egy később megválasztandó, a B határán eltűnő folytonosan differenciálható függvény, k egy később megválasztandó konstans. Nyilván

$$I''(\zeta_2) = \int_B \mathcal{Q}(\zeta_2) dV = \int_B \mathcal{Q}(\zeta_1) dV + 2k \int_B \mathcal{Q}(\zeta, v) dV + k^2 \int_B \mathcal{Q}(v) dV. \quad (16)$$

Minthogy bármely megengedett ζ -ra

$${}^{1/2}J'(\zeta) = \int_B \mathcal{Q}(u, \zeta) dV = \int_B (g\zeta + v \operatorname{grad} \zeta) dV = 0,$$

a lemmát a v paraméterfüggvénnyel az S felületre alkalmazva adódik:

$$\begin{aligned} \int_B \mathcal{Q}(\zeta_1, v) dV &= \int_T \mathcal{Q}(u, v) dV = \int_T (gv + v \operatorname{grad} v) dV = \int_S v v_\nu dS = \\ &= \int_S v \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \nu_\beta = \\ &= \int_S v Q(\operatorname{grad} u, v) dS, \end{aligned}$$

mert S -en $u = 0$. Azt állítom, van olyan v , amelyre ez az integrál nem 0. Ellenkező esetben ugyanis az S felületen

$$Q(\text{grad } u, v) = 0. \quad (17)$$

Kimutatjuk, hogy ez ellenmondáshoz vezet azzal a feltevésünkkel, hogy $\text{grad } u \neq 0$ az S -en.

Ugyanis

$$Q(\text{grad } u, v) = a \text{ grad } u,$$

ahol a az a vektor, amelynek α -adik összetevője

$$a_\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} v_\beta.$$

Ha ez a skaláris szorzat 0, akkor $\text{grad } u$ -nak az a irányába eső komponense is 0. Ez az irány nem esik az S felület érintő síkjába, mert különben

$$av = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} v_\alpha v_\beta = Q(v) = 0$$

volna, ellentétben azzal, hogy Q pozitív definit. Másrészt $\text{grad } u$ -nak az S érintősíkjába eső komponensei mind eltűnnek, mert az u az S felületen állandó (t. i. 0). Ennélfogva (17)-ből következne, hogy, feltevésünkkel ellentétben, $\text{grad } u$ minden összetevője 0.

Ebből azonban adódik, hogy (16) jobboldala k alkalmas (t. i. $\int_T \Omega(u, v) dV$ -vel ellenkező előjelű és abszolút értékre elég kicsi) értékeire negatív. A ζ_2 -ből a szögletlekerekítés módszerével olyan megengedett ζ -t alkothatunk, amelyre nézve $I''(\zeta)$ szintén negatív.

3. Minthogy $z(x, t)$ a t minden értékénél extrémálisa a (2) problémának, a HAAR-féle lemma szerint bármely síma S felületre

$$\int_T \frac{\partial f}{\partial z} dV = \int_S \mathfrak{E}_v dS = \int_S \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} v_\alpha dS.$$

Differenciálva t szerint

$$\int_T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) dV = \int_T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_\alpha} \dot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \dot{p}_\beta \right) \nu_\alpha dS.$$

Ez épp az akcesszorius probléma HAAR-féle relációja $u = \dot{z}$ -ra; \dot{z} tehát extrémálisa az akcesszorius problémának.

3. §. Elliptikus problémák extrémálisainak analitikus természetéről.

8. Feltételek. A problémához tartozó $f(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ a B tartományban minden változójára analitikus. A probléma extrémálisa mindegyik x -ben LIPSCHITZ-feltételnek tesz eleget.

(Ennélfogva mindegyik $p_\alpha = \frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ parciális derivált majdnem mindenütt létezik, korlátos és mérhető.) Nevezzük E -nek a $2n+1$ dimenziós (x, z, p) térben fekvő $(x_1, \dots, x_n, z(x), p_1(x), \dots, p_n(x))$ pontok halmazát, ahol x a B -ben változik. Legyen d tetszés szerint megadott (akármilyen kis) pozitív szám; $H = H_d$ -nek nevezzük azt a halmazt, amely E -ből a következő kiegészítéssel keletkezik: E bármely két olyan pontjához, amelyeknek az $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ térbe eső vetületeinek távolsága kisebb, mint d , vegyük hozzá az összekötő szakaszuk pontjait is. Feltesszük, hogy, ha $(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ változórendszer H -ba esik, akkor teljesül a problémára a LEGENDRE-feltétel a következő erősebb értelemben:

$$Q(\eta) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} y_\alpha y_\beta \geq m \eta^2$$

bármely η -ra. (Az m egy pozitív konstansot jelent, amely sem η -tól, sem $x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n$ -től nem függ.)

Tétel. a) Az extrémális második deriváltjai majdnem mindenütt léteznek, négyzetesen integrálhatók és az első deriváltak különbségi hányadosai négyzetes középértékben konvergálnak a megfelelő deriváltakhoz. b) Ha az f a z, p_1, \dots, p_n változóktól négyzetesen függ, akkor az extrémális analitikus.

9. Hogy a bizonyítást egyszerűbben leírassuk, alkalmazzuk a következő jelöléseket:

$$g^k(h) = g(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

ahol $g = g(x_1, \dots, x_n)$ tetszőleges függvény;

$$f^k(h) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n, z^k(h), p_1^k(h), \dots, p_n^k(h))$$

(ha csak g -t vagy f -et írunk, azon $g(x_1, \dots, x_n)$ -et, illetve $f(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ -et értjük),

$$\Delta_h^k g = g^k(h) - g,$$

$$D_h^k g = \frac{\Delta_h^k g}{h}.$$

($k=1$ esetében nem írjuk ki a felső indexet; a h indexet és az integrációs tartományt sem írjuk ki, ha ez nem okozhat félreértést.)

Segédtételek. 1) Legyen adva egy LEBESGUE-értelemben négyzetével együtt integrálható függvény. Ha a függvény különbségi hányadosainak négyzetintegráljai egy h -tól függetlenül korlát alatt maradnak, akkor a függvény parciális deriváltjai majdnem mindenütt léteznek, négyzetesen integrálhatóak és a különbségi hányadosok négyzetes középértékben (erősen) konvergálnak a megfelelő deriváltakhoz.¹⁵

2) Ha egy négyzetesen integrálható (g_k, v_k) sorozat minden tagjára teljesülnek az általános HAAR-féle relációk minden síma S -re és a sorozat erősen konvergál egy (g, v) párhoz, akkor (g, v) -ra is teljesülnek az általánosított HAAR-relációk. Ha egy (g, v) -ra teljesül az általánosított lemma minden, LIPSCHITZ-feltételnek eleget tevő φ paraméterfüggvénnyel, akkor teljesül minden olyan φ paraméterfüggvénnyel is, amelyet meg lehet közelíteni LIPSCHITZ-feltételnek eleget tevő φ_k függvények sorozatával úgy, hogy φ_k erősen konvergáljon φ -hez, $\text{grad } \varphi_k$ pedig $\text{grad } \varphi$ -hez.

¹⁵ SÓLYI, Über funktionen, die ein endliches Dirichlet'sches Integral haben. *Acta Scientiarum Math.* 10 (1941), 48—54. oldal.

(Ezek az állítások triviálisan következnek abból a tételből, hogy az erős konvergenciából következik a gyenge.)

Bizonyításmenet. *a)* A HAAR-lemmával a p_α -k különbségi hányadosainak négyzetintegráljaira egy differenciál-egyenlőtlenséget vezetünk le. Ennek az egyenlőtlenségnek segítségével bebizonyíthatjuk, hogy az említett négyzetintegrálok h -tól független korlát alatt maradnak. Az 1. segédteletből következik tételünknek a második deriváltakra vonatkozó része. *b)* Quadratikus problémák esetében az eljárást ismételjük és így bebizonyítjuk, hogy az extrémális akárhányszor differenciálható. Az analitikusság HOPF-nak a bevezetésben idézett tételéből következik.

Bizonyítás. *a)* Legyen P a B tartomány belső pontja; jelöljük a P középpontú, r sugarú gömböt G_r -rel, felületét K_r -rel. Válasszuk R -et úgy, hogy G_{2R} a B belsejében feküdjék; megmutatjuk, hogy a tétel *a)* állítása igaz a G_R gömbben. Ebből maga az *a)* állítás könnyen adódik, mert B kitölthető ilyen G_R gömbökkel.

Legyen $|h| \leq d$; alkalmazzuk az általánosított HAAR-lemmát először a $\left(\frac{\partial f(h)}{\partial z}, \mathfrak{E}(h)\right)$ azután a $\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \mathfrak{E}\right)$ párra. Mindkét alkalommal Δz -t választjuk paraméterfüggvénynek. Így a következő egyenleteket kapjuk:

$$\int_{G_r} \left(\frac{\partial f(h)}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f(h)}{\partial p_\alpha} \right) dV = \int_{K_r} \Delta z \mathfrak{E}(h)_r dS,$$

$$\int_{G_r} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \Delta p_\alpha \right) dV = \int_{K_r} \Delta z \mathfrak{E}_r dS.$$

Ezek az egyenletek érvényesek majdnem minden r -re. Kivonjuk a két egyenletet egymásból és a különbséget osztjuk h -val:

$$\int_{G_r} \left\{ \left(\frac{\partial f(h)}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \right) D z + \left(\frac{\partial f(h)}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right) D p_\alpha \right\} dV = \int_{K_r} D z (\mathfrak{E}(h) - \mathfrak{E})_r dS.$$

Az integráljel alatti különbségekre alkalmazzuk a LAGRANGE-féle középértéktételt és osztunk h -val. Csekély átrendezés után egyenletünk a következőkép alakul:

$$\begin{aligned}
\int_{G_r} \frac{\partial^2 f^*}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} Dp_\alpha Dp_\beta dV &= - \int_{G_r} \frac{\partial^2 f^*}{\partial p_\alpha \partial x_1} Dp_\alpha dV - 2 \int_{G_r} \frac{\partial^2 f^*}{\partial p_\alpha \partial z} Dz Dp_\alpha dV - \\
&- \int_{G_r} \left[\frac{\partial^2 f^*}{\partial z \partial x_1} Dz + \frac{\partial^2 f^*}{\partial z^2} (Dz)^2 \right] dV + \\
&+ \int_{K_r} Dz \left(\frac{\partial^2 f^*}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} Dp_\beta + \frac{\partial^2 f^*}{\partial p_\alpha \partial z} Dz + \frac{\partial^2 f^*}{\partial p_\alpha \partial x_1} \right) \nu_\alpha dS
\end{aligned}$$

A \star azt jelenti, hogy a változókat nem az $(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ helyen, hanem egy, az $(x_1 + h, x_2, \dots, x_n, z(h), p_1(h), \dots, p_n(h))$ és $(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ pontot összekötő szakaszon fekvő helyen kell venni.

Ebből az egyenlőségből egy egyenlőtlenséget kapunk oly módon, hogy a baloldalt a LEGENDRE-feltétel segítségével alulról, a jobboldalt a SCHWARTZ-egyenlőtlenséggel felülről becsüljük. (A LEGENDRE-feltétel teljesül, mivel $(x_1^*, x_2, \dots, x_n, z^*, p_1^*, \dots, p_n^*)$ a H -ba esik.) Vezessük be a következő jelöléseket:

$$I(r) = \int_{G_r} (Dp_\alpha)^2 dV,$$

$$i(r) = \int_{K_r} (Dp_\alpha)^2 dS$$

($i(r)$ csak majdnem minden r -re létezik, mert Dp_α csak majdnem minden K_r -en mérhető). Ezekkel a jelölésekkel a becslés a következő eredményt adja:

$$mI(r) \leq A I(r)^{1/2} + B i(r)^{1/2} + C,$$

ahol A, B, C függetlenek r -től. Tekintetbe véve, hogy $i(r) = I(r)$, a következő egyenlőtlenségre jutunk:

$$B^2 I(r) \geq (mI(r) - A I(r)^{1/2} - C)^2 = m^2 I(r)^2 \left(1 - \frac{A}{mI(r)^{1/2}} - \frac{C}{mI(r)} \right)^2. \quad (18)$$

Azt állítjuk, hogy

$$I(R) \leq \lambda = \frac{4A^2 + C^2 + \frac{4B^2}{R}}{m^2}.$$

Ellenkező esetben, minthogy $I(r)$ monoton növekvő, az $(R, 2R)$ intervallumban mindenütt

$$I(r) > \lambda,$$

tehát (18) miatt

$$B^2 I'(r) \geq m^2 I(r)^2 \left(1 - \frac{A}{m\lambda^{1/2}} - \frac{C}{m\lambda} \right)^2,$$

azaz:

$$B^2 \frac{I'}{I^2} \geq \frac{m^2}{4}$$

és ebből integrációval:

$$B^2 \left(\frac{1}{I(R)} - \frac{1}{I(2R)} \right) \geq \frac{m^2 R}{4}.$$

Ebből következik, hogy

$$I(R) \leq \frac{4B^2}{m^2 R}.$$

Vagyis ellentmondásra jutunk. Bebizonyítottuk tehát, hogy $I(R)$ a h -tól független korlát alatt van. Szimmetria-okokból hasonló becslés érvényes a többi x szerinti különbségi hányadosra is. Az 1) segédétel következtében tehát a p_α -k deriváltjai majdnem mindenütt léteznek, négyzetesen integrálhatóak és a különbségi hányadosok erősen konvergálnak a megfelelő deriváltakhoz.

b) Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor f quadratikusan függ a z, p_1, p_2, \dots, p_n változóktól. Mindenekelőtt láthatjuk, hogy a

$$(G, \mathfrak{B}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \mathfrak{S} \right)$$

párra is teljesülnek az általánosított HAAR-relációk. Ez abból következik, hogy

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial f(h)}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}, \mathfrak{S}(h) - \mathfrak{S} \right)$$

erősen konvergál (G, \mathfrak{B}) -hoz, ha h a 0-höz tart. Minthogy f a (z, p_1, \dots, p_n) -ben quadratikusan, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial z}$ és $\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{S}$ -nak α -adik össze-
tevéje ilyen alakú:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial z} = a(x)Z + b(x)z + c(x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial p_a} = q_{a,\beta}(x)P_\beta + d_{a,\beta}(x)p_\beta + e_a(x),$$

ahol $a, b, c, q_{a,\beta}, d_{a,\beta}, e_a$ az x -nek analitikus függvényei és

$$Z = \frac{\partial z}{\partial x_k}, \quad P_a = \frac{\partial p_a}{\partial x_k}.$$

Vegyük az $\frac{R}{2} \leq r \leq R$ intervallumban azon r -ek M halmazát, amelyre

$$i(r, P) = \int_{K_r} P_a^2 dS \leq \frac{4\lambda}{R}.$$

Ez a halmaz mérhető. Azt állítjuk, hogy M mértéke $\geq \frac{R}{4}$. Ellenkező esetben ugyanis

$$I(R) - I\left(\frac{R}{2}\right) = \int_{\frac{R}{2}}^R i(r, P) dr \geq \lambda$$

volna, a már bebizonyított

$$I(R) \leq \lambda$$

egyenlőtlenségünkkel ellentétben.

Vegyük most M azon N részhalmazát, amelyre

$$i(r, D_h Z) \leq \frac{8\lambda}{R}.$$

Hasonló okoskodással, mint előbb, megmutatjuk, hogy N mértéke $\geq \frac{R}{8}$.

Alkalmazzuk a HAAR-lemmát a

$$\left(\frac{G(h) - G}{h}, \frac{\mathfrak{B}(h) - \mathfrak{B}}{h} \right)$$

párra DZ paraméterfüggvénnyel.

Az $a)$ alattihoz hasonló eljárással kapjuk, hogy

$$mU \leq A_1 U^{1/2} + B_1 u^{1/2} + C_1. \quad (U = \int_{G_r} DP_a^2 dV, \quad u = \int_{K_r} DP_a^2 dS)$$

Ebből a differenciálegyenlőtlenségből, hasonló megfontolást és eljárást alkalmazva, mint *a*)-ban eljutunk a (18)-hoz analog következő differenciálegyenlőtlenséghez:

$$\frac{B_1^2 U'}{U^2} \geq \frac{m^2}{4}.$$

Integráljuk az egyenlőtlenséget az N halmazon. Mivel

$$\int_{(N)} \frac{U'}{U^2} dr \leq \int_{\frac{R}{2}}^R \frac{U'}{U^2} dr = \frac{1}{U\left(\frac{R}{2}\right)} - \frac{1}{U(R)} \leq \frac{1}{U\left(\frac{R}{2}\right)}$$

és

$$\int_{(N)} \frac{m^2}{4} \geq \frac{m^2}{4} \frac{R}{8},$$

azért

$$U\left(\frac{R}{2}\right) \leq \frac{m^2 R}{32}.$$

Ebből pedig, hasonló megfontolással, mint *a*) alatt, következik, hogy P_α deriváltjai is, tehát, szimmetria okokból, z összes harmadrendű deriváltjai léteznek, majdnem mindenütt B -ben és négyzetesen integrálhatóak a B -ben fekvő minden olyan gömbben, amely olyan, hogy a vele koncentrikus 4-szeres sugarú gömb is még B -ben fekszik. Természetesen igaz ez a tétel az olyan tartományokra is, amelyek véges sok ilyen gömbbel beburkolhatóak, tehát B belsejében fekvő, B határától pozitív távolságra levő bármely tartományra is. Ugyanigy bebizonyíthatjuk a negyedik, ötödik stb. differenciálhányadosok létezését is. Ennélfogva z a B -ben akárhányszor (és ennélfogva akárhányszor *folytonosan*) differenciálható. HOFF¹⁶ tétele értelmében azonban z kétszeri folytonos differenciálhatóságából következik, hogy z analitikus. Tehát a mi esetünkben is az extrémális analitikus.

Ezuton is hálásan köszönöm Dr. KALMÁR LÁSZLÓ magántanár urnak, hogy dolgozatomat átnézte és tanácsaival több tételnek és bizonyításnak megszövegezését egyszerűbbé és elegánsabbá tette.

Sólyi Antal.

¹⁶ L. c. 8.

DAS HAARSCHES LEMMA IN DER VARIATIONSTHEORIE UND SEINE ANWENDUNGEN.

Es wurde das HAARSCHES Lemma und seine Umkehrung mit einer neuen, nicht rekursiven Methode für den n -dimensionalen Fall bewiesen und mit Hilfe eines einfachen Kunstgriffes handhablicher gemacht. Die Tragweite dieser fast trivialer Umformung wurde bei Problemen mit variablen Begrenzung und bei der JACOBI'SCHEN Theorie der zweiten Variation gezeigt. Es wurden einige dazugehörige klassische Sätze mit den HAARSCHEN Methoden durchsichtiger und knapper bewiesen, als bisher bekannt war. Für den Fall elliptischer Probleme haben wir folgenden (meines Wissens nach neuen) Satz bewiesen. Es sei das Problem

$$\delta \int f(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) dx_1, \dots, dx_n = 0$$

elliptisch. ($z = z(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ bedeutet die Extremalfunktion, $p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}$.) Ferner sei f in allen seinen Veränderlichen analytisch.

Unser Resultat lautet dann folgendermassen. Wenn z einer LIPSCHITZ'SCHEN Bedingung genügt, dann existieren die zweiten Ableitungen fast überall und sind quadratisch integrierbar. Wenn ausserdem f von den Veränderlichen z, p_1, \dots, p_n quadratisch abhängt, dann ist z analytisch.

Anton Sölyi.

TÖBBTESTPROBLÉMA A KVANTUMELMÉLETBEN.

Együttes rendszerre összefoglalt részecskék állapotának leírása a kvantumelmélet legmélyebb és legszebb fejezetei közé tartozik. Gyakorlati szükségletként a többtestprobléma elsősorban elektronok esetében jelentkezik az atomspektrumok leírásában. A SCHRÖDINGER- és a DIRAC-féle hullámegyenletek pusztán egy elektron kvantumelméleti mozgásegyenletei és így csak a hidrogénatom és a hidrogénszerű atomionok tárgyalására alkalmasak. A heliumatomtól kezdve a többelektron kérdésével állunk szemben. A sugárzás terében mozgó elektronok esetében pedig a feladat már elektron-foton többtestproblémává bővül.

A feladatkör szakszerű felosztását a gyakorlat szabja meg. Vannak esetek, mikor a folyamatokban résztvevő részecskék száma pontosan meg van határozva és viszont előfordul, hogy teljesen határozatlan halmazokban lépnek bele olyan processzusokba, melyek eltűnésükre, ill. keletkezésükre is vezetnek. Így például az atomspektrumok tárgyalásánál az atom elektronjainak száma változatlanul adottnak tekintendő, a sugárzási tér fotonjainak száma pedig határozatlan, sőt az emisszió és abszorpció e szám folytonos megváltoztatását vonja maga után. Ugyanilyen jelenség a párképződés, ill. szétsugárzás is, mikor γ -kvantumról elektron és pozitron keletkezik, ill. a két utóbbi egyesülése γ -kvantumot eredményez.

Meghatározott számú részecskék tárgyalása a kompozíció módszerével, határozatlan, ill. változó számú részecskéké pedig a szuperkvantálás módszerével történik. Sokszor a két módszer együttesen alkalmazandó, így például mikor rendszerünk adott számú elektronból és határozatlan számú fotonból áll.

A jelen dolgozat célja a szuperkvantálás, különösen az elektromágneses tér kvantálásának részletesebb ismertetése. Ezt új módszerrel és az irodalomban található hiányok helyesbítésével ejtjük meg. Teljesség kedvéért azonban a kompozícióról is egészen röviden megemlékezünk.

Kompozíció. A klasszikus mechanika több testecske mozgását úgy írja le, hogy minden tömegpontra külön-külön felállítja a mozgásegyenleteket, melyekben az adott külső tértől és a többi részecskétől származó potenciálok helyet foglalnak. A megoldás részletesen számot ad minden egyes tömegpont pályájáról és mozgásának időbeli lefolyásáról. Könnyen belátható, hogy ezt az eljárást a kvantum-mechanika már analitikai okok miatt sem másolhatja le. Egy-egy részecskének, például a k -adiknak SCHRÖDINGER- vagy DIRAC-féle mozgásegyenlete ilyen alakú:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi_k}{\partial t} + H_k \phi_k = 0, \quad (1)$$

ahol H_k a részecske energia- vagy HAMILTON-operatora, ϕ_k pedig az állapotfüggvénye. Ez a ϕ_k csak akkor jellemzi kizárólag a k -adik részecskének állapotát, ha a t időn kívül csak a részecske x_k, y_k, z_k koordinátáit tartalmazza. Már most egyszerűen lehetetlen, hogy $k = 1, \dots, n$ esetében az (1) szimultán differenciálegyenletrendszer $\phi_k = \phi_k(x_k, y_k, z_k, t)$ alakú megoldásokat szolgáltatson, hiszen a H_k energiaoperátor potenciális része a többi tömegpont koordinátáit is tartalmazza. Külön állapotfüggvények csak akkor léphetnek fel, ha a kölcsönhatás elhanyagolható. Az elmélet rendkívül érdekes megfontolásokat fűz ehhez az esethez, mely azonban gyakorlati szempontból a tulajdonképpeni feladat 0-adik közelítését jelenti csak.

Ha tehát a kvantummechanika nem engedi meg kölcsönhatásban levő részecskék külön állapotfüggvényeit, az egész rendszer ϕ állapotfüggvénye iránt kell érdeklődnünk: $\phi = \phi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots, t)$. Ennek meghatározása úgy történik, hogy az egész rendszerre ugyancsak

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi}{\partial t} + H\phi = 0 \quad (2)$$

alakú mozgásegyenletet posztulálunk. DIRAC megmutatta, hogy általános elméleti okok kívánják a hullámeqyenletnek ezt az alakját. Az azóta felfedezett mezon hullámeqyenlete is ilyen alakú, bár bizonyos kezdeti feltételek is hozzájárulnak. H most az egész rendszer energiaoperátora, vagyis összege az egyes részecskék kinetikai energiaoperátorainak és a köztük fellépő potenciális energiának. Világos, hogy a szóbanforgó módszer, mely (2) integrációján alapszik, csak akkor használható, ha a részecskék kölcsönhatása koordinátáik függvényeként fejezhető ki. Atomok tárgyalásánál tényleg a legtöbb esetben megelégszünk az elektronok COULOMB-potenciáljával, bár világos, hogy mozgó elektronok még egyéb, időlegesen terjedő elektromágneses hatást is kifejtenek egymásra. ψ meghatározásának gyakorlati módja rendszerint abban áll, hogy 0-adik közelítésként a részecskék kölcsönhatásától eltekintünk és azt mint kicsiny zavart a perturbációszámítás módszereivel vesszük tekintetbe. A kölcsönhatástól mentes esetben nyilvánvaló, hogy ψ következőkép adódik az egyes részecskék állapotfüggvényeiből: $\psi = \sum a_1 \dots a_n \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n$. A ψ vektortér tehát megfelel a $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ vektorterek kompozíciójának. Ismeretes az a mindmáig meg nem okolható tény, hogy a természet a sok lehetséges ψ közül csak a szimmetrikus és antiszimmetrikus ψ -k létjogosultságát ismeri el.

Szuperkvantálás. Idézzük emlékezetünkbe, hogy a kvantumelmélet elsősülöttére, a fekete sugárzás elméletére sajátos nehézség veti árnyékát. A fekete sugárzás első alakjában a kvantált oszcillátor és a klasszikus elektromágneses tér kölcsönhatásának elmélete. E szerint az oszcillátor vagy rezgő elektron csak órák vagy napok alatt gyűjthetné össze azt a sugárzó energiát, mely például fémből való kilépésre képesíti, holott a tapasztalat szerint a kilépés rögtön követi a megvilágítást. Ezt a nehézséget véglegesen csak DIRAC oldotta meg az elektromágneses tér kvantálásával, általános elméleti alapra helyezve ily módon az EINSTEIN-féle fotonfeltevést. DIRAC eljárása abból a belátásból ered, hogy az elektromágneses tér — mint az

egész rendszer egy része — nem szerepelhet klasszikus alakjában, hanem ugyancsak kvantálásnak vetendő alá.

Míg a részecske mozgását a koordinátái, tehát egyszerű időfüggvények határozzák meg, addig az elektromágneses tér négy potenciállal jellemezendő, melyeknek mindegyike téridőfüggvény. Olyan rendszer kvantálását, melyet csak ilyen téridőfüggvényekkel írhatunk le, szuperkvantálásnak vagy HEISENBERG és PAULI szerint helyesebben hullámterek kvantálásának nevezzük. Az első elnevezés onnan ered, hogy az eljárást az elektromágneses téren kívül (2) alakú hullámegyenletekre is kiterjesztjük, tehát ezeket mint kvantált mozgásegyenleteket újból kvantálásnak vetjük alá. Az időbeli sorrendnek megfelelően először az elektromágneses tér kvantálásával akarunk foglalkozni.

Ennek szinte egész külön irodalma van. A téregyenletek ugyanis sajátos elfajulást mutatnak, mely megakadályozza, hogy a HEISENBERG-PAULI-féle általános eljárást minden további nélkül alkalmazzuk. A MAXWELL-egyenletek egyike:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho \quad (3)$$

nem tartalmazza ugyanis a skaláris potenciál időszerinti differenciálhányadosát és ennél fogva nem hozható kanonikus alakra. Ezt a nehézséget egy nemrég megjelent dolgozatban úgy igyekeztem elkerülni, hogy (3)-ból explicite kifejeztem a skaláris potenciált és azt a többi MAXWELL-egyenletbe helyettesítve felállítottam az így kiadódó nem független rendszer HAMILTON-függvényét. Az eljárás még annyiban hiányos, hogy ily módon elsikkad a COULOMB-energia, amely tehát külső toldalékként kerül a rendszer összenergiájához. A következőkben olyan új eljárást akarok közölni, mely egyfelől mentes ettől a hiánytól és másfelől nem folyamodik a potenciálok FOURIER-felbontásához, ami az áttekinthetőséget mindenesetre fokozza. Azonkívül alkalmas arra, hogy a szabadon választható megoldások sokrétűségét is feltüntesse.

Első és főfeladatunk, a MAXWELL-egyenletek klasszikus HAMILTON-

függvényének megszerkesztése. A tér kvantálása ezután már csak gépies eljárást jelent.

A speciális relativitás elméletének $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$ négyes terében dolgozunk. A négy koordináta összefoglaló jele x . A négyes potenciál $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ komponense megfelel \mathfrak{A} vektor-potenciál komponenseinek, φ_4 pedig jelenti $i\Phi$ -t, hol Φ a skaláris potenciál. Hasonlóan jelenti a négyes áram s_1, s_2, s_3 komponense a közönséges hármas áramot, míg $s_4 = i\rho$, hol ρ az elektromosság térbeli sűrűsége. Az \mathfrak{E} elektromos térerősség három komponense if_{k4} ($k=1, 2, 3$), a \mathfrak{H} mágneses térerősség komponensei pedig f_{23}, f_{31}, f_{12} , ahol $f_{rs} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_r} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_s}$ vagy rövidben $f_{rs} = \partial_r \varphi_s - \partial_s \varphi_r$.^{*} Felhasználva a relativitás elméletében régóta általánossá vált megállapodást, hogy kétszer előforduló index összegezést jelent erre az indexre 1-től 4-ig, a négy MAXWELL-egyenlet így írható:

$$\partial_r f_{kr} = 4\pi s_k, \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (4)$$

Az s_k -k megadott téridőfüggvények, melyek azonban a

$$\partial_k s_k = 0 \quad (5)$$

korlátozó feltételnek vannak alávetve. Ez a kontinuitási egyenlet rögtön következik (4)-ből, ha mindkét oldalára a ∂_k operátort alkalmazzuk és tekintetbe vesszük, hogy $\partial_{kr}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_r}$ a k -ban és r -ben szimmetrikus, f_{kr} pedig antiszimmetrikus. Ha (4)-t a potenciálok segítségével fejezzük ki, a következő egyenletrendszerre jutunk

$$\partial_{rr}^2 \varphi_k - \partial_k (\partial_r \varphi_r) = -4\pi s_k. \quad (k=1, \dots, 4) \quad (6)$$

Itt $\partial_{rr}^2 = \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_r^2}$ a négyes LAPLACE-operátor, melyet ezentúl \square -val akarunk jelölni.

Szemléletesség kedvéért néhány közkeletű elnevezést és össze-

^{*} A parciális d. hányadosnak ez az áttekinthető és nyomdatechnikai szempontból rendkívül előnyös jelölése a folyóiratokban mindinkább tért hódít.

függést, mely közönséges vektorokra érvényes, átviszünk négyes vektoroperátorokra. Bevezetjük a $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ vektor-operátort és például (5) baloldalát (∇, s) skaláris szorzatnak tekintjük. (5)-t tehát úgy interpretáljuk, hogy s merőleges ∇ -ra. Ha egy vektoroperátor komponenseinek négyzetösszege 1, akkor egységvektoroperátornak nevezzük. Ily értelemben $\partial_k \square^{-\frac{1}{2}}$ ($k=1, \dots, 4$) a ∇ vektornak megfelelő egységvektor. Itt $\square^{-\frac{1}{2}}$ az az operátor, mely önmagára alkalmazva \square reciprok operátort adja. A mi négyes terünkben létezik (végtelen sokféleképp választható) három egymástól független, egymásra és a ∇ -ra merőleges, egymással és ∇ -val felcserélhető egységvektoroperátor a, b, c . Az a komponensei a_1, a_2, a_3, a_4 stb. Az állítás helyességét legegyszerűbben úgy látjuk be, ha az $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ függvényt, amelyre ∇ -t alkalmazzuk, négyes FOURIER-sorba fejtjük. ∇, a, b , és c ekkor közönséges négyes vektorokba mennek át. — A következő szkémában

$$\begin{array}{cccc}
 a_1 & b_1 & c_1 & \partial_1 \square^{-\frac{1}{2}} \\
 a_2 & b_2 & c_2 & \partial_2 \square^{-\frac{1}{2}} \\
 a_3 & b_3 & c_3 & \partial_3 \square^{-\frac{1}{2}} \\
 a_4 & b_4 & c_4 & \partial_4 \square^{-\frac{1}{2}}
 \end{array} \quad (7)$$

tehát minden oszlop vagy minden sor elemeinek négyzetösszege 1, viszont két oszlop vagy két sor megfelelő elemeinek szorzatösszege 0. Az alábbiakban alkalmasan konkretizáljuk majd az a, b, c vektorokat.

Nyilvánvaló, hogy e vektorok bevezetése igen célszerű, mert úgy a MAXWELL-egyenletek, mint a SCHRÖDINGER- és DIRAC-féle hullámegyenletek invariánsak avval a transzformációval szemben, mely a négyes potenciált egy gradienssel növeli: $\varphi_k \rightarrow \varphi_k + \partial_k \psi$. A gradiens az említett egyenletekből kiesik. Ezt a tulajdonságukat nevezzük mértékinvarianciának.*

Ennélfogva ajánlatos a négyes potenciált egy a ∇ irányba eső gradiensre és egy arra merőleges transzverzális részre bontani. Fizikai szerepet csak az utóbbi játszhat. Legyenek ennek kom-

* H. WEYL «Eichinvarianz»-a.

ponensei az a, b, c irányokban Q_a, Q_b, Q_c . Akkor teljes általánosságban írható:

$$\varphi_k = a_k Q_a + b_k Q_b + c_k Q_c + \partial_k \psi, \quad (k=1, \dots, 4) \quad (8)$$

Hogy ez a felbontás mindig lehetséges, onnan következik, hogy (8)-ból Q_a, Q_b, Q_c és ψ meghatározhatók. Szorozzuk meg ugyanis (8) két oldalát például a_k -val (négyes összegezés!), akkor (7) oszlopainak tulajdonságai alapján:

$$Q_a = (a, \varphi). \quad (9)$$

A ∂_k -val való szorzás eredménye pedig $\square \psi = (\nabla, \varphi)$.

Helyettesítsük a φ -komponensek (8)-beli kifejezéseit (6)-ba, akkor ψ a mértékinvariancia folytán természetesen kiesik és a következő egyenletrendszer áll elő:

$$a_k \square Q_a + b_k \square Q_b + c_k \square Q_c = -4\pi s_k. \quad (s=1, \dots, 4) \quad (10)$$

A szeparálás könnyen keresztülvihető. Szorozzuk meg (10)-et a_k -, ill. b_k -, ill. c_k -val, akkor nyerjük

$$\square Q_a = -4\pi(a, s), \quad \square Q_b = -4\pi(b, s), \quad \square Q_c = -4\pi(c, s). \quad (11)$$

A ∂_k -val szorozva ismét a kontinuitási egyenletet kapjuk.

A (11) rendszer teljesen egyenértékű (10)-zel, tehát az eredeti (6)-tal is.

Eljárásunkkal két eredményt értünk el. A négy nem független φ -komponenst helyettesítettük a három független Q_a, Q_b, Q_c -vel és ezzel egyszersmind a (6)-beli téregyenletet háromra redukáltuk. A másik jóval fontosabb eredmény, hogy a (11) rendszer nyomát sem mutatja az eredeti nehézségnek, mert mind a három egyenlet kanonikus alakra hozható. Tegyük ezt meg az elsővel. Q_a konjugált impulzusát P_a -nak nevezzük. Némi kombinációval könnyű Q_a -nak és P_a -nak olyan H_a függvényét megszerkeszteni, hogy a belőle eredő kanonikus egyenletek:

$$\dot{Q}_a = \frac{\partial H_a}{\partial P_a}, \quad \dot{P}_a = -\frac{\partial H_a}{\partial Q_a} + \partial_i \frac{\partial H_a}{\partial (\partial_i Q_a)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (12)$$

éppen a (11) első egyenletét szolgáltatassák. Ilyen függvény

$$H_a = 2\pi c^2 P_a^2 + \frac{1}{8\pi} [(\partial_1 Q_a)^2 + (\partial_2 Q_a)^2 + (\partial_3 Q_a)^2] - (a, s) Q_a. \quad (13)$$

(12) szerint a kanonikus egyenletek most a következők:

$$\dot{Q}_a = 4\pi c^2 P_a, \quad \dot{P}_a = (a, s) + \frac{1}{4\pi} \partial_i (\partial_i Q_a). \quad (i=1, 2, 3)$$

Az első egyenletből

$$\dot{P}_a = \frac{1}{4\pi c^2} \ddot{Q}_a.$$

Ezt behelyettesítjük a másodikba. Akkor

$$\partial_a^2 Q_a - \frac{1}{c^2} \ddot{Q}_a = -4\pi(a, s) \text{ vagy rövidebben } \square Q_a = -4\pi(a, s).$$

HEISENBERG-PAULI szerint a H_a -nak térbeli integrálja — a tényleges HAMILTON-függvény — a Q_a változónak megfelelő tér-energiát szolgáltatja:

$$E_a = \int H_a d\tau. \quad (14)$$

(12)-höz teljesen hasonló kifejezést nyerünk H_b -re és H_c -re. E_b és E_c a Q_b , ill. Q_c változókhoz tartozó térenergiák.

Ha a négyes áram 0, a sugárzási térrel van dolgunk. A megfelelő H_a -t felülhúzással jelöljük:

$$\bar{H}_a = 2\pi c^2 P_a^2 + \frac{1}{8\pi} [(\partial_1 Q_a)^2 + (\partial_2 Q_a)^2 + (\partial_3 Q_a)^2]. \quad (15)$$

Azonos szerkezetű kifejezések érvényesek \bar{H}_b -re és \bar{H}_c -re.

Az ökonomia megköveteli, hogy a végtelen sok lehetséges a, b, c vektoroperátor közül a lehető legegyszerűbbeket válasszuk ki. Legyen a, b merőleges nemcsak a négyes ∇ -vektorra, hanem egyszersmind annak térbeli részére is, melynek komponensei $\partial_1, \partial_2, \partial_3$. Két és csakis két ilyen egymástól független vektor tényleg létezik. Követelésünk így szól:

$$\partial_r a_r = 0, \quad \partial_r b_r = 0, \quad (r=1, 2, 3, 4) \text{ és } (r=1, 2, 3), \text{ tehát} \quad (16)$$

$$a_4 = 0, \quad b_4 = 0.$$

Ekkor a c vektor teljesen meg van határozva. (7) utolsó sora szerint

$$c_4^2 + \partial_{44}^2 \square^{-1} = 1,$$

viszont az utolsó oszlop szerint

$$\partial_{44}^2 \square^{-1} + \Delta \square^{-1} = 1,$$

hol Δ a hármás LAPLACE-féle operátor. Ennélfogva

$$c_4^2 = \Delta \square^{-1}, \text{ vagyis } c_4 = \Delta^{\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Az első és negyedik sor sorozatösszegéből $c_1 c_4 + \partial_{14}^2 \square^{-1} = 0$, miből

$$\begin{aligned} c_1 &= -\partial_1 (\partial_4 \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}}) \text{ és hasonlóan} \\ c_2 &= -\partial_2 (\partial_4 \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}}), \quad c_3 = -\partial_3 (\partial_4 \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (18)$$

A H_a és H_b kifejezéseiben szereplő (a, s) és (b, s) most már közönséges hármás skaláris szorzat. Viszont a H_c -ben fellépő hasonló tag

$$(c, s) = \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}} s_4. \quad (19)$$

(18)-ből látható, hogy c_1, c_2, c_3 hármás gradiens. Ez közelfekvővé teszi a gondolatot, hogy a gradiens negyedik komponensét azonos átalakítással c_4 -be is belevigyük:

$$\begin{aligned} c_4 &= \Delta^{\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}} + \partial_4 (\partial_4 \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}}) - \partial_4 (\partial_4 \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}} - \partial_4 (\partial_4 \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (20)$$

A c_1, c_2, c_3 -ban fellépő hármás gradiens hozza magával, hogy a sugárzás irodalmában a potenciál «longitudinális» komponensével is hosszasan foglalkozni kell. A c_4 -en végzett átalakítás révén most mint négyes gradienst a mértékinvariancia miatt egyszerűen elhagyhatjuk. Ezáltal új \bar{c} vektort nyerünk:

$$\bar{c}_1 = 0, \bar{c}_2 = 0, \bar{c}_3 = 0, \bar{c}_4 = \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

Az új \bar{c} vektorral is

$$(\bar{c}, s) = \Delta^{-\frac{1}{2}} \square^{\frac{1}{2}} s_4. \quad (22)$$

c már nem merőleges ∇ -ra, nem is egységvektor és csakis a mértékinvarianciának köszöni létjogosultságát. A

$$Q_c = \Delta^{\frac{1}{2}} \square^{-\frac{1}{2}} i\Phi \quad (23)$$

helyettesítés (8) szerint a potenciálok következő előállítására vezet:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 Q_a + b_1 Q_b, \\ \varphi_2 &= a_2 Q_a + b_2 Q_b, \\ \varphi_3 &= a_3 Q_a + b_3 Q_b, \\ \varphi_4 &= i\Phi. \end{aligned} \quad (24)$$

(22)-t és (23)-t a $\square Q_c = -4\pi(c, s)$ alapegyenletbe helyettesítve látjuk, hogy az új Φ most a Poisson-egyenletet elégíti ki:

$$\Delta \Phi = -4\pi\rho. \quad (25)$$

Φ tehát az idő nélkül terjedő COULOMB-erő potenciálja. A neki megfelelő energia

$$E_\Phi = \int H_\Phi d\tau, \text{ hol} \quad (26)$$

$$H_\Phi = -\frac{1}{8\pi} [(\partial_1 \Phi)^2 + (\partial_2 \Phi)^2 + (\partial_3 \Phi)^2] + \rho\Phi. \quad (27)$$

(27)-ben konjugált impulzus nem lép fel, ami azt jelenti, hogy a COULOMB-energia kvantálatlan marad.

Ha (15) mintájára (27) jobboldali második tagjának elhagyásával bevezetjük a

$$\bar{H}_\Phi = -\frac{1}{8\pi} [(\partial_1 \Phi)^2 + (\partial_2 \Phi)^2 + (\partial_3 \Phi)^2] \quad (28)$$

kifejezést, akkor parciális integráció után

$$\int \bar{H}_\Phi d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \Phi \Delta \Phi d\tau = -\frac{1}{2} \int \rho \Phi d\tau. \quad (29)$$

H_a , H_b és H_Φ integráljainak összege adja a keresett klasszikus HAMILTON-függvényt. Evvel feladatunk első része be is fejeződött. De tekintettel arra, hogy a kvantummechanika az elemi részecs-

kéket ponttöltésekként vezeti be számításaiiba, hátra van még, hogy eredményeinket ilyen értelemben átírjuk.

Legyen a részecskék száma n , tömegük m_1, \dots, m_n , töltésük e_1, \dots, e_n . A k -adik részecske koordinátái X_k, Y_k, Z_k . Összefoglaló jelük X_k . Ekkor a töltéssűrűség

$$\varrho = \sum_k e_k \delta(x - X_k), \quad (30)$$

hol δ a DIRAC-féle szinguláris függvény. Az áramsűrűség komponensei

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{c} \sum_k e_k \delta(x - X_k) \dot{X}_k, \quad s_2 = \frac{1}{c} \sum_k e_k \delta(x - X_k) \dot{Y}_k, \\ s_3 &= \frac{1}{c} \sum_k e_k \delta(x - X_k) \dot{Z}_k. \end{aligned} \quad (31)$$

Ha a részecskék DIRAC-féle egyenletet elégítenek ki, akkor

$$\frac{1}{c} \dot{X}_k = \gamma_1^k, \quad \frac{1}{c} \dot{Y}_k = \gamma_2^k, \quad \frac{1}{c} \dot{Z}_k = \gamma_3^k. \quad (32)$$

$\gamma_1^k, \gamma_2^k, \gamma_3^k$, DIRAC-féle matrixok. Ennélfogva

$$s_1 = \sum_k e_k \delta(x - X_k) \gamma_1^k \text{ stb.} \quad (33)$$

Most sorban meghatározhatók a (13)-beli H_a, H_b és a (27)-beli H_x kifejezések utolsó tagjainak térbeli integráljai.

$$\int (a, s) Q_a d\tau = \sum_k e_k \int (a, \gamma^k) \delta(x - X_k) Q_a d\tau = \sum_k e_k (a, \gamma^k) Q_a(X_k). \quad (34)$$

$$\int (b, s) Q_b d\tau = \sum_k e_k (b, s) Q_b(X_k). \quad (35)$$

$$\int \varrho \Phi d\tau = \sum_k e_k \int \delta(x - X_k) \Phi d\tau = \sum_k e_k \Phi(X_k). \quad (36)$$

Mivel ponttöltés esetén

$$\Phi = \sum_i \frac{e_i}{r}, \quad \text{hol } r_i = \sqrt{(x - \lambda_i)^2 + \dots}, \quad (37)$$

azért

$$\Phi(X_k) = \sum_i \frac{e_i}{r_{ik}}, \quad r_{ik} = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + \dots}. \quad (38)$$

(36) tehát még írható

$$\int \rho \Phi d\tau = \sum_i \sum_k \frac{e_i e_k}{r_{ik}}. \quad (39)$$

Tekintetbe véve (24) utolsó egyenletét a k -adik részecske DIRAC-féle energiaoperátora a következő

$$H_k^p = e_k \Phi(X_k) + c \left(\gamma^k, p^k - \frac{e_k}{c} \varphi(X_k) \right) - m_k c^2 \Gamma^k. \quad (40)$$

A többtestproblémára most két lépésben megyünk át. Ha egy pillanatra eltekintünk a kölcsönhatástól, akkor a kompozíciós eljárás szerint a rendszer HAMILTON-operátora

$$H = \sum_k H_k^p.$$

A kölcsönhatást úgy vesszük tekintetbe, hogy az elektromágneses tér $\int \bar{H}_a d\tau$, $\int \bar{H}_b d\tau$, $\int \bar{H}_x d\tau$ energiáit hozzáadjuk és a H_k^p -ben szereplő $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ komponensek helyébe (24) megfelelő kifejezéseit helyettesítjük. Tehát

$$H = \sum_k \left\{ e_k \Phi(X_k) + c \left(\gamma^k, p^k - \frac{e_k}{c} [a Q_a(X_k) + b Q_b(X_k)] \right) - m_k c^2 \Gamma^k \right\} + \quad (41)$$

$$+ \int \bar{H}_a d\tau + \int \bar{H}_b d\tau + \int \bar{H}_x d\tau.$$

(34) (35) és (36) alapján nyilvánvaló, hogy az összeg jele alatt álló rész $\sum_k e_k \Phi(X_k)$ tagja kiegészíti $\int \bar{H}_x d\tau$ -t a teljes $\int H_x d\tau$ -vá, hasonlóan a $-e_k(\gamma^k, a) Q_a(X_k)$, ill. $-e_k(\gamma^k, b) Q_b(X_k)$ tagok a $\int \bar{H}_a d\tau$ -t, ill. $\int \bar{H}_b d\tau$ -t a teljes $\int H_a d\tau$, ill. $\int H_b d\tau$ energiakifejezésekké. A kiadódó kanonikus egyenletek ennél fogva teljesen megfelelnek az elektromágneses téregyenleteknek. Megjegyezzük még, hogy H első és utolsó tagjának összege (36), (39) és (29) szerint

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{e_i e_k}{r_{ik}}. \quad (42)$$

A teljes H operátort először FERMI állította fel FOURIER-sorba fejtett alakban és ebben a formában átment az irodalomba is. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy nem minősíthetjük korrekt-

nek, hiszen bizonyos szükséges kiegészítések elmulasztása miatt még klasszikus szingularitásokat is tartalmaz. A helyesbítés röviden megejthető.

Ismeretes, hogy DIRAC egyenletében a részecske tehetetlenségét a külön bevezetett m_k tömeggel írjuk le és nem talán önterének visszahatásaképpen. Ez az oka annak, hogy a részecske saját tere nem léphet fel az egyenletben szereplő és a teret megadó potenciálokban. SCHRÖDINGER ezt a körülményt saját egyenletével kapcsolatban erősen kiemelte. Ezek a potenciálok mindig csak a külső tér potenciáljai. Így például a H -atom esetében csak a mag terének potenciálja és semmiesetre sem az elektron-téré is. (41) ezt nem veszi tekintetbe. A korrekció tehát az önpotenciálok levonásában áll és legszemléletesebben H első tagjában vihető keresztül.

$\Phi(X_k)$ (37)-beli alakja helyett $\Phi(X_k) - \Phi^k(X_k)$ irandó, hol Φ^k a részecske COULOMB-potenciálja: $\frac{e_k}{r_k}$. Ennek megfelelően $\int H_x d\tau$ -ből is levonandó $\int \bar{H}_x^k d\tau = -\frac{1}{2} e_k \Phi^k$. A két korrekció az X_k helyen, vagyis a k -adik részecske helyén éppen $\frac{1}{2} \frac{e_k e_k}{r_{kk}}$ -t hozza levonásba (42) kifejezéséből. Ezek a végtelenségek tehát automatikusan, DIRAC egyenletének helyes értelmezéséből kifolyólag, esnek ki (42)-ből. Elhagyásuk nem önkényes gyakorlati kényszerűség, mint általában olvasható.

Egészen hasonlóan járunk el a Q_a és Q_b potenciálokkal. (41)-ben levonjuk belőlük a Q_a^k és Q_b^k önpotenciálokat és olyan HAMILTON-féle toldalékokat illesztünk (41)-hez, hogy a belőlük eredő kanonikus egyenletek éppen önpotenciáloknak definiálják Q_a^k -t és Q_b^k -t. Ezt nyilván a következő kifejezések levonásával érjük el:

$$\int \bar{H}_a^k d\tau = \int \left\{ 2\pi c^2 P_a^{k^2} + \frac{1}{8\pi} [(\partial_1 Q_a^k)^2 + (\partial_2 Q_a^k)^2 + (\partial_3 Q_a^k)^2] \right\} d\tau, \quad (43)$$

$$\int \bar{H}_b^k d\tau = \int \left\{ 2\pi c^2 P_b^{k^2} + \frac{1}{8\pi} [(\partial_1 Q_b^k)^2 + (\partial_2 Q_b^k)^2 + (\partial_3 Q_b^k)^2] \right\} d\tau. \quad (44)$$

Míg a Q_a és Q_b kanonikus változókból adódó $\square Q_a = -4\pi \sum_k e_k(a, \gamma^k)$, ill. $\square Q_b = -4\pi \sum_k e_k(b, \gamma^k)$ téregyenletek

az összes részecskék mozgásából eredőnek tüntetik fel Q_a -t és Q_b -t, addig a Q_a^k és Q_b^k kanonikus változók téregyenletei $\square Q_a^k = -4\pi e_k(a, \gamma^k)$, $\square Q_b^k = -4\pi e_k(b, \gamma^k)$ a k -adik részecske saját potenciáljaként adják meg Q_a^k -t és Q_b^k -t.

Ezek után végleges formájában felírhatjuk az elektrodinamika szingularitásmentes HAMILTON-operátorát:

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} \frac{e_i e_k}{r_{ik}} + \\ + \sum_k \left\{ c \left(\gamma^k, p^k - \frac{e_k}{c} [a(Q_a - Q_a^k)_{x_k} + b(Q_b - Q_b^k)_{x_k}] \right) - m_k c^2 \Gamma^k \right\} + \quad (45) \\ + \int \bar{H}_a d\tau - \sum_k \int \bar{H}_a^k d\tau + \int \bar{H}_b d\tau - \sum_k \int \bar{H}_b^k d\tau.$$

Az elektromágneses térenergia most már csak a részecskék kölcsönhatásának energiája. A COULOMB-sajátterek és a részecskék mozgásából származó elektrodinamikai sajátterek energiáit a tömegtagok helyettesítik.

Ha az egyik részecske mag (melynek hatása csak a COULOMB-féle tagban jut kifejezésre), a többi részecske pedig elektron, akkor a (45) exakt megfogalmazását adja a több elektronnal bíró atom problémájának.

Most rátérünk a sugárzási tér tényleges kvantálására. Ez gyakorlatilag úgy történik, hogy P_a -t és Q_a -t egy teljes és ortogonális $\mu_k(x_1, x_2, x_3)$ függvényrendszer szerint sorba fejtjük. Ilyennek választjuk a

$$\mu_k = \sin \Gamma_k, \quad \left(\Gamma_k = \frac{2\pi}{l} (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) + \vartheta_k \right) \quad (46)$$

rendszert. Itt k_1, k_2, k_3 az összes egész számhármast jelent, ϑ_k pedig tetszőleges állandó, a (46) által adott síkhullám fázis-állandója. k_1, k_2, k_3 a hullámnormális irányát jellemzi. Rövid jelzéssel legyen $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2$. A sorbafejtés érvényes egy l élhosszúságú kockában, melynek térfogatát V -vel jelöljük. P_a és Q_a FOURIER-sora tehát

$$P_a = C \sum_k P_a^k(t) \sin \Gamma_k, \quad Q_a = C \sum_k Q_a^k(t) \sin \Gamma_k. \quad (47)$$

C normáló együttható, melyet $\sqrt{\frac{2}{V}}$ -nek választunk, P_a^k és Q_a^k pedig FOURIER-együtthatók. Q_a sorbafejtése egy csapásra megszünteti a különbséget az egyszerű időfüggvény — amilyen egy tömegpont koordinátája — és a téridőfüggvény között. A $Q_a^k(t)$ FOURIER-együttható ugyancsak egyszerű időfüggvény, konjugált impulzusa P_a^k . A Q_a^k -k koordináta-értelmezése is megmarad, igaz, hogy nem közönséges hármas térben, hanem a HILBERT-féle függvénytérben. Ennélfogva egészen közelfekvő gondolat, hogy azokat a HEISENBERG-féle csererelációkat, melyek tömegpont koordinátái és impulzusai között fennállanak, a mostani új koordinátákra és impulzusokra is érvényesítsük. Ez a gondolat az elektromágneses tér esetében minden változtatás nélkül keresztülvihető. A csererelációk tehát a következők:

$$Q_a^k Q_a^m - Q_a^m Q_a^k = 0, \quad P_a^k P_a^m - P_a^m P_a^k = 0, \quad P_a^k Q_a^m - Q_a^m P_a^k = \delta^{km} \frac{\hbar}{i}, \quad (48)$$

ezek pedig összefoglalhatók a $P_a^k = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial Q_a^k}$ operatordefinícióban.

Ha már most tekintetbe vesszük, hogy

$$\int_V \sin^2 \Gamma_k d\tau = \int_V \cos^2 \Gamma_k d\tau = \frac{V}{2}, \quad (49)$$

akkor (15)-ből rögtön következik

$$\int \bar{H}_a d\tau = \sum_k \left(2\pi c^2 P_a^{k^2} + \frac{\pi}{2} \frac{k^2}{l^2} Q_a^{k^2} \right). \quad (50)$$

Hasonló kifejezést kapunk $\int \bar{H}_b d\tau$ -ra is. Az összegjel alatti kifejezés egy FOURIER-felbontásból eredő síkhullám energiája. Összehasonlítva ezt a lineáris oszcillátor energiakifejezésével:

$$\frac{P^2}{2m} + 2\pi^2 m \nu^2 Q^2, \quad (51)$$

azonnal látni, hogy oly oszcillátor energiájával azonos, melynek tömege $m = \frac{1}{4\pi c^2}$, frekvenciája pedig $\nu^k = \frac{kc}{l}$. Ennélfogva e síkhullám energia-sajátértékei $E^k = h\nu^k \left(n + \frac{1}{2} \right)$, ahol n tetszőleges, határozatlan, poz. egész szám. Ez azt mondja, hogy síkhullám energiája csak a $h\nu$ fotonenergia egészszámú többszörösével változ-

hat. Ha eltekintünk az n mellett álló $\frac{1}{2}$ -től, melynek szerepe a sugárzó energiában ma még egészen homályos, azt mondhatjuk, hogy minden síkhullám egészszámú foton hordozója.

Ezt az eredményt teljes súlyában csak akkor értékelhetjük, ha tekintetbe vesszük, hogy a klasszikus MAXWELL-egyenletek bizonyos értelemben az «egy-foton» hullámegyenletei. Ekkor tehát a kvantálás automatikusan átvezetett egy fotonról határozatlan számú fotonra.

Ez az érdekes tény vezetett a SCHRÖDINGER- és DIRAC-féle hullámegyenletek újra kvantálására. Mindkettő «egy-elektron» hullámegyenlet. Már pedig az elméletnek feltétlenül határozatlan számú részecskékkel is operálnia kell. Például mai felfogásunk szerint az atom magjában nincs elektron, mégis aktív testek β -bomlása alkalmával elektron lép ki a magból. Olyan elméletre van tehát szükségünk, mely megengedi, hogy részecskék keletkezését és megsemmisülését is számbavehessük. Ezt az eredményt tényleg elérjük az egy-elektron hullámegyenlet szuperkvantálásával.

Kiindulunk DIRAC egyenletéből:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left\{ e\Phi + c \left[\gamma_1 \left(\frac{\hbar}{i} \partial_1 - \frac{e}{c} \varphi_1 \right) + - + - \right] - mc^2 \Gamma \right\} \psi = 0. \quad (52)$$

A konjugált egyenlet

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi^* \left\{ e\Phi - c \left[\gamma_1 \left(\frac{\hbar}{i} \partial_1 + \frac{e}{c} \varphi_1 \right) + - + - \right] - mc^2 \Gamma \right\} = 0. \quad (53)$$

A csillag mint megkülönböztető jel egyszerű téridőfüggvényeknél a konjugált komplex függvényt jelenti, operátoroknál azonban az adjungált operátort.

Mind a két egyenletet ezentúl pontosan ugyanolyan értelemben téregyenletrendszernek tekintjük, mint az előző részben a MAXWELL-rendszert. m és e adott numerikus koefficiensek szerepét játsszák. ψ mint téridőfüggvény az elektron-hullámtér alkotó függvénye. (52) és (53) ebben az értelemben az elektron-hullámtér klasszikus egyenletei, melyeknek kvantálása tehát épp oly jogos, mint a

MAXWELL-egyenleteké. Ez a kvantálás semmi nehézségbe sem ütközik. Elfajulás nincs, a HAMILTON-függvény rögtön felírható:

$$H = \int \phi^* \left\{ e\Phi + c \left[r_1 \left(\frac{\hbar}{i} \partial_1 - \frac{e}{c} \varphi_1 \right) + - + - \right] - mc^2 \Gamma \right\} \phi d\tau. \quad (54)$$

(12) szerint meggyőződhetünk róla, hogy DIRAC egyenletének mindkét alakja kanonikus egyenletek formájában jelenik meg, ha a Q kanonikus változót és a P konjugált impulzust következőképpen állapítjuk meg:

$$Q = \phi, \quad P = -\frac{\hbar}{i} \phi^*.$$

Hogy egyszerű időfüggvényekre térhessünk át, ismét sorbafejtést végzünk. Legyenek például konkrét elektromágneses potenciálok mellett a (52) DIRAC-féle egyenlet sajátfüggvényei $u_1(x_1, x_2, x_3), \dots, u_k(x_1, x_2, x_3), \dots$. Ezek trivialeleg teljes és ortogonális függvényrendszert alkotnak, úgy, hogy ϕ szerintük sorba fejthető:

$$\phi = \sum a_k u_k, \quad \phi^* = \sum a_k^* u_k^*. \quad (55)$$

A kvantálásra azáltal térünk át, hogy az a_k -k és a_k^* -k között csererelációkat állapítunk meg, egészen úgy, mint fentebb a Q_a^k -k és P_a^k -k között. Ezáltal az a_k és a_k^* egyszerű függvényjellege gyökeres változást szenved: operátorokká válnak. Velük együtt természetesen ϕ és ϕ^* is. A (48) csererelációk a HEISENBERG-féléknek pontos másolatai voltak. Hogy ezek fotonokra tényleg beválnak-e, azt a priori nem dönthetjük el. A velük kvantált sugárzási térből azonban utólagosan levezethető a fekete sugárzás PLANCK-féle energiaeioszlása. Ez igazolja alkalmazásukat. Egyik következményük, amint láttuk, az volt, hogy síkhullám sok azonos állapotú fotonból állhat. Fotonokra tehát semmiesetre sem érvényes a FERMI-DIRAC-, hanem csak a BOSE-EINSTEIN-statisztika. A PAULI-féle kizárási elv alapján álló FERMI-DIRAC-statisztika szerint ugyanis két teljesen azonos állapotú részecske egy rendszerben nem fordulhat elő. Tapasztalatunk szerint éppen ez az eset áll fenn az elektronokra. Ennélfogva a (48) relációk nem alkalmazhatók.

JORDAN és WIGNER mutatták meg, hogy elektronokra a következő csererelációk érvényesek:

$$a_k a_m + a_m a_k = 0, \quad a_k^* a_m^* + a_m^* a_k^* = 0, \quad a_k^* a_m + a_m a_k^* = \delta_{km}. \quad (56)$$

Első teendőnk természetesen megmutatni, hogy (56)-nak megfelelő operátorok tényleg léteznek. Azért is feljegyezzük az operátorok matrixalakjait. Ha bevezetjük a következő rövidítéseket

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1',$$

akkor

$$a_k = 1' \times 1' \times \dots \times 1' \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times 1 \times 1 \dots$$

$$a_k^* = 1' \times 1' \times \dots \times 1' \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times 1 \times 1 \dots$$

A kiírt kétsoros matrixok a k -adik helyen állanak. A szorzás jele direkt matrix-szorzatot jelent. Egyszerű behelyettesítés (56)-ba meggyőz bennünket, hogy a relációk azonosan ki vannak elégítve. A gyakorlat azonban könnyebben kezelhető operátorokat kíván. Ismertetésük céljából először is bevezetjük az u_k állapotban levő részecskék N_k számát. PAULI elve alapján N_k csak 0 vagy 1 lehet. (56) tényleg erre vezet. Ismeretes, hogy a nem kvantált (55)-beli a_k és a_k^* fizikai értelmezése a következő: ha tudni akarjuk, hogy a ψ állapotú részecskén végzett energiamérés mekkora valószínűséggel vezet az u_k sajátállapot energiaértékére, akkor megejtjük az (55) sorbafejtést és $a_k^* a_k$ -val definiáljuk a keresett valószínűséget. Ennek a megállapodásnak természetes átértelmezése a sok elektron esetére, hogy $a_k^* a_k = N_k$ adja meg az u_k állapotú elektronok számát. Már most (56) első, ill. második egyenletéből, ha $k = m$, következik $(a_k)^2 = 0$, $(a_k^*)^2 = 0$. A harmadik egyenlet egyenlő indexek esetén

$$a_k^* a_k + a_k a_k^* = 1.$$

Ha erre balról a_k^* -t, jobbról a_k -t alkalmazzuk, nyerjük

$$(a_k^*)^2 (a_k)^2 + (a_k^* a_k)^2 = a_k^* a_k.$$

Tehát $N_k^2 = N_k$, vagyis $N_k = 0, 1$.

Legyen ezek után

$$a_k^* = N_k \Delta_k V_k, \quad a_k = V_k \Delta_k N_k.$$

V_k előjelfüggvény értelmezésére szükséges, hogy az egyes állapotokat tetszésszerűen, de egyszersmindenkora meghatározott sorrendbe szedjük. Akkor

$$V_k = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - 2N_i) = \pm 1.$$

Végül Δ_k az N_k -ra ható operátor, mely definíciószerűleg N_k -t $1 - N_k$ -vá változtatja, de N_i -re ($i \neq k$) nem hat. Ha $m > k$, akkor V_m kifejezésében bizonyosan előfordul az $(1 - 2N_k)$ tényező. Δ_k hatására ez a tényező jelet vált:

$$\Delta_k (1 - 2N_k) = 1 - 2(1 - N_k) = -(1 - 2N_k).$$

Ennélfogva $\Delta_k V_m = -V_m$. Viszont $\Delta_m V_k = V_k$, mert V_k kifejezésében N_m még nem fordul elő.

Könnyen megmutatható, hogy most (56) tényleg ki van elégítve. Lássuk például az első egyenletet:

$$V_k \Delta_k N_k V_m \Delta_m N_m + V_m \Delta_m N_m V_k \Delta_k N_k = \\ -V_k V_m (1 - N_k) (1 - N_m) + V_k V_m (1 - N_m) (1 - N_k) \equiv 0.$$

A sok részecskéből álló rendszer állapotának jellemzésére egy $\chi(N_1, N_2, \dots, N_k, \dots)$ SCHRÖDINGER-féle állapotfüggvényt vezetünk be. $|\chi|^2$ legyen annak a valószínűsége, hogy az u_1 sajátállapot N_1 elektronnal, a k -dik állapot N_k elektronnal van betöltve. Az a_k^* és a_k operátorok a χ -ben fellépő N_i változókra hatnak. Ha a χ függvény szerint az u_k állapotban nincs elektron: $\chi(N_k) = \delta_{N_k, 0}$, akkor a reál alkalmazott a_k^* operator betöltöttséget eredményez:

$$a_k^* \chi(N_k) = N_k \Delta_k V_k \delta_{N_k, 0} = N_k \delta_{1-N_k, 0} = 1$$

Ha viszont $\chi(N_k)$ betöltöttséget jelez: $\chi(N_k) = \delta_{N_k, 1}$, akkor a_k^* alkalmazása folytán 0-sá válik:

$$a_k^* \chi(N_k) = N_k \Delta_k V_k \delta_{N_k, 1} = N_k \delta_{1-N_k, 1} = 0.$$

Kimondható, hogy a_k^* betöltetlen állapotot betöltötté változtat, másszóval k -állapotú részecske keletkezésének matematikai

megfogalmazását teszi lehetővé. Épp úgy meg lehet mutatni, hogy a_k alkalmazása az állapotfüggvényre k -állapotú részecske eltűnését eredményezi.

A vázolt lehetőségek az elméleti fizika analitikai segéd-eszközeinek hatalmas arányú fejlődését jelentik. A fontosabb kérdés azonban mégis az, mi a szuperkvantálás főmunkaterülete. Erre egy szóval felelhetünk: a magprobléma. A legaktuálisabb kérdés ma kétségtelenül a proton és neutron, továbbá két proton, ill. két neutron között fellépő erő megállapítása. Ennek az erőnek felismert kicserélési jellegét úgy magyarázzuk, hogy az egyik nehéz részecske félnehéz testet (mezont) vagy könnyű részecskéket (elektront, neutrínót) bocsát ki, melyet a partnere elnyel. Matematikailag ez az elgondolás eléggé egyszerűen hozható kifejezésre azáltal, hogy a nehéz és könnyű részecskék között olyan kölcsönhatást szerkesztünk meg, mely ezeknek a részecskéknek hullámfüggvényeiből épül fel. A szuperkvantálás révén a kölcsönhatás kifejezésében ekkor fellépnek a jellemző a_k^* , a_k operatorok, melyek a részecskék keletkezéséről és eltűnéséről beszámolnak. Az úttörő munkát itt FERMI végezte, ki elsőnek állított fel kölcsönhatást a nehéz és könnyű részek közt. A nehézség ma főleg az, hogy a bő lehetőségek megszorítására alig van más szempontunk, mint az egyszerűség és relativisztikus invariancia.

A hullámgyenlet szuperkvantálásának egy másik szép eredménye, hogy lehetségessé tette az elektomágneses tér és a hullámgyenlet összefoglalását egyetlen rendszerré. E szerint a tér határozza meg a részecskék mozgását (a φ_k -k DIRAC-egyenletében), másfelől ez a mozgás módosítja a teret a (4) egyenletrendszer szerint, ha a jobboldali s_k helyébe a DIRAC-féle négyes áramot helyettesítjük:

$$s_k = e\psi^*\gamma_k\psi, \quad (k = 1, \dots, 4)$$

ahol $\gamma_4 = i$. A ψ -k kvantálása nélkül már most például a

$$\partial_r f_{kr} = -4\pi i e \psi^* \psi \quad (57)$$

egyenlet súlyos visszasságra vezetne. Hiszen kvantálás nélkül $\psi^*\psi$ az elektronfelhő sűrűségeloszlását adja, (57) tehát COULOMB-

erőket állapítana meg e felhő egyes részei között. Ennek pedig végzetés következményei volnának. A H atom esetében például a felhőrészek közötti kölcsönhatás tekintetbevétele 30—40 %-kal hamisítaná meg a termék helyes értékét. Egészen másképp alakul a helyzet a ϕ -k kvantálása után. Akkor (55) szerint

$$\int \phi^* \phi d\tau = \sum_k a_k^* a_k = \sum_k N_k = N, \quad (58)$$

hol N az összes jelenlevő részecskék száma. $e\phi^*\phi$ tehát már nem egy elektron felhőjének sűrűsége, hanem a térfogategységben foglalt részecskék töltése. Hogy e részecskék között (57) alapján COULOMB-erő lép fel, nagyon természetes.

Végül (58) szorzása e -vel arra az eredményre vezet, hogy valamely rendszer összes töltése az elemi töltés egészszámú többszöröse.

Összefoglalás.

A többtestprobléma kompozíciós módszerének rövid ismertetése után a szuperkvantálás módszere nyer megvilágítást. Azokat a nehézségeket, melyeket az elektromágneses tér kvantálása okoz, itt újszerű vektoroperátorok bevezetésével kerüljük el. Szemmel tartva a DIRAC-féle egyenlet szigorú értelmezését, az energiafüggvény kifejezéséből kiküszöböljük a töltött részecskéknek nemcsak elektrosztatikai, hanem elektrodinamikai önpotenciáljait is és így előállítjuk az elektrodinamikának klasszikus értelemben szingularitásmentes HAMILTON-operátorát.

Irodalom.

- P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. 114, 243 és 710, 1927.
 W. HEISENBERG u. W. PAULI, ZS. f. Phys. 56, 1, 1929; 59, 169, 1930.
 W. HEISENBERG, Ann. d. Phys. 9, 338, 1931.
 E. FERMI, Rev. Mod. Phys. 4, 131, 1932.
 L. ROSENFELD, Ann. d. Phys. 5, 113, 1930.
 K. F. NOVOBÁTZKY, ZS. f. Phys. 111, 292, 1938.
 P. JORDAN u. E. WIGNER, ZS. f. Phys. 47, 631, 1928.
 W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, Oxford 1936.
 J. v. NEUMANN, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin. 1932.

- H. WEYL, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig 1928.
P. JORDAN, Anschauliche Quantentheorie. Berlin 1936.
C. F. von WEIZSÄCHER, Die Atomkerne. Leipzig 1937.
E. WIGNER, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantentheorie der Atomspektren. Braunschweig 1931.

Novobátsky Károly.

MEHRKÖRPERPROBLEM IN DER QUANTENTHEORIE.

Im Rahmen einer allgemeinen Besprechung des quantentheoretischen Mehrkörperproblems werden die Schwierigkeiten, mit denen die Quantelung des elektromagnetischen Feldes behaftet ist, durch Einführung eines neuartigen Operatorenverfahrens behoben. Im Sinne einer korrekten Deutung der DIRAC-schen Gleichung werden aus dem Ausdruck der Energiefunktion sowohl das elektrostatische, als auch das elektrodynamische Selbstpotential der geladenen Teilchen ausgemerzt, woraus sich ein klassisch singularitätenfreier HAMILTON-operator für die Elektrodynamik ergibt.

K. F. Novobátsky.

A KÉTATOMOS MOLEKULÁK ELMÉLETÉNEK ALAPJAI.¹

Bevezetés.

A kétatomos molekulákra vonatkozó alapvető ismereteink szerint e molekulák szinképe hármas tagozódást mutat, amely különböző sávrendszerekből, az egyes sávrendszereken belül fekvő sávokból s végül e sávokat alkotó vonalakból áll. A spektrum e hármas tagozódását a termék, illetve a molekula energianívóinak hármas tagozódására vezetjük vissza. Az energianívókra már régóta ismeretes egy empirikus formula, mely a következő:

$$W = W_{el} + a(v + \frac{1}{2}) - b(v + \frac{1}{2})^2 - c(v + \frac{1}{2})^3 - \dots + B_v J(J+1) - D_v [J(J+1)]^2 + \dots, \quad (1)$$

ahol

$$B_v = B_e - \alpha_e(v + \frac{1}{2}) - \beta_e(v + \frac{1}{2})^2; D_v = D_e + \gamma_e(v + \frac{1}{2}). \quad (2)$$

A formulákban szereplő v és J változó értékek és csak egész-számú értékeket vehetnek fel, míg a többiek állandók.

A spektrumvonalak a fenti formulával leírható két energianívó közötti átmenetek révén jönnek létre. Az ilyen átmenetekben a formula első része, W_{el} , egy sávrendszeren belül állandó, a második rész v -vel változik és így írja le a sávrendszeren belüli sávokat, de egy sávon belül állandó, amikor is a harmadik rész változik J változásával s ez eredményezi a spektrum utolsó legfinomabb egy-ségeit, a sávokon belüli vonalakat. Így tehát a fenti három részből álló empirikus energiaformula valóban megfelel a spektrum hármas tagozódásának.

¹ Jelen dolgozat a szerzőnek 1940 május 3-án az Elméleti Fizikai Intézet kolloquiumán tartott előadása nyomán készült.

Az elmélet célja e formulának levezetése s a benne előforduló együtthatóknak ismert molekuláris állandókra való visszavezetése, továbbá a hármas tagozódás dinamikai értelmezése. Ez utóbbi már igen régi keletű s egyidejű a hármas tagozódás empirikus felfedezésével. E szerint a molekula rendkívül bonyolult mozgását három aránylag igen egyszerű modell összetételének segítségével iparkodtak megközelíteni. Ezek közül az első az ú. n. «stacionárius molekula», melyen egy a fix magok körül keringő elektronokkal bíró modellt értünk, a második az «anharmonikus oszcillátor» s végül a harmadik a «szimmetrikus pörgettyű». Ilyenformán tehát a két magot körülvevő elektronkonfigurációnak egy elektron ugrása által való megváltozása felel meg a sávrendszerek létrejöttének, az egyes sávrendszereken belüli sávok a magok különböző rezgési állapotai közötti átmenetektől származnak s végül, mivel a magok a rezgésen kívül még forognak is, a különböző forgási állapotok közötti átmenetek adnak számot a sávokon belüli vonalakról. Ezen energiák azután természetesen szuperponálódnak. Így a fenti formula első része az «elektronenergia», a második a «vibrációs» s a harmadik a «rotációs».

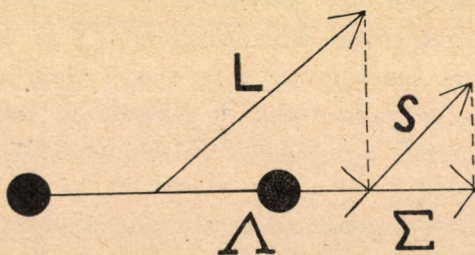
1. Stacionárius molekula.

Vizsgáljuk meg először az elektronkonfigurációhoz tartozó energiákat. Ezen energianívók vizsgálatához első közelítésben a magokat nyugvóknak tételezhetjük fel. Ezt megmutatták BORN és OPPENHEIMER.¹ Az ilyen fix magokkal bíró fiktív molekulát stacionáriusnak nevezzük. Itt most feltételezzük, hogy a magok olyan távol vannak egymástól, hogy az elektronokra együttesen ható eredő tér elveszti centrális jellegét és tengelymenti szimmetriát mutat. Ha ezen axiális tér és az elektronok eredő pályas és spinimpulzusmomentuma, L és S közti kölcsönhatás nagy a pályas és spinimpulzusmomentumok egymás közötti mágneses kölcsönhatáshoz képest, a pályas és spinimpulzusoknak a magokat összekötő egyenessel párhuzamos komponensei A és S

¹ BORN u. OPPENHEIMER. Ann. der Phys. **84.** 457 (1927).

kvantált értékekkel bírnak. Ezen esetet először HUND² tárgyalta modellszerűleg s az irodalomban, mint HUND-féle *a*) eset ismeretes.³ Szemléltetésül szolgáljon az 1. ábra.

Tegyük fel, hogy a két fix magot f elektron veszi körül. Akkor, minthogy minden elektron spinje a molekula tengelyéhez



1. ábra. HUND-féle *a*) eset álló magokkal bíró molekula esetében. A tér axiális szimmetriája miatt az eredő. pályá- és spinimpulzusmomentum a molekula tengelye mentén kvantálódik.

(a magokat összekötő egyeneshez) képest parallel és antiparallel módon állhat be, ez $2f$ számú sajátfüggvényt ad. Ezek lesznek a PAULI-féle előállításban:⁴

$$\begin{aligned} &\Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f}; \Phi_{\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f}; \Phi_{\alpha_1, \beta_2, \dots, \alpha_f}; \dots \Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_f} \\ &\Phi_{\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_f}; \dots \Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{f-2}, \beta_{f-1}, \beta_f}; \dots \Phi_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f} \end{aligned} \quad (3)$$

Ha a k -dik elektron spintengelye a molekula tengelyével párhuzamos z koordináta-tengelyhez képest parallel, úgy ezen állapotot α_k indexszel, ha antiparallel, úgy β_k indexszel jelöljük. Ha egy oly megoldást alkalmazunk, amelyben minden egyes individualis spintengely külön-külön kvantálva van a z tengely mentén, akkor a fenti hullámfüggvények közül szükségképpen csak egy különbözik zérustól. De a spin- és pályaimpulzus

² F. HUND, Zeitschr. f. Phys. **36**, 657 (1926), **40**, 742 (1927), **42**, 93 (1927).

³ Valóságban HUND a forgó molekulákat vizsgálta és a különböző vektorkapcsolódási esetei erre vonatkoznak. Könnyen belátjuk azonban majd a későbbiek folyamán, hogy a stacionárius molekulára érvényes fenti modell teljes analogonja a forgó molekulára érvényes *a*) esetnek.

⁴ W. PAULI, Zeitschr. f. Phys. **43**, 601 (1927).

közötti mágneses kölcsönhatás ezt lehetetlenné teszi és így 2^f számú szimultán hullámfüggvény szükséges, melyek közül bármelyik modulusának a négyzete úgy tekinthető, mint a spintengelyek megfelelő orientációinak valószínűsége. A stacionárius molekulának lesz tehát 2^f számú szimultán hullámegyenlete, mely a következő alakú:

$$(\mathbf{H}_0 - W_0) \phi_{i_1, i_2, \dots, i_f} = 0, \quad (4)$$

ahol $i_k = \alpha_k$ vagy β_k , továbbá \mathbf{H}_0 az f elektron $x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots, z_f$ koordinátáinak és a különböző elektronok pálya-impulzuszmomentuma x, y, z komponenseinek megfelelő $\mathbf{S}_{1x}, \dots, \mathbf{S}_{1y}, \dots, \mathbf{S}_{1z}, \dots, \mathbf{S}_{fx}, \dots, \mathbf{S}_{fy}, \dots, \mathbf{S}_{fz}$ PAULI-féle spinoperátoroknak egy operátor függvénye. Ezen operátorok a következő tulajdonsággal bírnak, ha a ϕ -kre alkalmazzuk őket:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{kx} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots} &= \frac{1}{2} \phi_{\alpha_1 \dots \beta_k \dots}; \quad \mathbf{S}_{kx} \phi_{\alpha_1 \dots \beta_k \dots} = \frac{1}{2} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots} \\ \mathbf{S}_{ky} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots} &= -\frac{1}{2} i \phi_{\alpha_1 \dots \beta_k \dots}; \quad \mathbf{S}_{ky} \phi_{\alpha_1 \dots \beta_k \dots} = +\frac{1}{2} i \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots} \\ \mathbf{S}_{kz} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots} &= \frac{1}{2} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots}; \quad \mathbf{S}_{kz} \phi_{\alpha_1 \dots \beta_k \dots} = -\frac{1}{2} \phi_{\alpha_1 \dots \beta_k \dots} \end{aligned} \quad (5)$$

Az r magtávolságot \mathbf{H}_0 , mint paramétert tartalmazza. Írjuk ki pl. az első hullámfüggvényt, mint a beleértett koordináta argumentumok függvényét, melyet a következőkben a rövidség kedvéért elhagyunk:

$$\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_f}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots, z_f, r). \quad (6)$$

Minthogy f elektron rendszerével állunk szemben (4) általános megoldása nem lehetséges. Tehetünk azonban olyan egyszerűsítő feltevéseket, melyek mellett közelítő megoldás mégis megadható. Így feltehetjük pl., hogy \mathbf{H}_0 -ban bizonyos kölcsönhatások elhanyagolása mellett a magokat körülvevő f elektron közül $f-2$ vagy $f-3$ zárt héjat alkot és a spektrumra csak a kívüllevő 2, illetve 3 valenciaelektron mérvadó. Ezen esetekkel részletesen Budó és Kovács foglalkoztak.⁵ 2 valenciaelektron esetében, ha

⁵ A. Budó und I. Kovács, Zeitschr. f. Phys. **109**, 393 (1938), **111**, 633 (1939) **116**, 693 (1940). I. Kovács, Zeitschr. f. Phys. **111**, 640 (1939). I. Kovács und A. Budó, Zeitschr. f. Phys. (Megjelenés alatt.)

pl. az elektronok eredő pályaimpulzusmomentumának a molekula-tengelyre való vetülete $A=1$, az elektronok eredő spinje pedig $S=0$, tehát egy ú. n. 1H_1 állapotról van szó, a megoldás lesz:

$$\begin{aligned} & \Phi_{\alpha, \beta}(x_1 x_2, y_1 y_2, z_1 z_2) = \\ & = \left[\sum_{\lambda_1 + \lambda_2 = 1} a_{\lambda} \{ p(x_1 y_1 z_1) \cdot q(x_2 y_2 z_2) \cdot e^{i(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)} + p(x_2 y_2 z_2) \cdot q(x_1 y_1 z_1) \cdot e^{i(\lambda_2 \varphi_1 + \lambda_1 \varphi_2)} \} \right] \cdot \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1) \beta(2) - \beta(1) \alpha(2)], \end{aligned} \quad (7)$$

ahol p és q a hidrogénatom sajátfüggvényeihez analóg megoldások, λ_1, λ_2 az egyes elektronok pályaimpulzusmomentumainak a magokat összekötő egyenesre való vetületei, φ_1, φ_2 az elektronok helyzetét meghatározó hengerkoordináták, α, β az elektronok spinfüggvényei. Az összegezés az összes olyan állapotokra vonatkozik, melyekre $A = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

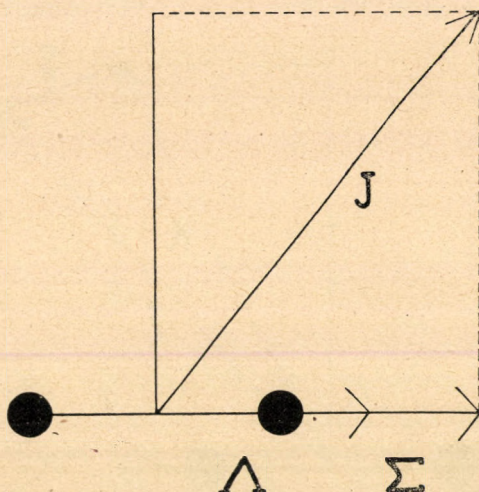
W_0 explicit alakjára a következőkben nem lesz szükségünk, mindössze csak az r paramétertől való függés, ami érdekel bennünket. Erre a hullámegyenlet megoldása nélkül is vannak egyszerű feltevések, melyek a tapasztalatot többé-kevésbé megközelítik s amelyekkel a következőkben még foglalkozunk.

2. Forgó molekulák.

Ha most megengedjük a magok mozgását, így a rezgést és a forgást, akkor mindjobban megközelítjük a valóságos molekulát. A magok mozgásához is fog most tartozni egy impulzusmomentum (az ábrán névtelenül szerepel, mivel ez nincs kvantálva) mely, ha kis értékkel bír, $Q = A + \Sigma$ -val alkotja a teljes impulzusmomentumot, mely szintén kvantálva van s kvantumszáma J . Ez a HUND-féle a) eset mozgó magok esetén.²

Ha a magok mozgásához tartozó impulzusmomentum nagy, fellép a «spinnek rotáció által való elkötése», mely abban nyilvánul meg, hogy a spinmomentum parallel komponense nem bír többé a Σ kvantált értékkel, hanem helyette a rotációhoz képest gyenge mágneses kölcsönhatás elhanyagolásának határesetében a pályaimpulzusmomentum parallel komponense össze-

kapcsolódik a magmozgáshoz tartozó impulzuszórával egy eredő kvantált K alakjában és ezen K és S kapcsolódnak össze J -vé. Tehát a rotáció erősbödő hatására az S spinmomentum elhagyja a molekulatengelyt és a rotáció és A eredőjéhez kvantálódik. Innen van a fenti elnevezés. Egyébként ez az ú. n. HUND-féle b) eset,² mely inkább a magasabb rotációs állapotok esetében van megvalósítva, míg az a) eset inkább alacsonyabb



2. ábra. HUND-féle a) eset mozgó magokkal bíró molekula esetében. Az L és S vektorok itt nincsenek külön feltüntetve csak a vetületük: Λ és Σ .

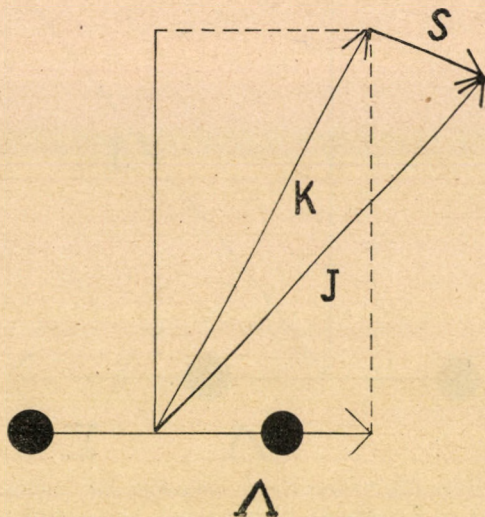
rotációs állapotokban tapasztalható. A helyzet jól áttekinthető a 2. és 3. ábrán.

A valósághoz természetesen a közbülső eset áll legközelebb, amelyre, VAN VLECK⁶ nyomán, a következő hullámegyenlet érvényes:

$$\left[H_0 - \frac{h^2}{8\pi^2 M r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \cotg \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \right) - W \right] \phi_{i_1' \dots i_f'} = 0; \quad i_k' = \alpha_k' \text{ vagy } \beta_k', \quad (8)$$

⁶ J. H. VAN VLECK, Phys. Rev. **33**, 467 (1929).

ahol θ és ω a molekula tengelyének az x', y', z' fix koordináta-rendszerhez képesti helyzetét meghatározó polár és azimut szögek és ahol M a magok $\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ «redukált» tömege. Itt ugyanis a magok mozgása következtében már nem kapunk helyes képet, ha, mint előbb, a molekulát a magokhoz rögzített x, y, z koordináta-rendszerből figyeljük, hanem egy fix x', y', z' rendszert kell bevezetnünk, melyben a magokhoz rögzített x, y, z rendszer szabadon mozoghat. Mindkét rendszer középpontját a molekula



3. ábra. HUND-féle *b)* eset, melyben a rotáció erősödő hatására az S vektor a molekulatengelyt elhagyván a K vektorral alkotja az eredő J -t.

tömegközéppontjába tettük, melyet nyugalombanlévőnek gondolunk. Ezzel elhanyagoljuk a molekula translációs energiáját, mely triviális addíciós formában lépne be. Azonkívül elhanyagoljuk a különbséget a molekula és a magok tömegközéppontja között, aminek tekintetbevétele csak lényegtelen befolyást gyakorolna eredményeinkre.

H_0 igen könnyen kifejezhető a molekulatengellyel párhuzamos z tengellyel bíró és a magokkal együttmozgó x, y, z rendszerben. Ekkor H_0 , mivel a magokkal együttmozgó rendszerben a

magok koordinátái nem szerepelnek, ezen mozgó koordinátáknak ugyanolyan függvénye, mint stacionárius esetben volt. H_0 -t természetesen lehetséges kifejezni a fix rendszerben is, de ekkor explicite tartalmazná θ és ω -t, amennyiben a molekulatengely általában ferdén áll ebben a rendszerben. Tegyük fel, hogy $\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$ a magok kölcsönös potenciális energiája benne van H_0 -ban és így nem szerepel explicite a hullámegyenletben. Az általánosság megszorítása nélkül felvehető, hogy az x tengely az $x'y'$ síkban fekszik, ami azt eredményezi, hogy a mozgó koordinátarendszer helyzetének jellemzésére elegendő két adat. Az általunk használt szögek a szokásos EULER-féle szögekkel a következő összefüggést mutatják: $\vartheta = -\theta$, $\phi = -\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi = 0$. Ekkor a mozgó és álló tengelyek kapcsolata így alakul:

$$\begin{aligned} x &= y' \cos \omega - x' \sin \omega, \\ y &= z' \sin \theta - (x' \cos \omega + y' \sin \omega) \cos \theta, \\ z &= z' \cos \theta + (x' \cos \omega + y' \sin \omega) \sin \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Követve BORN és OPPENHEIMER-t¹ és KRONIG-ot is⁷, azonban a spin beleértésével általánosítva, igyekszünk most a megoldást megközelíteni $\psi = \Phi \chi(r, \theta, \omega)$ formában, ahol $\Phi(x_1 \dots x_f)$ -t «belső» hullámfüggvénynek fogjuk nevezni s ami nem más, mint a stacionárius molekulára vonatkozó megoldás és χ egyedül a magkoordináták függvénye. Az explicit differenciálás véghezvitelében Φ , mint r, θ, ω függvénye tekintendő, mivel $x_1 \dots x_f$ (9) szerint függ ezektől.

Meg kell még jegyeznünk, hogy a hullámfüggvényben az α -k és β -k helyett α' és β' indexeket használtunk. Ez azt jelenti, hogy a PAULI-féle hullámfüggvényeknek megfelelő x, y, z rendszer helyett x', y', z' -t használtunk, azaz a spinkvantálás a mozgó rendszer helyett az állóra vonatkozik, ami a (8)-ban feltételezett fix rendszer miatt szükséges. Így tehát szükséges a mi spinmegoldásainkat az α, β rendszerből az α', β' rendszerbe transz-

⁷ R. de L. KRONIG, Zeitschr. f. Phys. 46, 814, 50, 347 (1928).

formálni. Ezen transzformáció nélkül elhanyagolnók teljesen a molekularotációnál fellépő spin giroszkópiái effektust. A kívánt transzformáció ki van fejtve PAULI⁴ művében, aki a transzformációs schémát egy elektronra formulázta meg, de nem nehéz kiterjeszteni többre, mivel ez az egyes individuális elektronok koefficienseinek egyszerű szuperpozíciója, amint már NEUMANN és WIGNER⁸ megadták. Így lesz:

$$\Phi_{i'_1 \dots i'_f} = \sum_{i_1 \dots i_f} A(i'_1 \dots i'_f; i_1 \dots i_f) \Phi_{i_1 \dots i_f}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots, z_f), \quad (10)$$

ahol az összegezés kiterjesztendő minden egyes i_k -nak α_k és β_k két értékére és

$$A(i'_1 \dots i'_f; i_1 \dots i_f) = A(i'_1; i_1) \cdot A(i'_2; i_2) \dots A(i'_f; i_f), \quad (11)$$

ahol

$$\begin{aligned} A(\alpha'_k; \alpha_k) &= \cos \frac{1}{2} \theta \cdot e^{-\frac{i}{2} \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right)}, \\ A(\alpha'_k; \beta_k) &= -i \sin \frac{1}{2} \theta \cdot e^{-\frac{i}{2} \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right)}, \\ A(\beta'_k; \alpha_k) &= -i \sin \frac{1}{2} \theta \cdot e^{\frac{i}{2} \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right)}, \\ A(\beta'_k; \beta_k) &= \cos \frac{1}{2} \theta \cdot e^{\frac{i}{2} \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (12)$$

(10), (11), (12) tekintetbevételével a hullámgyenletben a belső hullámfüggvényen az ω és θ szerinti differenciálás most már keresztülvihető. Így:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi'}{\partial \omega} &= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial x_k}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial y_k}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{\partial z_k}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \Phi' - \\ &\quad - \frac{1}{2} i \Phi' \sum_{k=1}^f c'_k, \end{aligned} \quad (13)$$

ahol c'_k egyenlő $+1$ vagy -1 megfelelően, amint i'_k egyenlő α'_k vagy β'_k -val és ahol a rövidség kedvéért $\Phi_{i'_1 \dots i'_f}$ helyett Φ' -t írtunk. A jobboldal első tagja onnan ered, hogy a Φ' -nek $x_1 \dots z_f$ argumentumai (9) szerint tartalmazzák ω -t, a második tag pedig, mivel a kifejtésben előforduló együtthatók is függenek ω -tól.

⁸ J. v. NEUMANN és E. WIGNER, Zeitschr. f. Phys. 47, 203, 49, 73 (1928).

A második tag egyszerűen kifejezhető a PAULI-féle spinoperatorral, mivel $\frac{1}{2} \Phi' \sum_{k=1}^f c_k = \sum_{k=1}^f \mathbf{S}'_{kz} \Phi'$, ahol \mathbf{S}'_{kz} hasonló \mathbf{S}_{kz} -hoz, eltekintve, hogy ez megfelel az itteni rendszernek. Ha alkalmazzuk a (9) transzformációs összefüggést $\frac{\partial x_k}{\partial \omega}$ stb. kiszámítására és az $\mathbf{S}'_{kz} = \mathbf{S}_{kz} \cos \theta + \mathbf{S}_{ky} \sin \theta$ relációt találjuk, hogy

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \omega} = -i(\mathbf{P}_z \cos \theta + \mathbf{P}_y \sin \theta) \Phi', \quad (14)$$

ahol

$$\mathbf{P}_z = \sum_{k=1}^f \left[-i \left(x_k \frac{\partial}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \mathbf{S}_{kz} \right] = \mathbf{L}_z + \mathbf{S}_z \quad (15)$$

és hasonlóképpen definiálva \mathbf{P}_x és \mathbf{P}_y . A \mathbf{P}_z operátor megfelel a z , azaz a molekulatengely körüli teljesen összekapcsolt pálya- és spinimpulzusmomentumnak.

Hasonló módon könnyen látható, hogy $\frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} = -i \mathbf{P}_x \Phi'$ és következésképpen a teljes hullámegyenlet lesz:

$$\left\{ H_0 - \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \cotg \theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \mathbf{P}_x \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \mathbf{P}_x \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{cosec}^2 \theta \left(\frac{\partial}{\partial \omega} - i \sin \theta \mathbf{P}_y - i \cos \theta \mathbf{P}_z \right)^2 \right] - W \right\} \psi_{i_1 \dots i_f} = 0. \quad (16)$$

Ebben a hullámegyenletben a θ és ω szerinti differenciálásban már csak ψ -nek θ , ω -tól való explicit függését kell tekintetbe venni és nem az implicit effektusokat, melyek a mozgó rendszerből az állóba való transzformációban ezen szögek megjelenéséből erednek. $\psi = \Phi' \chi(r, \theta, \omega)$ esetében ez azt jelenti, hogy $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial \omega}$ csak a χ faktorra hat, de Φ' -re már nem.

Lehetséges a megoldást a következő formában megadni:

$$\psi_{i_1 \dots i_f} = \Phi'(x_1 \dots x_f, r) R(r) u(\theta, \omega) \quad (17)$$

ha a hullámegyenletben bizonyos tagokat elhagyunk, nevezetesen:

$$\frac{\hbar^2 i}{8\pi^2 M r^2} \left[\cotg \theta (\mathbf{P}_x - i \mathbf{P}_y \mathbf{P}_z - i \mathbf{P}_z \mathbf{P}_y) + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{cosec} \theta \mathbf{P}_y \frac{\partial}{\partial \omega} + 2 \mathbf{P}_x \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \psi_{i_1 \dots i_f}, \quad (18)$$

továbbá a

$$\frac{h^2}{8\pi^2 M r^2} \left[(\mathbf{P}_x^2 + \mathbf{P}_y^2) \Phi' - 2r \frac{\partial \Phi'}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r^2} - \frac{2r^2}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right] R u \quad (19)$$

-nak azon részét, mely az elektron-kvantumszámokkal kapcsolatos frekvenciák feletti átlagolásnál eltűnik. Ez (19)-nek a második és negyedik tagja. Ezen utóbbi tagok elhanyagolása akkor indokolt, ha az elektronmozgáshoz tartozó frekvenciák nagyok a molekuláris rotációhoz képest. Ebben az esetben az elhagyott tagok csak másod- vagy magasabbrendű közelítésben lesznek számottevők.

Ezen feltevések mellett a hullámegyenlet szeparálható három részre, melyek sorban a következők:

$$(\mathbf{H}_0 - W_0) \Phi_{i_1 \dots i_l} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{h^2}{8\pi^2 M r^2} \left[\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{cosec}^2 \theta \left(\frac{\partial}{\partial \omega} - i \Omega \cos \theta \right)^2 \right] u + W_{\text{rot}} u = 0 \quad (21)$$

$$\left[\frac{h^2}{8\pi^2 M r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + W - W_0(r) - W_{\text{rot}}(r) \right] R = 0, \quad (22)$$

ahol $W_0(r)$ -be belefoglalva gondoljuk a (20)-ban szereplő W_0 -t és a (19) el nem tűnő részét, tehát az első és harmadik tagból származó tagokat. (21) felírásánál felhasználtuk a $\mathbf{P}_z \Phi' = \Omega \Phi'$ relációt, mivel az elektronoknak a molekulatengely körül való teljes pálya- és spinimpulzusmomentuma konstans kvantált Ω értékkel bír a stacionárius molekulában.

Mint könnyen felismerhető, a (20) egyenlet a stacionárius molekula hullámegyenlete. Említettük már az előző fejezetben, hogy bizonyos egyszerűsítő feltevések mellett a közelítő sajátfüggvény erre megadható. A sajátérték explicit alakját, amely természetesen r -t paraméter gyanánt még tartalmazza, csak két elektron esetében alapállapotra sikerült kiszámítani.⁹ A formula azonban már így is annyira komplikált és áttekinthetetlen, hogy

⁹ W. HEITLER und F. LONDON, Zeitschr. f. Phys. **44**, 455 (1927).

csakis numerikus számításokra alkalmas. Mivel azonban (22) megoldhatósága szempontjából W_0 -nak legalább r -től való függésére szükség van, ezen a bajon úgy szoktak segíteni, hogy erre bizonyos közelítő feltevéseket tesznek, melyek az empirikusan meghatározott potenciálgörbékhez a legjobban símulnak s e mellett lehetővé teszik (22) elemi megoldását. Ilyéneket adtak KRATZER,¹⁰ ROSEN és MORSE,¹¹ PÖSCHL és TELLER,¹² HYLLERAAS¹³ és még sokan mások.

Mi a MORSE által megadottat fogjuk használni (22) megoldására, mint ami legjobban megtartja (22) «anharmonikus oscillator» karakterét. Ez pedig a következő alakú:

$$W_0(r) = W_{el} + D[1 - e^{-a(r-r_e)}]^2, \quad (23)$$

ahol W_{el} az r_e egyensúlyi magtávolságnál a potenciálgörbe értéke és D az ettől számított disszociációs energia. Megvilágításul szolgáljon a 4. ábra.

A második hullámegyenlet a «szimmetrikus pörgettyű» egyenlete. REICHE és RADEMACHER¹⁴, KRONIG és RABI¹⁵ hullámmechanikailag, s előttük még DENISSON¹⁶ a matrixmechanika alapján megmutatták, hogy ennek sajátértékei:

$$W_{\text{rot}}(r) = B[J(J+1) - \Omega^2], \quad (24)$$

ahol $B = \frac{h^2}{8\pi^2Mr^2}$ és J az ú. n. rotációs kvantumszám. A sajátfüggvények pedig a következő alakú egységre normált JACOBI-féle polinomok:

$$u(\theta, \omega) = N \frac{d^p}{dt^p} [t^{d+p}(1-t)^{p+s}] e^{iM\omega}, \quad (25)$$

¹⁰ KRATZER, Zeitschr. f. Phys. **3**, 289 (1920).

¹¹ N. ROSEN und P. M. MORSE, Phys. Rev. **42**, 210 (1932), P. M. MORSE Phys. Rev. **34**, 57 (1929).

¹² G. PÖSCHL und E. TELLER, Zeitschr. f. Phys. **83**, 143 (1933).

¹³ E. HYLLERAAS, Phys. Zeitschr. **36**, 599 (1935).

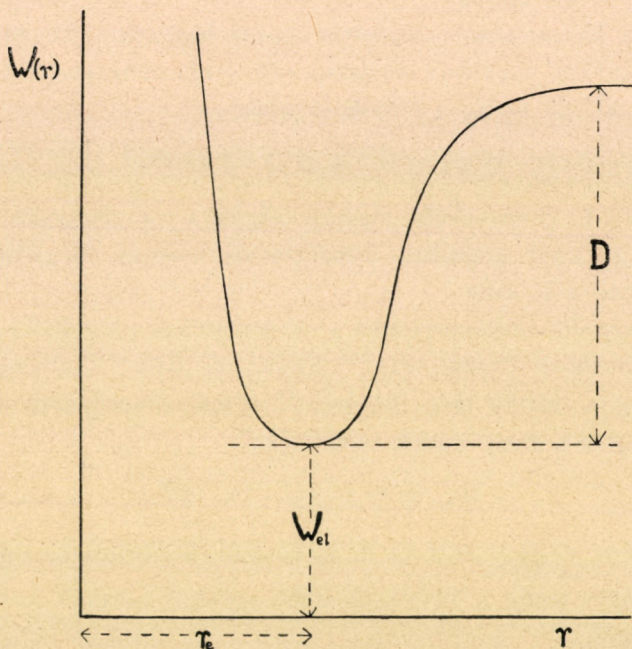
¹⁴ F. REICHE és H. RADEMACHER, Zeitschr. f. Phys. **39**, 444 (1926), **41**, 453 (1927).

¹⁵ KRONIG u. RABI, Nature **118**, 805 (1926), Phys. Rev. **29**, 262 (1927).

¹⁶ D. M. DENISSON, Phys. Rev. **28**, 315 (1926).

ahol $t = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$, $s = |M + Q|$; $d = |M - Q|$ és $p = J - \frac{1}{2}(d + s)$, továbbá N a normálási faktor, mely nem függ θ és ω -tól s végül M az ú. n. mágneses kvantumszám.

(24)-nek levezetése, mint fentebb említettük, már régi keletű, azonban ezen levezetések az elektronspin tekintetbevétele nélkül történtek. VAN VLECK⁶ mutatta meg, ahogy azt az előzőekben láttuk, hogy ugyanez érvényes spinnel is, amikor is Q a molekula-



4. ábra.

tengely körüli teljes pályá- és spinimpulzus összegét jelenti. Ennek az az oka, amint a (15) és (16) egyenletek mutatják, hogy a spin- és pályaimpulzusmomentum a molekula rotációjának egyenletét pontosan additív módon modifikálják. A spin- és pályaimpulzus giroszkópiái effektusának azonossága észszerűnek látszik és általában felvették a spektroszkópikus bizonyítás nélkül. Mindenesetre azonban szükséges volt igazolni ezen azonosságot a PAULI-féle spinfüggvények alkalmazása esetében, mivel felü-

letesen nézve a spintranszformáció (10), (11), (12) formulái nem sok hasonlatosságot mutatnak (9)-nek a pályaeffektusra mérvadó koordinátákba való egyszerű behelyettesítése által végzett transzformáció módszeréhez. A látszólagos különbség a spin- és pályaimpulzus-transzformációban azonban a rotációnak a WIGNER⁸-féle csoportelmélet alapján való tárgyalásánál eltűnik.

Ha most a (23), (24) sajátértékeket behelyettesítjük (22) hullámegyenletbe s meghatározzuk annak W sajátértékét, kapjuk a molekula totális energiáját, melynek kiszámítása tulajdonképpen célunkat képezi.

Legyen ehhez (22)-ben $R = \frac{R'}{r}$, jelöljük $W' = W - W_{el} - D$, továbbá hagyjuk el a (19)-ből származó tagot és W_{rot} -ból a $-BQ^2$ kis tagot, szorozzuk meg az egész egyenletet $\frac{8\pi^2 M}{h^2}$ -tal s végül vezessük az $y = e^{-a(r-r_e)}$ új változót.¹⁷ Ekkor (22) lesz:

$$\frac{d^2 R'}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR'}{dy} + \frac{8\pi^2 M}{a^2 h^2} \left[\frac{W'}{y^2} + \frac{2D}{y} - D - \frac{Ar_e^2}{y^2 r^2} \right] R' = 0, \quad (25)$$

ahol $A = \frac{h^2}{8\pi^2 M r_e^2} J(J+1)$. Mivel $y = e^{-a(r-r_e)}$, $\log y = -a(r-r_e)$, amiből

$$\begin{aligned} \frac{r_e^2}{r^2} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\log y}{r_e a}\right)^2} = \\ &= 1 + \frac{2}{ar_e} (y-1) + \left[-\frac{1}{ar_e} + \frac{3}{a^2 r_e^2} \right] (y-1)^2 + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

ahol is sorbafejtettünk $y=1$, azaz $r=r_e$ hely környezetében és a magasabbrendű tagokat elhagytuk. (26) értékét beírva $\left(\frac{r_e}{r}\right)^2$ helyébe (25)-ben lesz:

$$\frac{d^2 R'}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR'}{dy} + \frac{8\pi^2 M}{a^2 h^2} \left[\frac{W' - c_0}{y^2} + \frac{2D - c_1}{y} - D - c_2 \right] R' = 0, \quad (27)$$

¹⁷ C. PEKERIS, Phys. Rev. **45**, 98 (1934), P. M. MORSE, Phys. Rev. **34**, 57. (1929).

ahol most már csak y szerepel, mint független változó és a c_i állandók a

$$\begin{aligned} c_0 &= A \left[1 - \frac{3}{ar_e} + \frac{3}{a^2 r_e^2} \right]; \quad c_1 = A \left[\frac{4}{ar_e} - \frac{6}{a^2 r_e^2} \right]; \\ c_2 &= A \left[-\frac{1}{ar_e} + \frac{3}{a^2 r_e^2} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

értékkel bírnak.

Legyen most $R'(y) = N e^{-\frac{z}{2} - \frac{b}{2} z^2} F(z)$, ahol $z = 2dy$ és N egy normálási faktor s

$$d^2 = \frac{8\pi^2 M(D + c_2)}{a^2 h^2}; \quad b^2 = -\frac{32\pi^2 M(W' - c_0)}{a^2 h^2}, \quad (29)$$

akkor egyenletünk végül is így alakul:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{b - z + 1}{z} \frac{dF}{dz} + \frac{v}{z} F = 0, \quad (30)$$

ahol

$$v = \frac{4\pi^2 M(2D - c_1)}{a^2 h^2 d} - \frac{b + 1}{2}. \quad (31)$$

Ha kikötjük, hogy v csak egészszám lehessen, akkor $F(z)$ egy generalizált LAGUERRE polinom lesz és így (31)-ben v kifejezésébe betéve b és d értékét (29)-ből, továbbá c_0, c_1, c_2 értéket (28)-ből, kapjuk W' -re, illetve magára W -re a következő kifejezést:

$$\begin{aligned} W &= W_{el} + \left[\omega_e \left(v + \frac{1}{2} \right) - x_e \omega_e \left(v + \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \\ &+ B_e \left[1 - 2x_e \left(3 \sqrt{\frac{B_e}{x_e \omega_e}} - 3 \frac{B_e}{x_e \omega_e} \right) \left(v + \frac{1}{2} \right) \right] J(J+1) - \\ &- \frac{4B_e^3}{\omega_e^2} [J(J+1)]^2 + \dots, \end{aligned} \quad (32)$$

ahol v az ú. n. vibrációs kvantumszám és

$$\omega_e = \frac{ah}{\pi} \sqrt{\frac{D}{2M}}; \quad B_e = \frac{h^2}{8\pi^2 M r_e^2}; \quad x_e = \frac{\omega_e}{4D}. \quad (33)$$

(32) illetve (33)-nak a bevezetésben említett (1) empirikus formulával való egybevetése mutatja, hogy az ott szereplő mennyi-

ségek a következőképpen fejezhetők ki a spektroszkópiai mérésekből ismeretes állandókkal:

$$a = \omega_e; b = x_e \omega_e; B_v = B_e - a_e \left(v + \frac{1}{2} \right); D_v = D_e, \quad (34)$$

ahol

$$a_e = 2B_e x_e \left[3\sqrt{\frac{B_e}{x_e \omega_e}} - 3\frac{B_e}{x_e \omega_e} \right] \text{ és } D_e = \frac{4B_e^3}{\omega_e^2}. \quad (35)$$

Így tehát (22) megoldásával sikerült az empirikus formulát elméletileg is levezetni és a benne előforduló együtthatókat ismert molekuláris állandókra visszavezetni, ami egyúttal ellenőrzés is az elmélet helyességét illetően. Az (1)-ben előforduló együtthatók ugyanis a spektrálanalízis alapján kiszámíthatók, hasonlóképpen a disszociációs energia D , az egyensúlyi magtávolsághoz tartozó rotációs állandó B_e s i. t., amikor is (33) felhasználásával a (34) és (35) összefüggések igazolhatók. A tapasztalat azt mutatja, hogy az említett összefüggések elég jól megfelelnek a valóságnak.

Meg kell még jegyeznünk, hogy (32) a rotációs termek vizsgálatára csak korlátozott mértékben alkalmas. Elsősorban azért, mivel az energianívókban az eredő spinmomentumnak a molekula tengelyéhez képesti különböző beállásából származó multiplicitás itt egyáltalában nincs tekintetbe véve. A fenti összefüggés így csak vagy singulett-termekre érvényes vagy olyan multiplettekre, ahol a multiplicitást elhanyagoljuk. De ha a multiplicitást tekintetbe vesszük is, ami a $-BQ^2$ tag megtartásával egyszerűen lehetséges lett volna, a tapasztalattal akkor sem kapnánk meg egyezést. Ahhoz ugyanis, hogy a (16) hullámegyenlet szeparálható legyen, mint láttuk, (18)-t el kellett hanyagolnunk. Az ilyen elhanyagolás mellett szeparálható hullámegyenlettel leírható molekulamodell a HUND-féle *a*) esetnek felel meg, ami csak igen kis rotáció mellett ad jó közelítést. Ha tehát jobb közelítést akarunk nyerni, úgy az elhanyagolt tagokat a perturbáció-elmélet segítségével tekintetbe kell még venni. Ezután formuláink a Hund-féle *a*) és *b*) eset közötti közbülső esetet írják le, melyek már igen jó közelítést adnak s alkalmasak a rotációs termek finom

strukturális vizsgálataira is. Általában azt mondhatjuk, hogy az elhanyagolt tagok tekintetbevételével mindenütt jól írhatjuk le a viszonyokat, ahol finomabb vizsgálatokat kell végeznünk. Így például ezekkel tudjuk megmagyarázni az ú. n. A típusú dublett jelenségét, mely abban áll, hogy a $+\Omega$ -, ill-ve $-\Omega$ -jú különben egybeeső degenerált termek a rotáció hatására szétválnak. Ezt távoli termek perturbációjaként lehet felfogni. Továbbá ezek segítségével tudunk számot adni arról, hogy mi történik, ha két molekulaterm közvetlenül egymás közelébe jut úgy, hogy «kereszteznek» egymást. Az itt fellépő egészen speciális jelenségek viselik az ú. n. «spektroszkopiai perturbáció» nevet.¹⁸ Ezen utóbbi dolgok azonban már az elmélet részleteibe való mélyebb behatolást tennének szükségessé, mely azonban most itt nem célunk. Mindenestre azonban megemlítettük őket, hogy lássuk, hogy a fentebb ismertetett nagy apparatus tovább kifejtve, mondhatni a legapróbb részleteiben híven vissza tudja adni a legtöbb eddig ismert molekula esetében a legfinomabb jelenségeket is.

Kovács István.

ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER THEORIE DES ZWEIATOMIGEN MOLEKÜLS.

Vorliegende Arbeit stellt ein Referat über die Aufstellung und Eigenschaften der Wellengleichung des zweiatomigen Moleküls dar. Bei Vernachlässigung gewisser Glieder lässt sich die Wellengleichung in drei Teile separieren, in dem die Wellenfunktion als Produkt von drei Funktionen dargestellt wird. Die erste von diesen enthält als Variablen die Ort- und Spinkoordinaten der einzelnen Elektronen, die zweite den Kernabstand, die dritte die Koordinaten der Molekülachse. Die theoretische Behandlung der Wellengleichung gibt tieferen Einblick in die innere Struktur des Moleküls und liefert durch die Ableitung des totalen Energiewertes eine mit der Erfahrung gut übereinstimmende Formel.

I. Kovács.

¹⁸ I. Kovács, Zeitschr. f. Phys. **106**, 431 (1937), **109**, 387 (1938), **111**, 641 (1939). A. Budó u. I. Kovács, Zeitschr. f. Phys. **109**, 393 (1938), **111**, 633 (1939). Kovács I., Mat. és Természettud. Ért. LVI. 126 (1937).

AZ Al^{+} - ÉS Al^{2+} -ION ENERGIÁJÁNAK MEGHATÁROZÁSA AZ ALAPÁLLAPOTBAN.

Bevezetés.

E dolgozat célja a szabad Al^{+} -ion két valenciáelektronja sajátfüggvényének és energiájának meghatározása az alapállapotban. A meghatározás teljesen elméleti úton történik, empirikus állandók figyelembevétele nélkül, egy analitikai módszer alapján.

Két valenciáelektronnal bíró rendszerek energiájának és sajátfüggvényének analitikai úton való meghatározásával eddig HYLLERAAS ¹ és GOMBÁS ² foglalkoztak, a *He*-atom, illetve a *Ca*-atom esetében.

Jelen esetben az Al^{+} -ion két 3s állapotban lévő elektronjáról van szó. Így a probléma megoldása gömbszimmetrikus lesz a SCHRÖDINGER-egyenlet csak a magtól való távolságtól r -től függ. Ez, mint ismeretes, matematikai nehézségek miatt nem oldható meg, ezért közelítő eljáráshoz folyamodunk.

GOMBÁS ³ az alkálifémek alapállapotban lévő valenciáelektronjai sajátfüggvényének és energiájának meghatározására egy közelítő és analitikai módszert dolgozott ki, amit általánosított két valenciáelektronnal bíró rendszerekre is ² A következőkben ezt a módszert alkalmazzuk.

A módszer variációs módszer, ami abban áll, hogy a határozatlan paramétereket tartalmazó sajátfüggvényt alkalmas módon választjuk meg és ezzel képezzük a SCHRÖDINGER-féle energia kifejezést. A paramétereket variálással abból a követelményből határozzuk meg, hogy az energia minimummal bírjon. Hogy a

valenciaelektronok a nekik megfelelő kvantumállapotba jussanak, (vagyis az úgynevezett betöltési szabály teljesülését, melyet a PAULI-elv ír elő) úgy érjük el, hogy a SCHRÖDINGER-féle energiakifejezéshez hozzáadjuk az u. n. FERMI-féle nullaponti energia megváltozását, amely fellép, ha az ion elektronjaihoz a valenciaelektronokat hozzávesszük. Ennek az energiatagnak SCHRÖDINGER-féle energiához való hozzáadásával közelítőleg helyettesíthető a valenciaelektronokra vonatkozó PAULI-elv, mivel ez az energiatag a PAULI-elven alapuló FERMI-statisztika következménye. Ennek részletes megokolása GOMBÁS idézett munkájában található meg. A PAULI-elvnek statisztikus figyelembevétele csak közelítése lesz a PAULI-elv által előírt szigorú betöltési szabálynak. A PAULI-elv fentebb említett statisztikus figyelembevétele annál jogosultabb, minél nagyobb az ionban az elektronsűrűség. Al^{3+} -ion esetében ugyan csak tíz elektronja van az ionnak, de a 13 pozitív magtöltés következtében kis térfogatra szorulnak és így nagy elektronsűrűséget eredményeznek, ami a statisztikus módszer alkalmazhatóságának feltétele.

A FERMI-féle nullaponti energia változása:

$$\delta K = \beta \int [(\nu + \rho)^{5/3} - (\nu^{5/3} + \rho^{5/3})] d\tau, \quad (1)$$

$$\beta = \frac{3\pi^2}{10} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \varepsilon^2 a_H, \quad (2)$$

ahol ν az Al^{3+} -ion elektronsűrűsége, ρ a valenciaelektronok hullámmechanikailag értelmezett sűrűsége, $d\tau$ a térfogatelem, ε a pozitív elemi töltés, $a_H = \frac{h^2}{4\pi^2 m \varepsilon^2}$ az első BOHR-féle hydrogénsugár. ν ismertnek tekinthető, mert a HARTREE-tabellákból számítható.

Az (1) kifejezést kellene a SCHRÖDINGER-féle energiakifejezéshez adni, azonban ebben az alakjában a kifejezés számításra alkalmatlan. A nehézségen ν és ρ viselkedése segít át. ν csak az atommaghoz közeleső tartományban jelentékeny, ahol ρ értékei a ν értékei mellett elhanyagolható kis értékek lesznek. ρ viszont az atommagtól távolabb eső tartományban lesz jelentékeny,

ahol a ρ értékek mellett ν értékei elhanyagolható kicsinyek. Így az

$$\nu(r_0) = \rho(r_0)$$

egyenlőséggel definiálható egy r_0 rádiusz, mellyel a teret két részre, τ_1 - és τ_2 -re osztjuk úgy, hogy τ_1 -ben $\nu > \rho$; τ_2 -ben $\nu < \rho$ egyenlőtlenségek állanak fenn. Ez lehetővé teszi, hogy az (1) kifejezés első tagját mindkét tartományban sorbafejtsük. A sorfejtés magasabb rendben kicsiny tagok elhanyagolásával a következő kifejezést adja az (1)-re:

$$\delta K = \frac{5}{3} \beta \int_{\tau_1} \nu^{2/3} \rho d\tau - \beta \int_{\tau_1} \rho^{5/3} d\tau + \frac{5}{3} \beta \int_{\tau_2} \nu \rho^{2/3} d\tau - \beta \int_{\tau_2} \nu^{5/3} d\tau. \quad (3)$$

A jobboldal első tagjában az integrációt az egész térre kiterjesztve és az ezáltal hozzáadott részt le is vonva

$$\begin{aligned} \delta K = \frac{5}{3} \beta \int_{\tau_1 + \tau_2} \nu^{2/3} \rho d\tau - \frac{5}{3} \beta \int_{\tau_2} \nu^{2/3} \rho d\tau - \beta \int_{\tau_1} \rho^{5/3} d\tau + \frac{5}{3} \beta \int_{\tau_2} \nu \rho^{2/3} d\tau \\ - \beta \int_{\tau_2} \nu^{5/3} d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

A sorfejtés többi tagja, valamint a megtartott tagok is az első tag mellett magasabb rendben kicsinyek (másképpen számításra alkalmatlanok ρ ismeretlen volta miatt), így első közelítésben elhanyagoljuk ezeket is. A megtartott első taggal vesszük figyelembe a PAULI-elvet első közelítésben, a sorfejtés többi tagját utólag korrekcióként lehet figyelembe venni, amire vonatkozólag utalunk GOMBÁS idézett munkájára.³ A megtartott első tag úgy fogható fel, mintha a valenciaelektronok $-\frac{5}{3} \frac{\beta}{\varepsilon} \nu^{2/3}$ potenciálú erőterben volnának. Hozzávéve ezt az ion elektrosztatikus potenciáljához, χ -hez, a SCHRÖDINGER-féle energiakifejezésben a

$$\begin{aligned} V = \chi - \frac{5}{3} \frac{\beta}{\varepsilon} \nu^{2/3} = \chi - \chi (\Delta \chi)^{2/3} \\ \chi = \frac{5\beta}{3(4\pi)^{2/3} \varepsilon^{5/3}} \end{aligned} \quad (5)$$

potenciált vezetjük be, ahol $4\pi\varepsilon\nu = \Delta\chi$, Δ a LAPLACE-operator, χ az Al^{3+} -ion HARTREE-tabellájából⁴ nyerhető, ahol $2r\chi$ van

megadva r függvényeként, ν vagyis $\frac{1}{4\pi\epsilon} \Delta\chi$ a tabellákban feltüntetett adatokból egyszerűen számítható ki. Erre vonatkozólag utalunk GOMBÁS idézett munkájára.³

A valenciaelektronok SCHRÖDINGER-féle energiakifejezésének a variációs eljárással keresett minimális értéke az alapállapot energiáját adja, a hozzátartozó sajátfüggvény a valenciaelektronok alapállapotához tartozó sajátfüggvény lesz.

A nyerendő energiaértékünk nem tartalmazza a valenciaelektronoknak az ionra gyakorolt polarizációjából származó, valamint a valenciaelektronoknak az ion elektronjaival való kicserélési (AUSTAUSCH) kölcsönhatásából származó energiát. Mindkettő relative kicsi és számításuk nehézségekbe ütközik.

Meg fogjuk határozni az Al^+ -ion és az Al^{2+} -ion valenciaelektronjainak az energiáját és sajátfüggvényét az alapállapotban.

A módszer.

Két valenciaelektron SCHRÖDINGER-féle energiakifejezése:

$$E = - \int \psi^* \left[V(r_1) + V(r_2) - \frac{\epsilon}{r_{12}} \right] \epsilon \psi d\tau - \frac{1}{2} \epsilon^2 a_{\mu} \int \psi^* \Delta \psi d\tau, \quad (6)$$

ahol ψ a két valenciaelektron 1-re normált sajátfüggvénye, r_1, r_2 a valenciaelektronok távolsága a magtól, r_{12} a két valenciaelektron egymástól vett távolsága, $d\tau$ a konfigurációs tér térfogateleme. Az integráció az egész konfigurációs térre történik.

A számítások szempontjából célszerű a háromszoros ion elektrosztatikus potenciálját egy COULOMB- és egy nem-COULOMB-szerű tagra bontani. Ekkor az energia következő tagokból fog állani:

$$E_c = - \int \psi^* \left(\frac{3\epsilon^2}{r_1} + \frac{3\epsilon^2}{r_2} \right) \psi d\tau, \quad (7)$$

$$E_j = - \int \psi^* \left[\chi(r_1) + \chi(r_2) - \frac{3\epsilon}{r_1} - \frac{3\epsilon}{r_2} \right] \epsilon \psi d\tau, \quad (8)$$

$$E_f = x\epsilon \int \psi^* \{ [\Delta\chi(r_1)]^{2/3} + [\Delta\chi(r_2)]^{2/3} \} \psi d\tau, \quad (9)$$

$$E_w = \int \phi^* \frac{\varepsilon^2}{r_{12}} \phi d\tau, \quad (10)$$

$$E_K = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 a_H \int \phi^* \Delta \phi d\tau, \quad (11)$$

$$E = E_C + E_J + E_F + E_w + E_K, \quad (12)$$

ahol E_C a háromszorosan töltött ionnak a valenciáelektronokkal való COULOMB-szerű elektrosztatikus kölcsönhatásából eredő energia, E_J az ionnak a valenciáelektronokkal való nem-COULOMB-szerű elektrosztatikus kölcsönhatásából származó energia, E_F a PAULI-elv következménye, E_w a két elektron COULOMB-féle elektrosztatikus kölcsönhatásának energiája, E_K a valenciáelektronok SCHRÖDINGER-féle kinetikus energiája.

A (8) és (9) tagokat célszerű egybefoglalni és az integrál jele alatt szereplő $\chi - \frac{3\varepsilon}{r} - \alpha(\Delta\chi)^{2/3}$ függvényt, amely HARTREE-tablálkból⁴ számítva grafikusán ábrázolható, egy analitikai kifejezéssel megközelíteni. Ez a következő alakú kifejezéssel lehetséges:

$$h(r) = -\alpha r^s e^{-\frac{\mu}{a_H} r}; \quad (13)$$

s és μ választását a legjobb közelítés szabja meg. Esetünkben s -re egész számot kell választanunk az energia második közelítésénél törtekitevő esetén fellépő számítási nehézség miatt (l. lentebb). Jelen esetben éppen ilyen választás mellett bizonyul legjobbnak a közelítés. α meghatározására a következő feltétel szolgál:

$$\int_0^\infty h(r) r^2 dr = \int_0^\infty \left[\chi - \frac{3\varepsilon}{r} - \alpha(\Delta\chi)^{2/3} \right] r^2 dr, \quad (14)$$

ahonnan nyerjük, hogy

$$\alpha = \frac{\mu^{s+3} \cdot T \cdot \varepsilon}{(s+2)! a_H^{s+1}}, \quad (15)$$

ahol T a (14) jobboldalán szereplő integrál értéke. Így tehát nyerjük, hogy

$$E_J + E_F = - \int \phi^* [h(r_1) + h(r_2)] \varepsilon \phi d\tau. \quad (16)$$

Az E energiát ψ -nek alkalmasan megválasztott kifejezésében szereplő egyelőre ismeretlen paraméterek függvényeként nyerjük. A paramétereket abból a feltételből határozzuk meg, hogy az E energia minimum legyen. Ezzel a két valenciaelektron energiáját és a hozzátartozó sajátfüggvényt nyerjük az alapállapotban. Ennek az energiának az abszolút értéke egyenlő a két elektron leválasztásához szükséges energiával, vagyis a megfelelő ionizációs energiák összegével.

A fent vázolt eljárás egy valenciaelektronnal bíró rendszerre is alkalmazható. GOMBÁS³ egy valenciaelektronnal bíró rendszerre dolgozta ki először és az egy valenciaelektronnal bíró Ca^+ -ionnál is meghatározta az alapállapotban lévő valenciaelektron energiáját és sajátfüggvényét. Mi itt hasonlóan járunk el és az Al^{2+} -ion alapállapotban lévő elektronjának szintén meghatározzuk az energiáját és sajátfüggvényét. Így tehát ezzel a módszerrel az Al^+ -ionnak úgy az első, mint a második elektronja leszakításához szükséges energia vagyis az első és második ionizációs energiája meghatározható.

Két-elektron problémánál a független paraméterek számának növelésével HYLLERAAS¹ és GOMBÁS² lényegesebb javulást ért el az energia értékében. GOMBÁS Ca esetében a második közelítésben két paraméterrel már jól megközelítette a mért energiát. A következőkben mi is két közelítést számítottunk végig.

Első közelítés.

Az Al^+ -ion két valenciaelektronja az alapállapotban a $3s$ állapotban foglal helyet. Ennek megfelelően a problémánk gömbszimmetrikus. Egymástól függetlennek tételezve fel első közelítésben a két elektront, a közös sajátfüggvény a két sajátfüggvény szorzata lesz:

$$\psi = \psi_1 \psi_2 = A^{1/2} r_1^n e^{-\lambda r_1} \cdot A^{1/2} r_2^n e^{-\lambda r_2} = A r_1^n r_2^n e^{-\lambda(r_1 + r_2)}, \quad (17)$$

ahol A a normálási faktor, λ variációs paraméter, n pozitív egész szám. λ és n energiaminimum követeléséből lesz meghatározva.

$$A \quad \int \phi^* \phi d\tau = 1 \quad (18)$$

normálási feltételből következik, hogy

$$A = \frac{(2\lambda)^{2n+3}}{4\pi(2n+2)!} \quad (19)$$

A (7)–(11) alatti energiatagokra a (17)-tel nyerjük:

$$E_c = -\frac{6\lambda}{n+1} \varepsilon^2, \quad (20)$$

$$E_J + E_F = 2a\varepsilon \frac{(2n+s+2)!}{(2n+2)!} \frac{(2\lambda)^{2n+3}}{(2\lambda+\mu)^{2n+s+3}}, \quad (21)$$

$$E_w = \frac{2\lambda}{(2n+2)^2} \left[2n+2 - \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{i=0}^{2n+1} \frac{2n+2-i}{2^i} \binom{2n+1+i}{i} \right] \varepsilon^2, \quad (22)$$

$$E_K = \frac{\lambda^2}{2n+1} \varepsilon^2 a_n. \quad (23)$$

Így tehát E n -nek és λ -nak függvénye. n és λ meghatározása a következőképpen történik: különböző pozitív n egész értékek mellett variáljuk λ -t, míg a legmélyebb energiaértéket nyerjük. Azt az egész n -et tartjuk meg, amelyiknél az energiaminimum a legmélyebb, λ -nak pedig az ehhez az energiaértékhez tartozó értékét választjuk. Így ϕ és E első közelítését nyerjük.

Az Al^{+2} -ion valenciaelektronjának energiáját a fentiekhez hasonló módon nyerjük. Itt egy valenciaelektronról lévén szó, a valenciaelektronok kölcsönhatását kifejező E_w tag elmarad, a sajátfüggvény $\phi = A^{1/2} r^m e^{-\lambda r}$ lesz.

Itt már az első közelítés is jó eredményt ad, mint azt GOMBÁSNAK K -, Rb - és Ca^{+} -ra nyert eredményei is mutatják.^{2, 3}

Az Al^{+} -ionnál mint két-elektron problémánál az elektronok kölcsönhatása miatt további közelítés szükséges, amint az HYLLERAAS munkáiból következik.¹

Második közelítés.

HYLLERAAS¹ és GOMBÁSHOZ² hasonlóan második közelítésben a következő alakban vesszük fel a saját függvényt:

$$\phi = A r_1^m r_2^m e^{-\lambda(r_1+r_2)} (1 + c r_{12}). \quad (24)$$

A a normálási faktor, r_{12} a két valenciáelektron távolsága egymástól, c újabb variációs paraméter, melyet az energiára kirott minimum-feltételből határozunk meg. n -et nem variáljuk tovább, hanem az első közelítésnél nyert értékét tartjuk meg. Tehát λ és c lesznek a független variációs paraméterek. Ezek variálásának eredményeként nyert ψ és E lesz a sajátfüggvény és energia második közelítése.

Koordinátáink most r_1 , r_2 és r_{12} . Problémánk, mivel s állapotról van szó, gömbszimmetrikus. A LAPLACE-operator ez esetben HYLLERAAS szerint:¹

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + \frac{2}{r_2} \frac{\partial}{\partial r_2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial r_{12}^2} + \frac{4}{r_{12}} \frac{\partial}{\partial r_{12}} + \frac{r_1^2 - r_2^2 + r_{12}^2}{r_1 r_{12}} \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_{12}} + \frac{r_2^2 - r_1^2 + r_{12}^2}{r_2 r_{12}} \frac{\partial^2}{\partial r_2 \partial r_{12}}. \quad (25)$$

Ez a kifejezés kerül most a (6) alatti energiakifejezésbe. Energia-kifejezésünkben a következő alakú integrálok fordulnak elő:

$$\begin{aligned} L(i, j, k) &= \int r_1^i r_2^j r_{12}^k e^{-ar_1} e^{-br_2} d\tau, \\ I(i, j, k) &= \int r_1^i r_2^j r_{12}^k e^{-b(r_1+r_2)} d\tau, \end{aligned} \quad (26)$$

ahol i, j pozitív egész számok, k pedig $-1, 0, 1, 2$ lehet. Az r_{12} -t, nem tartalmazó integrálok, vagyis a $k=0$ -nak megfelelő integrálok minden további nélkül számíthatók. A $d\tau$ térfogatelem a következőképpen fejezhető ki: $d\tau = 8\pi^2 r_1 r_2 r_{12} dr_1 dr_2 dr_{12}$. Tehát egy $f(r_1, r_2, r_{12})$ függvény integrálja a következő alakú lesz

$$\int f(r_1, r_2, r_{12}) d\tau = 8\pi^2 \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \int_{|r_2-r_1|}^{r_2+r_1} f(r_1, r_2, r_{12}) r_{12} dr_{12}.$$

Bevezetve az úgynevezett HYLLERAAS-féle koordinátákat

$$s = r_1 + r_2, \quad t = -r_1 + r_2, \quad u = r_{12},$$

$$\int f(r_1, r_2, r_{12}) d\tau = \pi^2 \int_0^\infty ds \int_0^s \int_{-u}^{+u} f(s, t, u) (s^2 - t^2) dt, \quad (27)$$

a (27) alatti transzformációs formula segítségével könnyen nyerhetők a következő integrálok:

$$\left. \begin{aligned} L(0, 0, -1) &= 32\pi^2 \left[\frac{1}{a^2 b^2 (a+b)} + \frac{1}{a b (a+b)^3} \right], \\ L(0, 0, 1) &= 64\pi^2 \left[\frac{3}{a^3 b^4} + \frac{3}{a^4 b^3} - \frac{3}{a^3 b^3 (a+b)} - \frac{1}{a^2 b^2 (a+b)^3} \right], \\ L(0, 0, 2) &= 768\pi^2 \left(\frac{1}{a^5 b^3} + \frac{1}{a^3 b^5} \right). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Ezekből a és b szerinti parciális deriválással nyerhető $L(i, j, k)$ a következőképpen:⁵

$$L(i, j, k) = (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial a^i \partial b^j} [L(0, 0, k)].$$

A megfelelő $L(i, j, k)$ ezekből $a = b$ helyettesítéssel nyerhető.

Az energia kifejezésében előforduló integrálok a következők lesznek a továbbiakban fontos $n = 2$ esetben:

$$\begin{aligned} L(4, 4, -1) &= 1\,382\,400\pi^2 [a^{-6}b^{-6}(a+b)^{-1} + a^{-5}b^{-5}(a+b)^{-3} + \\ &\quad + 2a^{-4}b^{-4}(a+b)^{-5} + 5a^{-3}b^{-3}(a+b)^{-7} \\ &\quad + 14a^{-2}b^{-2}(a+b)^{-9} + 42a^{-1}b^{-1}(a+b)^{-11}], \\ L(5, 4, -1) &= 1\,382\,400\pi^2 [6a^{-7}b^{-6}(a+b)^{-1} + a^{-6}b^{-6}(a+b)^{-2} + \\ &\quad + 5a^{-6}b^{-5}(a+b)^{-3} + 3a^{-5}b^{-5}(a+b)^{-4} + \\ &\quad + 8a^{-5}b^{-4}(a+b)^{-5} + 10a^{-4}b^{-4}(a+b)^{-6} + \\ &\quad + 15a^{-4}b^{-3}(a+b)^{-7} + 35a^{-3}b^{-3}(a+b)^{-8} + \\ &\quad + 28a^{-3}b^{-2}(a+b)^{-9} + 126a^{-2}b^{-2}(a+b)^{-10} + \\ &\quad + 42a^{-2}b^{-1}(a+b)^{-11} + 462a^{-1}b^{-1}(a+b)^{-12}], \\ L(2, 6, -1) &= 1\,935\,360\pi^2 [a^{-4}b^{-8}(a+b)^{-1} + a^{-4}b^{-7}(a+b)^{-2} + \\ &\quad + a^{-3}b^{-6}(a+b)^{-4} + 2a^{-3}b^{-5}(a+b)^{-5} + \\ &\quad + 3a^{-2}b^{-4}(a+b)^{-7} + 7a^{-2}b^{-3}(a+b)^{-8} + \\ &\quad + 12a^{-1}b^{-2}(a+b)^{-10} + 30a^{-1}b^{-1}(a+b)^{-11}], \\ L(3, 6, -1) &= 1\,935\,360\pi^2 [5a^{-5}b^{-8}(a+b)^{-1} + 3a^{-5}b^{-7}(a+b)^{-2} + \\ &\quad + 2a^{-4}b^{-7}(a+b)^{-3} + 7a^{-4}b^{-6}(a+b)^{-4} + \\ &\quad + 2a^{-4}b^{-5}(a+b)^{-5} + 10a^{-3}b^{-5}(a+b)^{-6} + \\ &\quad + 20a^{-3}b^{-4}(a+b)^{-7} + 7a^{-2}b^{-4}(a+b)^{-8} + \\ &\quad + 56a^{-2}b^{-3}(a+b)^{-9} + 42a^{-2}b^{-2}(a+b)^{-10} + \\ &\quad + 90a^{-1}b^{-2}(a+b)^{-11} + 330a^{-1}b^{-1}(a+b)^{-12}], \end{aligned}$$

$$I(4, 4, -1) = 1\,070\,550 \frac{\pi^2}{b^{13}}, \quad I(5, 4, -1) = 6\,958\,575 \frac{\pi^2}{b^{14}},$$

$$I(2, 6, -1) = 1\,842\,750 \frac{\pi^2}{b^{13}}, \quad I(3, 6, -1) = 8\,931\,195 \frac{\pi^2}{b^{14}},$$

$$L(2, 4, 0) = 16\pi^2 \frac{4! \, 6!}{a^5 b^7}, \quad L(3, 4, 0) = 16\pi^2 \frac{5! \, 6!}{a^6 b^7},$$

$$L(4, 4, 0) = 16\pi^2 \frac{6! \, 6!}{a^7 b^7}, \quad L(5, 4, 0) = 16\pi^2 \frac{7! \, 6!}{a^8 b^7},$$

$$L(2, 6, 0) = 16\pi^2 \frac{4! \, 8!}{a^5 b^9}, \quad L(3, 6, 0) = 16\pi^2 \frac{5! \, 8!}{a^6 b^9},$$

$$\begin{aligned} L(2, 4, 1) = 92\,160\pi^2 [& 21a^{-5}b^{-8} + 15a^{-6}b^{-7} - 15a^{-5}b^{-7}(a+b)^{-1} - \\ & - 6a^{-5}b^{-6}(a+b)^{-2} - 4a^{-4}b^{-6}(a+b)^{-3} - \\ & - 9a^{-4}b^{-5}(a+b)^{-4} - 9a^{-3}b^{-4}(a+b)^{-6} - \\ & - 6a^{-3}b^{-3}(a+b)^{-7} - 7a^{-2}b^{-3}(a+b)^{-8} - \\ & - 14a^{-2}b^{-2}(a+b)^{-9}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(3, 4, 1) = 92\,160\pi^2 [& 105a^{-6}b^{-8} + 90a^{-7}b^{-7} - 90a^{-6}b^{-7}(a+b)^{-1} - \\ & - 15a^{-6}b^{-6}(a+b)^{-2} - 40a^{-5}b^{-6}(a+b)^{-3} - \\ & - 24a^{-5}b^{-5}(a+b)^{-4} - 36a^{-4}b^{-5}(a+b)^{-5} - \\ & - 45a^{-4}b^{-4}(a+b)^{-6} - 36a^{-3}b^{-4}(a+b)^{-7} - \\ & - 84a^{-3}b^{-3}(a+b)^{-8} - 28a^{-2}b^{-3}(a+b)^{-9} - \\ & - 126a^{-2}b^{-2}(a+b)^{-10}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(4, 4, 1) = 6\,451\,200\pi^2 [& 9a^{-7}b^{-8} + 9a^{-8}b^{-7} - 9a^{-7}b^{-7}(a+b)^{-1} - \\ & - 5a^{-6}b^{-6}(a+b)^{-3} - 6a^{-5}b^{-5}(a+b)^{-5} - \\ & - 9a^{-4}b^{-4}(a+b)^{-7} - 14a^{-3}b^{-3}(a+b)^{-9} - \\ & - 18a^{-2}b^{-2}(a+b)^{-11}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(5, 4, 1) = 19\,353\,600\pi^2 [& 21a^{-8}b^{-8} + 24a^{-9}b^{-7} - 21a^{-8}b^{-7}(a+b)^{-1} - \\ & - 3a^{-7}b^{-7}(a+b)^{-2} - 10a^{-7}b^{-6}(a+b)^{-3} - \\ & - 5a^{-6}b^{-6}(a+b)^{-4} - 10a^{-6}b^{-5}(a+b)^{-5} - \\ & - 10a^{-5}b^{-5}(a+b)^{-6} - 12a^{-5}b^{-4}(a+b)^{-7} - \\ & - 21a^{-4}b^{-4}(a+b)^{-8} - 14a^{-4}b^{-3}(a+b)^{-9} - \\ & - 42a^{-3}b^{-3}(a+b)^{-10} - 12a^{-3}b^{-2}(a+b)^{-11} - \\ & - 66a^{-2}b^{-2}(a+b)^{-12}], \end{aligned}$$

$$I(2, 4, 1) = 2\,368\,080 \frac{\pi^2}{b^{13}}, \quad I(3, 4, 1) = 12\,638\,340 \frac{\pi^2}{b^{14}},$$

$$I(4, 4, 1) = 81\,162\,900 \frac{\pi^2}{b^{15}},$$

$$L(2, 4, 2) = 552\,960\pi^2(15a^{-7}b^{-7} + 28a^{-5}b^{-9}),$$

$$L(3, 4, 2) = 19\,353\,600\pi^2(3a^{-8}b^{-7} + 4a^{-6}b^{-9}),$$

$$L(4, 4, 2) = 464\,486\,400\pi^2(a^{-9}b^{-7} + a^{-7}b^{-9}),$$

$$L(5, 4, 2) = 464\,486\,400\pi^2(9a^{-10}b^{-7} + 7a^{-8}b^{-9}),$$

$$I(2, 4, 2) = 23\,777\,280 \frac{\pi^2}{b^{14}}, \quad I(3, 4, 2) = 135\,475\,200 \frac{\pi^2}{b^{15}},$$

$$I(4, 4, 2) = 928\,972\,800 \frac{\pi^2}{b^{16}}.$$

Az energia-kifejezés $n = 2$ esetén:

$$\begin{aligned} E = A^2 \{ & -6I(2, 4, 0) + (6\lambda - 6)I(3, 4, 0) - \lambda^2 I(4, 4, 0) + \\ & + I(4, 4, -1) + 2aL(4 + s, 4, 0) + \\ & + c[-14I(2, 4, 1) + (13\lambda - 12)I(3, 4, 1) - 2\lambda^2 I(4, 4, 1) + \\ & + 2I(4, 4, 0) - 4I(4, 4, -1) + 2I(2, 6, -1) - \lambda I(3, 6, -1) + \\ & + \lambda I(5, 4, -1) + 4aL(4 + s, 4, 1)] \\ & + c^2[-8I(2, 4, 2) + (7\lambda - 6)I(3, 4, 2) - \lambda^2 I(4, 4, 2) + I(4, 4, 1) - \\ & - 4I(4, 4, 0) + 2I(2, 6, 0) - \lambda I(3, 6, 0) + \lambda I(5, 4, 0) + \\ & + 2aL(4 + s, 4, 2)] \}, \end{aligned}$$

ahol $a = 2\lambda + \mu$ és $b = 2\lambda$;

$$A^2 = \frac{1}{I(4, 4, 0) + 2cI(4, 4, 1) + c^2 I(4, 4, 2)}. \quad (29)$$

Az energia-kifejezés végső alakja tehát:

$$E = \frac{E_0 + Fc + Gc^2}{1 + Pc + Rc^2}, \quad (30)$$

ahol E_0, F, G, P, R a λ -nak függvényei.

Az energiaminimumnak megfelelő λ és c a következő egyenlet-rendszerrel van definiálva: $\frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial E}{\partial c} = 0$. Ennek megoldása azonban komplikált, ezért az energiaminimumnak megfelelő λ és c -t a következőképpen határozzuk meg: egy meghatározott λ -hoz tartozó c értéket a $\frac{\partial E}{\partial c} = 0$ egyenlet gyökeként nyerjük. Ez az egyenlet részletesen kiírva:

$$\begin{aligned} Lc^2 + 2Mc + N &= 0, \\ L &= GP - FR, \quad M = G - E_0R, \quad N = F - E_0P. \end{aligned} \quad (31)$$

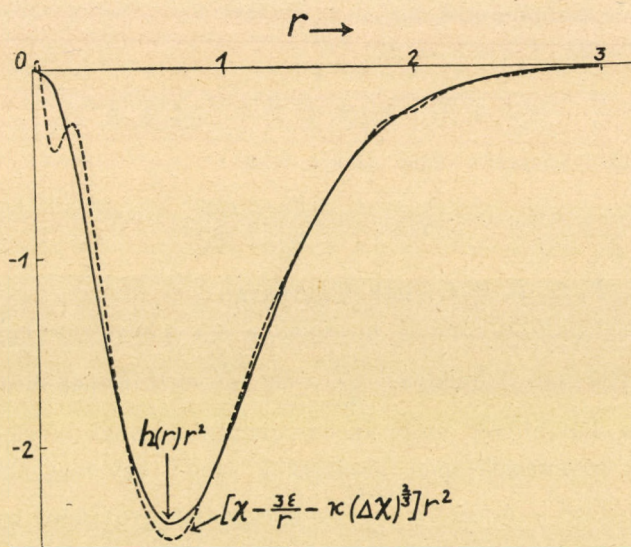
Különböző λ -ákra végezve el a számítást az energiaminimumnak megfelelő λ és c egyszerűen határozható meg.

n -t a második közelítés számításánál nem variáljuk, hanem mint említettük n számára megtartjuk az elsőben nyert értéket, tehát egy λ, c értékpár mellett elért legmélyebb energia-érték lesz az energiánk második közelítése.

Az Al^{+} - és Al^{2+} -ionra nyert eredmények.

A $\nu = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta\chi$ és a $\chi - \frac{3\varepsilon}{r} - \kappa(\Delta\chi)^{2/3}$ függvény értékei az Al^{3+} -ionra a HARTREE-tabellákból számíthatók ki. A $\chi - \frac{3\varepsilon}{r} - \kappa(\Delta\chi)^{2/3}$ függvényt közelítő (13) alatti függvényünk paraméterei:

$$\alpha = 144,77 \frac{\varepsilon}{a_H^2}, \quad s = 1, \quad \mu = 4,32. \quad (32)$$



1. ábra.

Abszcissza: r (a_H egységekben).

Ordinata: a függvényértékek (εa_H egységekben).

A két függvény r^2 -szerese mint r függvénye az 1. ábrán látható, az abszcissza a_H egységben, az ordináta εa_H egységben. A közelítés pontossága az ábrából jól kivehető.

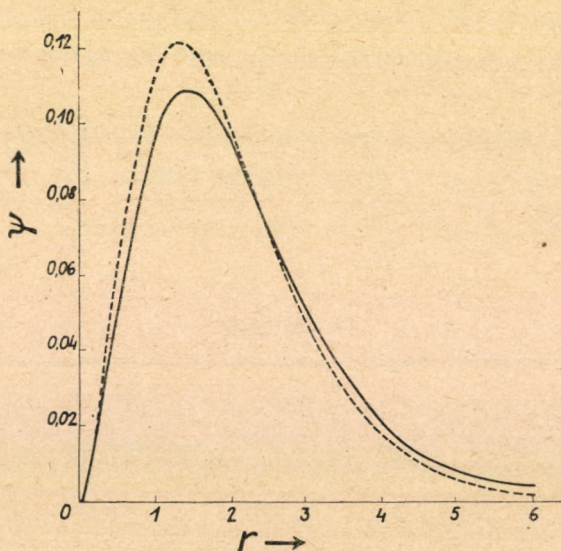
A nyert sajátfüggvények paramétereit és a hozzájuk tartozó energiaértékeket a következő táblázat tünteti fel λ -t és c -t $1/a_H$ egységekben, E_{\min} -ot $\frac{\varepsilon^2}{a_H}$ és e -Volt egységekben:

1. táblázat.

	n	λ	c	E_{\min} $\frac{\varepsilon^2}{a_H}$ egységekben	E_{\min} e -Volt egységekben	
Al^{+}	2	1.42	—	—1.63291	—44.22	első közelítés
	2	1.56	0.699	—1.67015	—45.23	második közelítés
Al^{2+}	2	1.53	—	—1.00659	—27.26	

Számítottuk az Al^{+} -ion két valenciáelektronjának energiáját és sajátfüggvényét az alapállapotban és az Al^{2+} -ion egy valenciáelektronjának energiáját és sajátfüggvényét az alapállapotban. Az Al^{+} -ion valenciáelektronjainak leszakításához és az Al^{2+} -ion egy valenciáelektronjának leszakításához szükséges energiák különbségeként nyerhető volt az Al^{+} -ion egy valenciáelektronjának leszakításához szükséges energia, vagyis az $Al^{+} \rightarrow Al^{2+}$ ionizációnak megfelelő ionizációs energia.

A 2. ábrán az Al^{+} -ion egyik $3s$ állapotának (első közelítésben) és az Al^{2+} -ion $3s$ állapotának sajátfüggvénye van felrajzolva mint r függvénye, az abszcissza a_H egységben, az ordináta $1/a_H^{3/2}$ egységben.



2. ábra.

Abszcissa: r (a_H egységeiben).

Ordinata: a sajátfüggvényértékek ($1/a_H^{3/2}$ egységeiben).

----- az Al^{2+} 3s állapotának normált sajátfüggvénye
 — az Al^+ egyik 3s állapotának normált sajátfüggvénye
 (első közelítés).

A korrekció.

A (4) alatti sorfejtésnek csak első tagjával vettük figyelembe a FERMI-féle kinetikus energiaváltozást, vagyis közvetve a PAULI-elvet. A sorfejtés többi tagjáról megemlítettük, hogy korrekcióként vehető figyelembe.

A valenciaelektronok eloszlási sűrűségének ismeretével a korrekciót kiszámíthatjuk. Az (1) alatti ki nem fejtett kifejezésből levonva a (4) alatti kifejezés megtartott és számításokban felhasznált első tagját, a nyert különbség lesz az az energiaérték, amellyel az (1) alatti eltér a figyelembevett energiaértéktől, tehát ez lesz a korrekció:

$$\eta = \beta \int [(\nu + \rho)^{5/3} - (\nu^{5/3} + \rho^{5/3} + \frac{5}{2} \nu^{2/3} \rho)] d\tau. \quad (33)$$

A korrekciót az Al^+ -ion esetében a sajátfüggvény első közelítésével számítottuk.

Az alábbi táblázat E_{\min} -ot, a korrekciókat és a korrigált energiákat tünteti fel e-Volt egységekben:

2. táblázat.

	Al^+	Al^{2+}
$E_{\min.}$	-45.23	-27.26
η	-2.03	-1.00
$E_{\min. \text{ korr. }} = E_{\min.} + \eta$	-47.26	-28.26

Eredményeink tárgyalása.

Eredményeinket a SCHRÖDINGER-féle energiakifejezésben előforduló ismeretlen paraméterek variálásával nyertük. Az egy valenciaelektront tartalmazó Al^{2+} -ionnál a sajátfüggvény két paraméterének (n, λ) variálásával elért minimális energiaértékkel megelégedtünk, ugyanis GOMBÁSNAK a K -ra³ végzett számításai mutatják, hogy a további közelítések elhanyagolhatók. Az Al^+ -ionnál is első közelítésben (n, λ) paraméterpár variálásával nyertük a két valenciaelektron alapállapota energiájának első közelítését. A második közelítésben HYLLERAASNAK¹ He -ra és GOMBÁSNAK² Ca -ra végzett számításai alapján a saját függvénybe a cr_{12} tagot vezetve be, az n változatlanul hagyása mellett (λ, c) paraméterek variálásával nyertük az alapállapot energiájának második közelítését. További variációs paramétert HYLLERAAS idézett műve alapján nem vezettünk be, amennyiben kimutatta, hogy a cr_{12} tagnak van a legnagyobb szerepe a magasabb közelítésben.

Az Al^+ -ionra nyert energia abszolút értéke adja az első és második ionizációs energiájának I_1 - és I_2 -nek az összegét. Az

Al^{2+} -ra nyert energia abszolút értéke pedig I_2 -vel egyenlő. Ezeket összehasonlíthatjuk a tapasztalattal. Az elméletileg számított értékeket és a kísérleti eredményeket ismét e -Volt egységekben a 3. táblázatban foglaltuk össze.

3. táblázat.

	Ionizációs energiák	I_1	I_2
Elméleti értékek	korrekció nélkül	17·97	27·26
	korrekcióval	19·00	28·26
Kísérleti értékek	—	18·73	28·31
A korrigált elméleti értékek %-os eltérése a kísérletiektől		+ 1·4 %	— 0·2 %

A táblázatból kitűnik, hogy I_2 0·2 %-kal kisebb abszolút értékű, I_1 1·4 %-kal nagyobb abszolút értékű a kísérleti értéknél. Azonban egyik sem tartalmazza a valenciaelektronoknak az ion elektronjaira gyakorolt polarizáló hatásából és a valenciaelektronok és az ion elektronjai közti kicserélési kölcsönhatásából (AUSTAUSCH) származó energiatagokat, melyek $I_1 + I_2$ és I_2 abszolút értékét (és valószínűleg I_1 abszolút értékét is) növelik. Ezért az I_1 és I_2 ionizációs energiákra nyert értékeink kissé nagyoknak mondhatók. A táblázat korrigált és nem korrigált értékeit összehasonlítva, az ionizációs energiákra nyert kissé nagy elméleti értékek a korrekció figyelembevételének következményei, mely itt a (4) alatti formula sorfejtéséből származó összes magasabbrendű tagokat tartalmazza. Lehetséges, hogy a kissé nagy energiaértékek onnan származnak, hogy a korrekciót eddig nem sikerült teljesen kielégítő módon az elméletbe beilleszteni.

A polarizációs energia megbecsülhető lenne azzal a feltevessel, hogy a valenciaelektronok tere az Al^{3+} -ionban homogén. Mivel azonban a valenciaelektronok az Al^{3+} -ionhoz a háromszoros töltése folytán aránylag közel vannak a belső elektronok-

hoz, ez a feltevés nem helytálló. Így a polarizációból származó energia nem is számítható, illetve nem is becsülhető ily módon. Hogy elhanyagolása csak igen kis hibát jelenthet, arra az Al^{3+} -ion nagyon kis polarizálhatóságából következtethetünk.

A valenciaelektronoknak az Al^{3+} -ion elektronjaival való kicserélési kölcsönhatásából származó energia nem számítható matematikai nehézségek miatt. Elhanyagolása szintén csak igen kis hibát jelenthet, mivel az Al^{3+} -ion belső elektronjai és a valenciaelektronjai közt több oknál fogva nem lehet nagy a kicserélési kölcsönhatás (Austausch), s így az ebből származó energia-tag is igen kicsiny lesz.

Így a polarizációs és kicserélési kölcsönhatásból eredő energiák összességének elhanyagolása csak igen kis hibát jelenthet.

Energiaértékeink eltérését a mért értékektől a már említett okokon kívül a következőkkel indokolhatjuk meg:

A PAULI-elv által adott betöltési szabály statisztikai figyelembevétele a valenciaelektronok sajátfüggvényeinek csak közelítő meghatározását teszi lehetővé. Az ionon belül a közelítő sajátfüggvény négyzete a pontos sajátfüggvény négyzetének csak középértéke, kívül pedig jó közelítése.

Egy kis hibaforrást jelenthet még az is, hogy az Al^{3+} -ion elektronsűrűségét és potenciálját a HARTREE-tabellákból vettük, melyeket HARTREE egy közelítő eljárással határozott meg, tehát ezek nem teljesen pontosak.

Mindezeket figyelembevéve, nyert energiaértékeink igen jól megközelítik a kísérletileg mért energiaértékeket.

*

E dolgozatot a magyar kir. Ferenc József Tudományegyetem elméleti fizikai intézetében készítettem.

A témát dr. GOMBÁS PÁL egyetemi nyilv. rk. tanár, intézeti igazgató úr tűzte ki, akinek ezúton is hálásan köszönöm, hogy állandó támogatásával és értékes útbaigazításaival lehetővé tette dolgozatom elkészítését.

Kolozsvár, 1941. március.

Kozma Béla.

Idézett munkák.

- ¹ E. A. HYLLERAAS, Zs. f. Phys. Bd. 54, 347, 1929.
- ² P. GOMBÁS, Zs. f. Phys. Bd. 116, 184, 1940.
- ³ P. GOMBÁS, Ann. d. Phys. (5. Folge), Bd. 35, 65, 1939.
 " , Zs. f. Phys. Bd. 108, 509, 1938.
 " , Zs. f. Phys. Bd. 111, 195, 1938.
- ⁴ D. R. HARTREE, Proc. Roy. Soc. London, (Ser. A). Vol. 151, 99, 1935.
- ⁵ H. HELLMANN. Einf. in d. Quantenchemie, 336. old; Leipzig u. Wien, F. Deuticke, 1937.
- ⁶ LANDOLT-BÖRNSTEIN, Physikalisch-chemische Tabellen, III. Eg.-Bd., 871.

BESTIMMUNG DER EIGENFUNKTIONEN UND ENERGIE DER VALENZELEKTRONEN DES Al^+ -IONS IM GRUNDZUSTANDE.

Zur Berechnung der Eigenfunktion und Energie der Valenzelektronen des Al^+ -Ions im Grundzustande wurde eine Methode benutzt, welche für das *Ca*-Atom von GOMBÁS ausgearbeitet wurde.

Das Wesentliche in der Methode ist, dass man das PAULI-Prinzip bzw. die daraus folgende Besetzungsforschrift für die Valenzelektronen näherungsweise dadurch in Betracht zieht, dass man zum SCHRÖDINGERschen Energieausdruck die statistisch berechnete Energieänderung des Elektronengases hinzuaddiert, welche resultiert, wenn man zu den Rumpfelektronen die Valenzelektronen zunimmt.

Die Energie, welche von der Polarisation des Ions durch die Valenzelektronen herrührt und die Energie, welche der Austauschwechselwirkung der Valenzelektronen mit den Rumpfelektronen Rechnung trägt, da sie von höherer Ordnung klein sind, wurden vernachlässigt.

Einen Vergleich der experimentellen Werten mit den theoretischen ersten zwei Ionisierungsenergien des Al^+ (welche man aus den Resultaten einfach berechnet) gibt die Tabelle 3.

Wie man daraus ersieht, stimmen die berechneten Energiewerte mit den experimentellen gut überein.

B. Kozma.

KITŰZÖTT FELADATOK.

A megoldásokat a következő címre kérjük: Dr. EGERVÁRY JENŐ,
Budapest, IV., Keeskeméti-u. 4.

4. Legyenek $f_{ik}(x)$ ($i, k = 1, 2$) a valós x változó egyértékű folytonos valós függvényei, melyek kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$f_{11}(x+y) = f_{11}(x)f_{11}(y) + f_{12}(x)f_{21}(y),$$

$$f_{12}(x+y) = f_{11}(x)f_{12}(y) + f_{12}(x)f_{22}(y),$$

$$f_{21}(x+y) = f_{21}(x)f_{11}(y) + f_{22}(x)f_{21}(y),$$

$$f_{22}(x+y) = f_{21}(x)f_{12}(y) + f_{22}(x)f_{22}(y).$$

Meghatározandók az $f_{ik}(x)$ függvények.¹

(Kerékjártó Béla)

5. Legyenek x_1, x_2, \dots, x_n az

$$x^n - \binom{A}{1}x^{n-1} + \binom{A}{2}x^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{A}{n} = 0$$

egyenlet gyökei, ahol A tetszőleges szám. Bebonyítandó, hogy

$$x_1^\nu + x_2^\nu + \dots + x_n^\nu = A \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

(Turán Pál)

Helyreigazítás. A 203. oldalon közölt 1. feladat szövegébe több hiba csúszott be; ezért e feladatot itt helyesbítve újból közöljük:

1. Bebonyítandó, hogy ha a nem azonosan eltűnő

$$c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

polinom együtthatóira fennállanak a

$$c_\nu - 3c_{\nu+1} + 3c_{\nu+2} - c_{\nu+3} \geq 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

egyenlőtlenségek, ahol $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = 0$, akkor e polinom deriváltjának zérushelyei az egységkörön kívül vannak.

(Egerváry)

¹ Útmutatásnak lásd W. F. OSGOOD: Lehrbuch der Funktionentheorie, I. (2. kiadás, 1912) 582. o. a következő tétel bebizonyítását:

Az

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), \quad C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$$

függvényegyenletrendszer általános megoldása $S(x)$, $C(x)$ folytonos függvényekkel a következő:

$$S(x) = e^{ax} \sin \mu x, \quad C(x) = e^{ax} \cos \mu x.$$

IRODALOM.

Mikola Sándor: A fizikai megismerés alapjai. I—VIII.
és 1—360. Budapest, 1941. Kiadta a Kir. M. Természettudományi Társulat.

A fizika körében az utolsó félszázadban ismereteink rendkívüli kiterjesztését, elmélyülését és alapfelfogásaink sokszor igen mélyreható átalakulását értük meg: kialakult a régebbi mechanisztikus felfogás után a fenomenologikus irány, azután az elektronelmélet és az új atomisztika, a relativitás és kvantumelmélet. Mindez alkalmat adott a tudomány öneszmélésére és jelentékeny kritikai és ismeretelméleti irodalom kialakulására, melyből csak HELMHOLTZ, MACH, POINCARÉ, DUHEM műveit, valamint a matematika alapjaira vonatkozó kutatásokat emelem ki.

MIKOLA SÁNDOR is, ki ezt az egész átalakulást átélte és éber szemmel kísérte, amint arról több műve tanuskodik, a jelen könyvben a fizika alapfogalmaira és a fizikai megismerés folyamatára vonatkozó felfogásait foglalja össze. Különös gonddal emeli ki és elemzi a fizikai, geometriai és egyéb matematikai alapfogalmaink tapasztalati eredetét és különösen hangsúlyozza ama tapasztalatok alapvető fontosságát, melyek az emberi tevékenységgel járnak együtt. Úgy állítja be, hogy a kozmikus jelenségekkel szemben, melyeknek passzív szemlélői vagyunk csupán, a fizika főképp oly folyamatokra vonatkozik, melyek az ember által létesített valóságokra, gépekre és kísérleti berendezésekre tartoznak, általában az «ember alkotta természet»re». Kétségtelenül ez a beállítás sok érdekes szempontra ad alkalmat és könyvének legérdekesebb vonása.

MIKOLA könyvében a tapasztalat és a gondolkodás folyamatainak és formáinak, valamint a konvenció jelentőségének vizsgálata után a mozgást, tér és időt, a mechanika alapfogalmait és elveit, a relativisztikus mechanikát, az atommechanikát és kvantumelméletet, az okszerűség és törvényszerűség problémáját, az energia és entrópia fogalmait, végre az egységesség és egyszerűség elveit, valamint a matematika és fizika viszonyát tárgyalja. A tapasztalati alapok kiemelésében, messze-menő teoretikus elgondolások hipotetikus voltának kiemelésében sok érdekeset mond. Azonban sok olyat is állít, amit a matematikusok és

fizikusok nagyrésze, kik az utóbbi évtizedek fejlődését követték, alig lesznek hajlandók elismerni.

Ilyen a relativitás elméletének tárgyalása. Sok helyen ez is teljesen megfelelő, így az egyidejűség relativitása esetében és másutt is, de előfordulnak igen zavaró kijelentések is. Hogy a tapasztalat EINSTEIN világfelfogásában el nem helyezhető (178. oldal, 2. kikezdés), hogy a nagy sebességű részek, melyekre a relativisztikus mechanika alkalmazást talál, nem képezik a közvetlen tapasztalás tárgyát (178—179. oldal). Úgy persze nem mérhetjük e sebességeket, mint a ballisztikában, de épp elég tapasztalat vonatkozik rájuk. Éppígy támadása az invariancia elv ellen (182. oldal, fent). A 182—183. oldalon kifejezést ad ellenszenvének a relativitás elmélet matematikai apparátusa ellen, melynek harmoniáját és szimmetriáját nem értékeli. Ugyancsak itt (183. oldal, 24—39. sor) azt állítja, hogy a fizika újabb fejlődése és főképp az atomfizika teljesen elvonta az érdeklődést a relativitás elméletétől. Ez csak részben áll meg. Az atomfizika mindenütt, hol nagy sebességű részek szerepelnek, természetesen alkalmazza a relativitás elméletét és ennek formalizmusát és ezen eljárásnak számos szép eredményét köszönheti. Csak a SOMMERFELD-féle finomstruktúra formulára, a KLEIN—NISHINA-formulára és egyik legnagyobb eredményére, a DIRAC-féle egyenletre utalok. A DIRAC-egyenletre és a lyukelméletre vonatkozó megjegyzése (214. oldal, 2. kikezdés) teljesen önkényes és meg nem felelő konstrukció. A DIRAC-egyenlet felállítását formális, invarianciaelméleti okok tették közelfekvővé, ragyogó példája épp ilyen absztrakt és a szimmetriát figyelembevevő meggondolások termékenységének. Az egyenlet azután közvetlenül szolgáltatta a spin értelmezését és a finomstruktúrát, de felléptek az igen zavaró negatív energiájú állapotok, melyeket nem lehetett eliminálni. Ekkor vetette fel DIRAC a lyukelméletet és ezzel eredetileg a protont akarta értelmezni, melynek eltérő tömege nehézséget okozott, míg végre a pozitron felfedezése a nehézséget megszüntette. A DIRAC-egyenlet még többet is tett: a tapasztalattal megegyező kifejezést adott a párképződés valószínűségére. A DIRAC-egyenlet egyik legragyogóbb példája a relativisztikus és kvantummechanikai szempontok egybeolvadásának és termékenységének.

Azt is meg kell jegyezni (a 210. oldalhoz), hogy a pozitronok kísérletileg is előállíthatók úgy a mesterséges rádióaktivitás, mint párképződés segítségével.

A 187. oldalon a 12—16. sorban azt állítja, hogy a relativisztikus tömeg-energia reláció ($E=mc^2$) az észlelhetőségen túl esik. Éppen az atombontási és párképződési jelenségek azok, melyek ezen alapvető összefüggés egyszerű és meggyőző kísérleti igazolását nyújtották. Igen

kevésbé szerencsésnek kell tartanunk még az egész V. fejezet 6. alfejezetének tárgyalását is.

Hogy a relativitás elmélete vezet problémákhoz, melyek nincsenek megoldva, mint a kvantumelektrodinamikában, azon nem csodálkozhatunk, mert minden elméletnek vannak meg nem oldott problémái.

Az atomminta és vele kapcsolatban a kvantummechanika tárgyalásánál nem kap az olvasó élénk képet arról, hogy a fejlődés a tapasztalattal milyen szoros kapcsolatban ment végbe és épp azért egyes kijelentései a kvantummechanika «metafizikai» jellegére, vagy hogy «az atommag szerkezetének kutatása nagyobbbrészt tisztán matematikai folyamatokkal megy végbe» (213. oldal, 31—32. sor), téves beállításokhoz vezethetnek. Az az állítása, hogy az anomális ZEEMAN-effektust az «elmélet mindez ideig nem tudta kiszámíthatóvá és megmagyarázhatóvá tenni» (356. oldal) teljesen hibás, ellenkezőleg a kvantummechanika egyik legnagyobb diadala, hogy a ZEEMAN-effektust minden bonyodalmával és határesetekkel teljesen értelmezte, minden külön, ad hoc feltevés nélkül. Ezzel kapcsolatban talán nem véletlen, hogy az irodalmi összeállításban épp azok az alapvető és ma már klasszikus kvantumelméleti munkák nincsenek idézve, melyek bő tapasztalati anyagot nyújtanak, mint az igen elterjedt SOMMERFELD: Atombau und Spektrallinien. Zavaró és helytelen a 203. oldal 10—17. sora, valamint megjegyzése a mezon többszörös töltéséről (354. oldal, 33—34. sor).

Egy külön fejezetben tárgyalja az energia és entrópia alapvető fogalmait. Mivel e fejezetben oly kijelentések találhatók, melyek alkalmasak félreértésekre és téves felfogások keltésére, sőt a mai biológiai irodalomban az entrópia laza felfogásai elég zavart keltenek, kénytelen vagyok ezekkel behatóbban foglalkozni. Olyan kijelentései vannak, hogy az entrópia elv ellentétben áll az energia elvével (274. oldal, 17—19. sor). Az ásványtan és geológia tanai nem egyeznek az entrópia törvénnyel (290. oldal. alulról 3—4. sor). «Íme a szervesen világban is van az entrópiatörvénnyel ellenkező irányban lefolyó folyamat» (290. oldal, utolsóelőtti kikezdés). «A szerves élet tehát legnagyobbbrészt ellenkező irányban folyik le, mint ahogyan azt az entrópia törvény követeli» (292. oldal, 6—8. sor). Ezeket csak akkor állíthatjuk, ha nem tudjuk mi és mire vonatkozik az entrópia törvénye. Annál meglepőbb ez, mert MIKOLA más helyen az entrópia teljesen helyes értelmezését adja. Azt tudjuk, hogy vannak kristályosodási és más differenciálódási folyamatok, de ezek épp oly kevésbé vannak ellentétben az entrópiatörvénnyel, mintha a gőzgépben hő munkává alakul át. Itt tisztán kell látni: nem ismeretes egyetlen folyamat, mely az entrópiatörvénnyel ellentétben volna. Nem szeretnék semmiféle dogmatizmus szószólója

lenni és semmiképen sem állítom, hogy nem merülhetnek fel tapasztalatok, akár az élő, akár az élettelen világban, melyek az entropia-törvénynek ellentmondának, de eddig ilyeneket nem ismerünk. Nem szabad elhomályosítani a dolgokat, egy mondatban kijelenteni, hogy a tétel ime nem érvényes, azután valamit kompenzációról beszélni.

De az energia sokkal egyszerűbb tételével kapcsolatban is vannak meglepő kijelentései. Így: «A fizikának alkotó részében (t. i. az ember által alkotott jelenségek és tárgyak körében. Ref.) az örökmozgó lehetetlen voltának elve feltétlenül érvényes. De a fizikának kozmikus részében... a Föld tengelyforgása, a bolygók nap körüli keringése... igazolt örökmozgók» (279. oldal, 10—19. sor). Nem helyes, hogy radioaktív anyagok kémiai szerkezete a sugárzással nem változik (277. oldal, 23—28. sor), mert kimutathatóan átalakulnak más elemekké. Nagy nehézséget lát abban, hogy mai felfogásunk szerint a Napnak és a csillagoknak hűlniök kell, pedig semmiféle tapasztalat nem mutatja hűlésüket (292. oldal, alulról 1—12. sor). Hogy a csillagok sugárzásai energiaforrásának kérdése ma sokkal konkrétabb állapotban van, mint e helyen és a 281. oldal utolsó 1—17. sorában kifejti, az elkerülte figyelmét.

Igen félek, hogy ezek sok téves felfogásra adnak majd alkalmat. Nem ilyen fontos, de mégis felemlítendő, mivel a népszerű irodalomban mindig előfordul, a három test problémájának megoldatlanságára vonatkozó megjegyzése. Megoldás alatt érthetünk formális matematikai megoldást, azaz egy értelmes matematikai kifejezést, mely a differenciálegyenletet kielégíti. Ha ez a kifejezés végtelen sor, konvergálnia kell. Ilyen értelemben SUNDMAN a három test problémáját teljes szigorúsággal és általánosan megoldotta. Annyiban nem tökéletes a megoldás, mert a SUNDMAN-sorok bonyolult szerkezete nem ad áttekintést a megoldás sajátságaira. A megoldás természetének áttekintése teljes általánosságban nem sikerült, csak igen jellegzetes határeseteket ismerünk.

Még említhetném a szerzőnek a matematika szerepére vonatkozó felfogását, mely meglehetősen egyezik egy ma igen elterjedt matematika-ellenes felfogással. De mivel itt értékelésről és felfogásmódról van szó és erre vonatkozó felfogásomat e lap hasábjain nemrég volt alkalmam kifejteni, ettől eltekintek.

Mindent összefoglalva MIKOLA vonzóan és élénken megírt könyvében sok értékes részlet van, főképp fogalmainak tapasztalattal és alkotással kapcsolatos eredetére vonatkozóan, de sok ami téves és félrevezető. Kritikus és szolid előképzettséggel bíró olvasó mindenesetre haszonnal olvashatja, de nem alkalmas arra, hogy laikusok és filozófusok belőle alakítsák fizikai világképüket.

Ortvay Rudolf.

Béll Béla és Takács Lajos: A napsugár útja. Az 1940. évi Rauer pályázaton jutalmazott pályamű. Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz. 1941. 6—25. oldal.

Népszerű cikk, mely céljának teljesen megfelelt, ha a dolgozat asztrofizikai részére vonatkozó irodalmat 1928 óta, midőn EDDINGTON alapvető művének német kiadása megjelent (amely a szerzők egyik főforrása volt) kellően figyelembe vették volna. Azóta pedig sok minden történt: felfedezték a neutron, elvetették azt a feltevést, hogy az atommagok elektron és protonból vannak felépítve (9. oldal, 24—26. sor), senki sem beszél elektron és proton egyesüléséről, melyre semmi tapasztalat sem vonatkozik (9. oldal, 7. sor; 10. oldal, alulról 4—5. sor), a csillagok energiatermeléséről pedig ismert atommagreakciók alapján bár hipotetikus, de jobban megalapozott és konkrétabb képet alkotunk magunknak. A nap és csillagok eddigi élettartamára újabban elég egyöntetűen 2 milliárd évet vesznek fel. A napállandó ma is egy kellő pontossággal meg nem határozott adat, hiszen még azt sem tudjuk, hogy hogyan változik a napfoltperiodussal. Alapvető újabb vizsgálatok mutatják, hogy az ultraviola sugárzás sokkal erősebb, mint a PLANCK-féle formulából számított és ennek tulajdonítják az ionoszféra rétegeinek kialakulását. Mindezekről az utóbbi években annyi szó esett, hogy ismertnek tehetők fel.

Nézetünk szerint egy népszerűsítő cikkben is a legjobbat kell adni, amit a tudomány ezidőszert nyújthat. Főképp vonatkozik ez alapvető dolgokra. Mivel ettől több alkalommal eltérést láttunk, kötelességünknek tartjuk erre nyomatékosan felhívni a figyelmet. Egyébként reméljük, hogy a fiatal szerzők oly műveivel is fogunk találkozni, melyek a népszerűsítés igen felelősségteljes feladatának mindenben eleget tesznek.

O. R.

Gombocz Endre: A Királyi Magyar Természettudományi Társulat története 1841—1941. 467 oldal, 1 képpel és 54 arcképpel. Kiadta a Kir. Magy. Természettudományi Társulat, Budapest, 1941.

Ebből a könyvből nemcsak a Természettudományi Társulat történetét ismerjük meg, hanem arról is képet kapunk, hogy milyen volt hazánk természettudományos műveltségi állapota száz esztendővel ezelőtt és hogyan változott az a század folyamán. Megtudjuk belőle, hogy mennyire nem ismertük száz évvel ezelőtt «az imádott, a semmi oldalról nem méltányolt, a sok oldalról fenyegetett, a minden oldalról kizsákmányolt hazát», hogy mennyi feladat, mennyi sok kötelesség várt a hazafiakra, miket vállaltak ezekből magukra a Társulat vezetői, mennyi eszmét

termeltek ezek megoldására, hogyan akarták eszméiket megvalósítani és hogy végül is mi-mindent sikerült megvalósítaniok. Nagy elismerés illeti meg GOMBOCZ ENDRÉT, hogy ilyen természettudományi művelődéstörténeti háttér megfestésével írta meg a Társulat történetét. Írása sok helyütt lendületes; annak ellenére, hogy sok adatot kellett szövegébe beleszönie, mindvégig élvezetes és bár látszik, hogy nagyon szereti a Társulatot, ítéleteiben ez nem befolyásolja; megállapításai tárgyilagosak.

Öt korszakra osztva tárgyalja a Társulat történetét. Igen küzdelmes a kb. negyedszázadot kitevő első két korszak. Meghatottsággal olvassuk, hogy az alapítók milyen lobogó lelkesedéssel és a nehézségeket nem mérlegelő határtalan önbizalommal tűzték ki a Társulat számára a célokat és hogy az anyagi eszközök elégtelensége meg a gyászos politikai viszonyok miatt milyen keveset tudtak azokból megvalósítani. Mik voltak a célok? Művelni a természettudományokat, hazánkat természettudományilag kikutatni, kőszeneit, ásványvizeit és egyéb természeti kincseit megvizsgálni, Pest-Budát és környékét föld-vegytani és természetrajzi szempontból leírni stb.; mindezek megvalósítása végett könyvtárról, gyűjteményekről, eszközökről gondoskodni; folyóiratot indítani, könyveket kiadni, «hazánkfiait a természeti tudományok jótékonyágában minél nagyobb mértékben részesíteni» és a tudományos magyar műnyelvet is megalkotni. «Nem kisebb feladatot vállaltak tehát az alapítók, — írja GOMBOCZ ENDRE — mint amelyet később a Magy. Nemzeti Múzeum, a Magy. Tud. Akadémia, a csak évek múltán létesült többi tudományos társulat és kísérletügyi kutató intézmények és a Társulat együttesen is csak lépésről lépésre tudtak megvalósítani».

A második negyedszázaddal új korszak kezdődött a Társulat életében. Vezetősége belátta, hogy addigi célkitűzései nem reálisak, a szerteágazó sok feladat megoldására erői és eszközei nem elegendők és hogy ezért működése irányán változtatni kell. Új irányát, mint az idő megmutatta, igen szerencsésen, időszerűen és erőihez mérten választotta meg. Ez az irány: a természettudományok terjesztése, népszerűsítése, megkedveltetése. Hogy milyen okok miatt volt időszerű ez az új irány, hogy milyen eszközöket és módokat talált ki a vezetőség céljainak megvalósítására (Természettudományi Közlöny, Könyvkiadó Vállalat, Népszerű Természettudományi Estélyek, Népszerű Természettudományi Kurzusok stb.) és hogy milyen eredményeket ért el ezekkel, azt írja le a Szerző a harmadik korszakról szóló fejezetekben.

Ebben a korszakban, amely ugyancsak kb. egynegyed századig tartott, virágzóvá lett a Társulat. Tagjainak száma sok ezerre szaporodott, anyagilag fellendült és gyakorlati természettudományi kérdésekben

irányító központ lett. Tagjai közt már a fiatalabb nemzedékből is sok kiváló szakember volt. Ekkor — kb. félszázaddal a Társulat alapítása után — elérkezettnek látta az időt a vezetőség arra, hogy az alapítók nagyszabású terveinek megvalósítására is gondolhasson: a tudományok művelésének, előbbrevitelének hatékonyabb támogatását ismét programjába vegye. Evégből «a szigorúbban szakszerű munkásságra buzdítás érdekében» saját kebelében szakosztályokat szervezett. Ma már nyolc szakosztálya működik. Természettani szakosztály nincs közöttük, nem is volt, mert még mielőtt az első szakosztály megalakult volna, a Természettud. Társulattól függetlenül megalakult a Matematikai és Fizikai Társulat s a fizikusok ebben tömörültek. Hogy a szakosztályok megalapítása milyen mélyreható jelentőségű lett nemcsak a Társulat életében, hanem az egész magyar természettudományra nézve, hogy milyen kutatómunka folyt azokban, és milyen eredményes kezdeményezések indultak ki belőlük, ez a főtárgya a két utolsó korszakról írt fejezeteknek.

A Szerző összeállította mindenkinek az életrajzi adatait, aki jelentékenyebb szerepet játszott a Társulat életében és ezeket az adatokat lábjegyzékben közli s ugyanott az illetők tudományos érdemeit is ismerteti. A vezetőférfiak életét és munkásságát a szövegbe beszöve részletebben ismerteti és fényképeiket is közli. A «Mellékletek» című fejezetben a Társulat néhány nevezetesebb okiratának (alapítólevél, emlékirat, felirat, indítvány stb.) szószerinti szövegét is megtaláljuk. Végül közli a Szerző a Társulat és szakosztályai tisztikarának, valamint a Társulat választmányi tagjainak névsorát kezdettől fogva és a Társulat valamennyi kiadványának jegyzékét.

A Sylvester-nyomda szépen, ízlésesen állította ki a könyvet.

Szabó Gábor.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1941. évi május 24-én tartott XLVI. közgyűlés.

A közgyűlést POGÁNY BÉLA alelnök nyitotta meg, megemlékezve többet közt azokról a szoros kötelékekről, amelyek Társulatunkat, úgy mint régen, ma ismét a visszatért Kolozsvár Egyeteméhez fűzik. Majd átadta a szót ORTVAY RUDOLF ügyvezető titkárnak, aki a Társulat ötvenedik évéről az itt következő jelentést olvasta fel.

A mai közgyűléssel Társulatunk ötvenedik évét rekesztjük be. Ennek egyik — jövőre való kihatásában — legfontosabb eseménye, hogy — hála a Széchenyi Tudományos Társaság, továbbá számos előkelő ipari vállalat és pénzintézet áldozatkészségének — forgótőkénk kerek 12,000 pengővel gyarapodott. Lapunk utolsó füzetében kimutatott 9500 pengős összeghez ugyanis még hozzájárult a Biztosító Intézetek Országos Szövetségének 2000 pengős és a Magyar-Amerikai Olajipar rt. 500 pengős adománya. Nekik csak most fejezhetjük ki nyilvánosan hálás köszönetünket. Jubiláris gyűjtésünk néhány évre a Társulat intenzívebb munkásságát, első-sorban lapunk terjedelmének lényeges gyarapítását fogja lehetővé tenni. Hálával kell ezzel kapcsolatban néhány tagtársunk, elnökünk mellett főképp JENDRASSIK GYÖRGY, a Ganz r.-t. helyettes vezérigazgatójának, valamint VERESS PÁL egyet. tanárnak lelkes segítségéről megemlékezni. Ezekhez az adományokhoz járul kitűnő alapító tagtársunk KLUG LIPÓT 5000 pengős alapítványa, mely a nemeslelkű alapító intenciója szerint arra fog szolgálni, hogy a tiszta geometria ápolását hazánkban elősegítse. A választmánynak az alapítvánnyal kapcsolatos határozatát lapunk utolsó füzetében közöltük. Azóta a választmány, hosszas megfontolás után, elhatározta, hogy az alapítványi összeg nagy részét (t. i. egy tőzsdei kötés erejéig) 1914. évi $4\frac{1}{2}\%$ -os fővárosi kötvénybe fekteti. Itt

kell megemlítenünk, hogy ugyancsak a Társulat jubileuma alkalmából ARANY DÁNIEL, a Középiskolai Matematikai Lapok megalkotója, aki szintén 50 év óta buzgó tagja a Társulatnak, kb. 160 matematikai munkából álló kicsiny, de értékes könyvtárát elhalálózása utánra felajánlotta a Társulatnak. A választmány hálásan megköszönte e nagylelkű elhatározást, kifejezést adva annak a reményének, hogy a könyvtár átadására csak nagysokára kerüljön sor. Hálával emlékezünk arról is, hogy jubileumunk alkalmából sokan gratulációikkal kerestek fel minket és jan. 30-i jubiláris ülésünkön számos tudományos intézmény és társulat volt szíves magát képviseltetni. A választmány viszont üdvözlő sorokat intézett azon tagtársainkhoz, akik már a Társulat alapításában is részt vettek, ezek — igen tisztelt elnökünkön kívül — : ARANY DÁNIEL, BEKE MANÓ, FRAUNHOFER LAJOS, HOOR-TEMPIS MÓRIC, KLUG LIPÓT, KOVÁCS JÁNOS, RADOS IGNÁC, RÓNA ZSIGMOND, RUCSINSZKI LAJOS, SUTÁK JÓZSEF.

Örömdetes anyagi gyarapodásunk lehetővé teszi a szerzői tiszteletdíjak részleges visszaállítását. A választmány elhatározta hogy szerény ellenszolgáltatásként a Lapokban megjelenő cikkek szerzőinek (a doktori disszertációk kivételével) oldalanként 3 P honoráriumot fizet.

Örömmel emlékezünk meg azokról a tudományos sikerekről, melyeket több prominens tagtársunk ért el : kitűnő alelnökünk, POGÁNY BÉLA a Corvin-koszorúval tüntettetett ki, JORDAN KÁROLY, a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika kiváló művelője, egyetemi nyilvános rendes tanári címet nyert, RÉDEI LÁSZLÓ pedig, aki Társulatunk König Gyula jutalmának legutóbbi laureatusa volt s annak idején Eötvös-díjban is részesült, a szegedi egyetem professzora lett. Valamennyiükhöz a választmány üdvözlő iratot intézett. RYBÁR ISTVÁN tisztelt tagtársunkat abból az alkalomból üdvözölhettük, hogy igazgatója lett annak az intézetnek, melynek vendégszeretetét Társulatunk 50 éve élvezi. RYBÁR kijelentette, hogy — úgy mint két kiváló elődje — ő is a legnagyobb készséggel bocsátja rendelkezésünkre intézetének helyiségeit az előadó és választmányi ülések céljaira.

Tavaly elhunyt szeretett alelnökünk TANGL KÁROLY emlékének megörökítésére a Társulat PÁTZAY PÁL szobrászművésszel Tangl-emlékérmeket készíttetett. A plaket viaszmodelljét a művész bemutatta és remélhetőleg hamarosan el fog készülni, amikor azt fokozatosan fogjuk az aláíróknak (már eddig is 50-nél többen jelentkeztek) megküldeni.

Örömmel üdvözlöttük 100 éves jubileuma alkalmából a Kir. M. Természettudományi Társulatot, melynek holnap tartandó ünnepi ülésén Társulatunkat fizikus alelnöke és titkára fogja képviselni.

A jubiláris év kimagasló eseménye volt az április 29-én tartott előadóülésünk. Ezen W. HEISENBERG, a nagy német fizikus, a lipcsei egyetem Nobel-díjas professzora, a kvantummechanika egyik megalapítója tartott előadást «Die durchdringende Komponente der kosmischen Strahlung» címen. HEISENBERG professzor a Szellemi Együttműködés Szövetségének Magyar Egyesülete és a mi Társulatunk közös vendégeként jött Budapestre.

Tanulmányversenyeink a szokásos módon folytak le. A matematikai jutalmakat ezúttal HOFFMANN TIBOR és BIZÁM GYÖRGY nyerték el, a fizikaiakat pedig ugyanők és FREUD GÉZA.

A mai beleszámítva 12 előadóülésünk volt. Ezeken (a jubiláris ülés előadásain kívül) 12 előadó 6 matematikai és 6 fizikai tárgyú előadást tartott.

Lapunk 47. évfolyama több mint 12 ívnyi terjedelemben idejében megjelent. Az idei évfolyam első füzetét már május elején szétküldöttük. Ebben a füzetben — mely önmagában terjedelmesebb mint az utolsó 25 év legtöbb teljes kötete — újból életre keltettük a kitűzött feladatok rovatát, amit az tett lehetővé, hogy a rovat vezetését EGERVÁRY JENŐ tagtársunk volt szíves elvállalni. Örömlénk, ha t. tagtársaink megoldások szorgalmas beküldésével hozzájárulnának felélesztett rovatunk sikeréhez. Az idén kiadandó 48. kötet további tartalmából már több mint 10 ív szedés alatt van s így (ellentétben az utóbbi évek kétfüzetes köteteivel) vaskos jubiláris kötetünket három füzetben fogjuk tagtársainknak megküldeni.

Mint minden évben, úgy most is hálával emlékezünk meg a

Magyar Tudományos Akadémia és az Állam segélyéről. Az utóbbi az idén 500 P-ről 750 P-re emelkedett. Továbbá 79-ről 94-re emelkedett azon gimnáziumok száma, amelyek számára a VK. Minisztérium Lapunkra előfizetett. Erről annál nagyobb örömmel teszünk jelentést, hogy ez a többlet hazánk ez évben visszatért keleti területein fog Lapunknak új olvasókat, sőt talán új munkatársakat is szerezni. Az idén először Budapest Székesfőváros is megrendelte (közoktatási ügyosztálya előterjesztésére) Lapunkat iskolái számára, éspedig 6 gimnázium, 10 kereskedelmi középiskola és 3 polgári iskola számára.

Taglétszámunk is az idén örvendetes gyarapodást mutat: 1940 novembere óta 42 új tag vétetett fel. Ezeknek egy tekintélyes része a visszatért erdélyi területekre való. Hálával kell ez alkalomból is megemlékeznünk két kitűnő buzgó tagtársunkról, SZŐKEFALVI NAGY GYULA és GYULAI ZOLTÁN kolozsvári egyetemi tanárokról: jubileumunk alkalmából két kolozsvári lapban közölt cikkeiknek köszönhetjük az erdélyi matematikusok és fizikusok belépését. Számos új tagunkat továbbá KALMÁR LÁSZLÓ és SZŐKEFALVI NAGY BÉLA szegedi egyet. m. tanárok buzgalmának köszönjük. Ha budapesti tagtársaink új tagok szerzése terén követnék szegedi és kolozsvári tagtársaink példáját, taglétszámunk további lényeges gyarapodása válnék lehetővé.

Végül még szomorodott szívvel halottainkról kell megemlékeznünk: BUGARSZKY ISTVÁN és FINKEY JÓZSEF egyetemi tanárok hagytak el minket. Kegyelettel őrizzük emléküket.

Utoljára nem mulaszthatjuk el felemlíteni, hogy Társulatunk jubiláris éve összeesett hazánk határainak jelentékeny helyreállításával, nevezetesen Erdély egy részének és a Délvidéknek visszacsatolásával. Társulatunk hazafias együttérzéssel vett erről tudomást, ülésein ennek kifejezést adott és a Kormányzó Úr Ő Főméltóságának mindkét alkalomból hódolatát fejezte ki országgyarapító tevékenységeért.

JELITAI JÓZSEF pénztárosi jelentéséből a zárszámadást és vagyonmérleget alább közöljük. A közgyűlés megadta a felmentvényt a pénztárosnak.

Majd a lelépő választmányi tagok, EGERVÁRY JENŐ, JORDAN KÁROLY, LASOVSKY KÁROLY, LÓKY BÉLA, SARKADI KÁROLY, VERESS PÁL újból megválasztattak. A számvizsgáló bizottságba pedig (melynek a választmány részéről FARAGÓ ANDOR és STACHÓ TIBOR lettek tagjai) a közgyűlés a maga részéről GOLDZIHER KÁROLYT és RENNER JÁNOST küldte ki.

Végül a közgyűlés, a választmány javaslatára, a Társulat érdekében kifejtett nagyvértékű tevékenységük elismeréseképpen, KLUG LIPÓTOT MIKOLA SÁNDORT és SZABÓ GÁBORT a Társulat *tiszteleti tagjainak* választotta meg.

1940. évi zárszámadás.

Bevétel:

	Pengő
1. Maradvány az 1939. évről :	
a) kézipénztárban	14·13
b) postatakarékpénztári csekk-számlán	139·55
c) M. Lesz. és Pénzv. Bank-beli folyószámlán ...	356·—
d) Károly Irén-alapítvány	1020·—
2. Tagdíj	1649·10
3. Előfizetési díj	848·—
4. M. Tud. Akad. segélye	1000·—
5. Államsegély	500·—
6. Adomány, kamat	5353·08
7. Vegyes.....	67·90
	<u>Összesen : 10,947·76</u>

Kiadás:

	Pengő
1. Nyomda	2727·92
2. Tanulmányverseny	200·—
3. Tud. Társ. és Int. Orsz. Szöv. Díjkezelősége	177·42
4. Titkári és előadói tiszteletdíj.....	250·—
5. Kőnig Gyula-érem készítőjének tiszteletdíja	200·—
6. Vegyes.....	144·37
Pénztári maradvány	7248·05
	<u>Összesen : 10,947·76</u>

Pengőben befizetett alaptőke:

Károly Irén-alap	1020·—
Bláthy Ottó Titusz alapító tagdíja 1928. dec. 14.	100·—
Nagy L. József « « 1928. dec. 18.	100·—
Pólya György « « 1930. nov. 26.	182·—
	<u>Összesen : 1402·—</u>

Vagyon:

	Korona	Pengő
1. Koronaértékpapír	29,008	
2. Pénzkészlet:		
a) az 5997-es postatakp. csekkszamlán .	5846-05	} 7248-05
b) alaptőke zárt « betétkönyvben	1402.—	
3. Tagdíjhátralék		200.—
4. Nyomtatvány		100.—
Összesen:	29,008	7548-05

Téher:

1. Tartozás Franklin-nyomdának 1941 jan. 14-én		65-65
2. Egyenleg	29,008	7482-40
Összesen:	29,008	7548-05

Budapest, 1941. január 14.

Dr. Jelítai József s. k.
pénztáros

Megvizsgáltuk és rendben lévőknek találtuk.

Budapest, 1941. április 17.

FARAGÓ ANDOR s. k., Dr. GOLDZIER KÁROLY s. k.,
Dr. RENNER JÁNOS s. k., Dr. STACHÓ TIBOR s. k.

Előadások:

1940. nov. 7. A tanulóversenyek eredményének kihirdetése. —
ORTVAY RUDOLF: A matematika néhány újabb szempontjának fizikai
vonatkozásai.

1940. nov. 21. HAJÓS GYÖRGY: Egy Minkowski-féle sejtés igazolása.

1940. dec. 12. EGYED LÁSZLÓ és VARGHA TAMÁS: Egy az irányított
gráfokra vonatkozó minimum-feladatról (előadta: EGYED LÁSZLÓ).

1941. jan. 30. *Jubiláris ülés.* RADOS GUSZTÁV: Elnöki megnyitó. —
KÖNIG DÉNES: A Társulat első ötven éve. — ORTVAY RUDOLF: Jelentés
a Társulathoz eddig befolyt jubiláris adományokról.

1941. febr. 13. FEJES LÁSZLÓ: Konvex görbék megközelítése sok-
szögekkel.

1941. febr. 27. BAY ZOLTÁN: Elektronsokszorozó mint elektron-
számláló.

1941. márc. 13. PEREMARTONI NAGY LAJOS: A Laplace-féle függ-
vénytranszformáció és fizikai alkalmazásai.

1941. márc. 27. TURÁN PÁL: Egy szélsőértékfeladat a gráfelméletben.

1941. ápr. 17. SZEPESI ZOLTÁN: Statisztikus áramingadozási jelenségek.

1941. ápr. 29. W. HEISENBERG (Leipzig): Die durchdringende Komponente der kosmischen Strahlung.

1941. máj. 8. VINCZE ISTVÁN: Konvex görbékről. — PÉTER RÓZSA: Jellemezhető-e a természetes számsor axiomatikusan?

1941. máj. 24. NOVOBÁTZKY KÁROLY: A többtestprobléma a kvantummechanikában.

Választmányi ülések voltak: 1940. szept. 5. és nov. 7.; 1941. jan. 30., febr. 27., ápr. 17., máj. 10. és máj. 24.

Az 1941. évi XLVI. közgyűlés volt: 1941. máj. 24.

*

Uj tagok:

- Dr. Anderlik Előd, egyetemi tanár, Budapest.
 Balázs János, polg. isk. tanár, Békéscsaba.
 Bencsó Sándor, polg. isk. tanár, Ózd.
 Boérné Léber Margit, tanítóképzőint. tanár, Székelyudvarhely.
 Dr. Budó Ágoston, egyetemi m. tanár, Szeged.
 Cseke Vilmos, gimn. tanár, Kolozsvár.
 Cservény Albin, gimn. tanár, Kolozsvár.
 Czimer László, polg. isk. tanár, Szeged.
 Dr. Faragó Tibor, ref. leánygimn. tanár, Miskolc.
 Dr. Gergely Jenő, keresk. középisk. tanár, Kolozsvár.
 Dr. Grünwald Géza, középisk. tanár, Budapest.
 Dr. Halmágyi László, tanár, Budapest.
 Juszko András, polg. isk. tanár, Királytelekszőlő.
 Dr. Kárteszi Ferenc, gimn. tanár, Budapest.
 Dr. Koczás Gyula, egyetemi m. tanár, Pécs.
 Dr. Kovács István, középisk. tanár, Budapest.
 Márton Sámuel, unit. koll. tanár, Kolozsvár.
 Mátrai Lászlóné dr. Zemplén Jolán, Budapest.
 Mészner Jenő, a Nemzeti Bank ellenőre, Budapest.
 Németh Zoltán, polg. isk. tanár, Veszprém.
 Orbán István, polg. isk. tanár, Karcag.
 Solt Árpád, polg. isk. tanár, Szeged-Átokháza.
 Szabó György, polg. isk. tanár, Komandó (Háromszék vm.).
 Szabó László, ny. tanár, Kézdivásárhely.

Szántó Fidél, prem. gimn. tanár, Budafok.
Szebehely Győző, műegyetemi hallgató, Budapest.
Dr. Széll Kálmán, egyetemi tanár, Szeged.
Szokolai Anna, polg. isk. tanár, Nagykanizsa.
Tóth Ferenc, ref. gimn. tanár, Miskolc.
Urbán Szabó József, polg. isk. tanár, Törökszentmiklós.
Varga Dezső, polg. isk. tanár, Vajszló (Baranya vm.).
Varga Miklós, polg. isk. tanár, Csanádapáca.
Veidner János, polg. isk. tanár, Gyöngyös.
Dr. Vescan Teofil, gimn. tanár, Kolozsvár.

Meghaltak :

Dr. Bugarszky István, egyetemi tanár, Budapest.
Dr. Finkey József, egyetemi tanár, Sopron.

Kimutatás

az 1941. évi március hó 1-től 1941. évi május hó 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

1926-ra: **Walek Károly** (2).

1927-re: **Baintner Géza** (2), **Walek Károly** (6).

1928-ra: **Walek Károly** (4).

1931-re: **Fröhlich Pál** (6).

1932-re: **Fröhlich Pál** (6).

1937-re: **Kalmár László** (6), **Lajta Ernő** (2), **Veress Pál** (1).

1938-ra: **Alexits György** (4), **Kalmár László** (6), **Lajta Ernő** (2), **Veress Pál** (7).

1939-re: **Bródy Imre** (8), **Fejes László** (6), **Girsik Géza** (3), **Kalmár László** (6), **Patai László** (2), **Theisz Edéné** (2).

1940-re: **Barnóthy Jenőné** (8), **Bolla Györgyné** (8), **Csada Imre** (6), **Csizhegyi Lajos** (6), **Fejes László** (6), **Girsik Géza** (2), **Jakab Györgyné** (8), **Kalmár László** (6), **Kilczér Gyula** (8), **Kónya Albert** (6), **Mischung Ilona** (6), **Szabó Gusztáv** (8), **Szántó Sándor** (8), **Theisz Edéné** (2), **Vincze István** (3).

1941-re: **Falábú Jenő** (6), **Farkas Dénes** (6), **Gyulai Zoltán** (6), **Hausbrunner Vilmos** (8), **Jakab Györgyné** (4), **Kárteszi Ferenc** (8), **Lóky Béla** (6), **Mészner Jenő** (8), **Mischung Ilona** (6), **Novobátczy Károly** (8), **Rados Ignác** (8), **Róth Antal** (6), **Sarkadi Károly** (8), **Szabó László** (6), **Szántó Fidéi** (6), **Szebehely Győző** (8), **Székely Károly** (6), **Széll Kálmán** (6), **Vescan Teofil** (6), **Vincze István** (3), **Vörös Cyrill** (6).

1942-re: **Gyulai Zoltán** (4).

2 Előfizetés.

VKM 1941-re: 94 gimnázium részére (752), Technikai és Anyagvizsgáló Intézet 1940—1941-re (16), Bernardinum 1928-ra (8).

3 Adomány.

Goldberger Sám. F. és Fiai R.-t. (200), Államsegély 39/40-re (750), Magyar-Amerikai Olajipar R.-t. (500), Biztosító Intézetek Országos Szövetsége (2000).

Budapest, 1941. jún. 15.

Jelítai József
pénztáros.

1880. Felelős kiadó: Kőnig Dénes.
Franklin-Társulat nyomdája. — vitéz Litvay Ödön.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendőek és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes (XI., Horthy Miklós-út 28., Lénárt-pensio)*, a fizikai tárgyúak pedig *Ortway Rudolf (VIII., Múzeum-körút 4/c, Egyetemi elméleti fizikai intézet)* címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikhoz néhány soros idegen nyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrektúrára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Ortway Rudolf* titkár címére küldendőek.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámájára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, cím-változások *Jelítai József* pénztáros címére (II., Bimbó-út 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *R. Ortway*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *R. Ortway*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

40 éve gyárt
tudományos műszereket,
korszerű tanszereket,
optikai eszközöket,
elektromos mérőműszereket,
repülőgépműszereket,
laboratóriumi bútorzatot,
vetítőgépeket

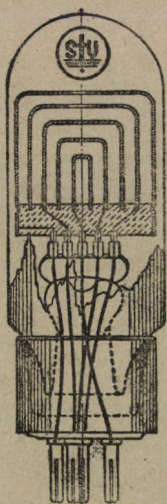
MARX ÉS MÉREI

Budapest, VI., Bulcsu-utca 7. szám

Eladási osztály:

Budapest, VI., Váci-út 18. szám

A „STABILISATOR“



az egyenirányítót vagy bármilyen más áramforrást
akkumulátorral egyenértékű, állandó feszültségű, kis
belsőellenállású áramforrássá alakítja át.

A «stabilizált» feszültség csak kb. $\pm 0,1\%$ -ot
változik $\pm 10\%$ tápláló feszültség ingadozásnál: kb.
1—2%-ot változik üresjárás és teljes terhelés között;
0,01%-ra függenek csak egymástól a részfeszültségek.

Tehetetlenség nélkül szabályoz. Önfogyasztás: né-
hány mA. A Stabilisator kicsi, könnyű, üzembiztos,
olcsó. Új típusok!

Elméleti és gyakorlati műszaki leírást kívánatra
díjtalanul küld a

STABILOVOLT GmbH

Berlin SW 68 Wilhelmstrasse 130

magyarországi képviselője

Dr. GOLDBERGER MIHÁLY

Budapest, VII., Bajza-utca 4. — Telefon: 1-425-09.

50255

XII

23

MATEMATIKAI és FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF

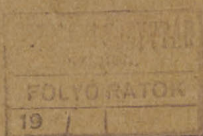
XLVIII. KÖTET

JUBILÁRIS KÖTET
A TÁRSULAT ÖTVENÉVES FENNÁLLÁSA
ALKALMÁBÓL

3. (BEFEJEZŐ) RÉSZ

BUDAPEST, 1941

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT



TARTALOMJEGYZÉK.

	Oldal
BEKE MANÓ: Egy differenciális függvényegyenlet	387
VERESS PÁL: Diophantosi egyenletek grafikus megoldása	393
HAJÓS GYÖRGY: A rácsparallelogrammákról	398
SZÁSZ PÁL: A hiperbolikus trigonometriáról	401
ALEXITS GYÖRGY: A Fourier-sor Cesàro-közepeivel való approxi- máció nagyságrendjéről	410
VARGA OTTÓ: Az invariáns differenciál megállapítása a Finsler-féle terekben	423
TURÁN PÁL: Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról	436
FELDHEIM ERVIN: A Jacobi-polinomok elméletéhez	453
EGYED LÁSZLÓ: Végtelen gráfok jólirányíthatóságáról	505
MAKAI ENDRE: Bizonyos másodrendű differenciálegyenletek saját- értékeinek becslése	510
SAS ERNŐ: Az ellipszis egy szélsőértéktulajdonságáról	533
W. HEISENBERG: Goethe és Newton színelmélete a modern fizika megvilágításában	543
Kitűzött feladatok	562
Megoldott feladatok	563
Tanulóversenyek	571
Pénztárosi kimutatás a befolyt összegekről	576

*

Jelen füzet függelékeként közöljük Társulatunk tagjegyzékét. Kérjük t. tagjainkat, sziveskedjenek az ebben talált hibákat és a kívánt változtatásokat a Társulat pénztárosának (Jelitai József, Budapest, II., Bimbó-út 5.) tudomására hozni.

EGY DIFFERENCIÁLIS FÜGGVÉNYEGYENLET.

A $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ egyenlőség, mely $\sin 2x = 2 \sin x \cdot (\sin x)'$ alakban írható, általánosítva, arra a kérdésre vezet, hogy melyek azok az $f(x)$ analitikai függvények, amelyek az

$$f(2x) = 2f(x)f'(x), \quad (1)$$

differentiális függvényegyenletnek nevezhető relációnak tesznek eleget?

Feltesszük, hogy a zérus-hely az $f(x)$ reguláris helye és így van olyan r sugarú kör, melyen belül és amelynek határán nincs $f(x)$ -nek szinguláris helye. E szerint e körben

$$f(x) = \sum a_n x^n \quad (2)$$

konvergens hatványsorba fejthető.

Az (1)-ből következik, hogy $f(2x)$ az $|x| \leq \frac{r}{2}$ sugarú körben szingularitástól mentes. Jelöljük $f(x)f'(x)$ -et $\varphi(x)$ -szel; $\varphi(x)$ az r sugarú körben szingularitástól mentes. $2\varphi(x)$ az $\frac{r}{2}$ sugarú körben megegyezik $f(2x)$ -el, tehát $f(2x)$ -nek analitikai folytatása és így $f(2x)$ -nek az $|x| \leq r$ sugarú körben sincs szingularitása; az (1) alatti egyenlőség tehát fennáll az egész r sugarú körben és így $f(x)$ -nek a $2r$ sugarú körben sincs szingularitása; tehát az (1) fennáll az $|x| \leq 2r$ sugarú körben. Így folytatva, arra jutunk, hogy $f(x)$ függvény az egész síkon szingularitástól mentes, egyértékű analitikai függvény, vagyis: *egész függvény*.

Az (1) ebben az alakban írható:

$$\sum_0^{\infty} a_n 2^n x^n = 2 \sum_0^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1}. \quad (2a)$$

Ebből:

$$2^{n-1}a_n = a_n a_1 + 2a_{n-1}a_2 + 3a_{n-2}a_3 + \cdots + (n+1)a_0 a_{n+1}. \quad (3)$$

$n = 0$ esetében

$$a_0(1 - 2a_1) = 0,$$

ami azt mondja, hogy vagy $a_0 = 0$ és akkor a_1 egyelőre tetszőszerinti, vagy pedig a_0 tetszőleges és $a_1 = \frac{1}{2}$.

Legyen először $a_0 = 0$. Ekkor a (3) egyenletből:

$$a_1 = a_1^2,$$

amiből $a_1 = 0$, vagy $a_1 = 1$.

Ha $a_1 = 0$, akkor minden együttható 0. Tegyük fel ugyanis, hogy

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = 0,$$

akkor a (3)-ból következik, hogy $a_n = 0$, amivel kimutattuk, hogy $a_0 = 0$ és $a_1 = 0$ esetében $f(x)$ identikusan 0.

Ha $a_1 = 1$, (3)-ból $a_2 = 0$ származik. Ha pedig $n = 3$, akkor $4a_3 = 4a_3$ -ra jutunk, amiből az következik, hogy a_3 tetszőszerinti. $n = 4$ -re, a (3) egyenlet azt mondja, hogy $8a_4 = 5a_4$, vagyis $a_4 = 0$. $n = 5$ -re azt kapjuk, hogy $a_5 = \frac{3a_3^2}{10}$, vagy ha $a_3 = \frac{a^2}{3!}$, akkor $a_5 = \frac{a^4}{5!}$. Így tehát, arra jutottunk, hogy

$$a_0 = a_2 = a_4 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{a^2}{3!}, \quad a_5 = \frac{a^4}{5!}.$$

Teljes indukcióval kimutatjuk, hogy minden n -re:

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = \frac{a^{2n-2}}{(2n-1)!}.$$

Tegyük fel ugyanis, hogy megadott n -ig fennállanak ezek az egyenlőségek, kimutatjuk, hogy $n+1$ -re is érvényesek. Ugyanis (3) szerint, tekintetbe véve, hogy $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2n} = 0$,

$$\begin{aligned} 2^{2n}a_{2n+1} &= a_{2n+1} + \frac{3a^{2n}}{3!(2n-1)!} + \\ &+ \frac{5a^{2n}}{5!(2n-3)!} + \cdots + \frac{(2n-1)a^{2n}}{(2n-1)!3!} + (2n+1)a_{2n+1}, \end{aligned}$$

vagyis:

$$\begin{aligned} & (2^{2n} - 2n - 2), a_{2n+1} = \\ &= \frac{a^{2n}}{(2n+1)!} \left[\frac{(2n+1)!}{2!(2n-1)!} + \frac{(2n+1)!}{4!(2n-3)!} + \dots + \frac{(2n+1)!}{(2n-2)!3!} \right] = \\ &= \frac{a^{2n}}{(2n+1)!} \left[\binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{4} + \dots + \binom{2n+1}{2n-2} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

A szögletes zárójelben álló kifejezést a

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \quad \text{és} \quad 0 = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k}$$

relációk segítségével kiszámítván, azt találjuk, hogy e kifejezés értéke éppen $2^{2n} - 2n - 2$ úgy hogy a (4) alatti egyenletből:

$$a_{2n+1} = \frac{a^{2n}}{(2n+1)!}. \quad (5)$$

Ezzel állításunk első részét bebizonyítottuk. Ha pedig a (3) alatti egyenletet $2n+2$ -re írjuk fel és tekintetbe vesszük, hogy a_{2n} -ig feltételünk szerint minden páros indexű együttható 0, akkor arra jutunk, hogy

$$2^{2n+1} a_{2n+2} = (2n+3) a_{2n+2},$$

amiből következik, hogy

$$a_{2n+2} = 0.$$

Ezzel kimutattuk, hogy első esetünkben (midőn ugyanis $a_0 = 0$) az (1) alatti differenciális függvényegyenlet megoldása:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \sum_{1}^{\infty} \frac{a^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (6)$$

ahol a tetszésszerű számérték.

Ha a értéke gyanánt 0-t választjuk, akkor

$$f(x) = x,$$

amelyre nyilvánvalóan érvényes az (1) alatti függvényegyenlet.

Ha $a \neq 0$ akkor $f(x)$ így írható:

$$f(x) = \frac{1}{a} \sum \frac{(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (7)$$

vagyis

$$f(x) = \frac{1}{a} \sinhyp(ax),$$

ami teljesíti a szóbanforgó függvényegyenletet. Az $a = ci$ helyettesítéssel a (7) alatti kifejezés átmegy

$$f(x) = \frac{1}{c} \sin cx$$

-be, ami viszont a $c = -ai$ helyettesítéssel az előbbit adja.

A második esetben, vagyis midőn $a_0 \neq 0$, a (3) alatti egyenlőségből következett, hogy $a_1 = \frac{1}{2}$ és a_0 tetszőszerinti. A (3) alatti egyenletbe rendre $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ téve, azt kapjuk, hogy

$$a_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 2a_0}, \quad a_3 = \frac{1}{2^3 \cdot 3! a_0^2}, \quad a_4 = \frac{1}{2^4 \cdot 4! a_0^3}.$$

Tegyük fel, hogy már bizonyos n -ig érvényes az

$$a_n = \frac{1}{2^n \cdot n! a_0^{n-1}}$$

kifejezés. Akkor a (3) alatti relációt n -re alkalmazva, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} & \frac{2^{n-1}}{2^n \cdot n! a_0^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{2^{n+1} a_0^{n-1}} \left[\frac{1}{n!} + \frac{2}{(n-1)! 2!} + \frac{3}{(n-2)! 3!} + \dots + \frac{n}{n!} \right] + \\ & \quad + (n+1) a_0 a_{n+1}, \end{aligned}$$

amiből:

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + 2^{n+1}(n+1)! a_0^n \cdot a_{n+1}.$$

De minthogy $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 1$, azért:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)! a_0^n}.$$

Ezzel kimutattuk, hogy a keresett

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n! a_0^{n-1}} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2a_0} \right)^n = a_0 e^{\frac{x}{2a_0}}.$$

E szerint tehát az (1) függvényegyenletet — az $f(x) \equiv 0$ megoldástól eltekintve — csakis az

$$x, \frac{1}{c} \sin cx \text{ és } ce^{\frac{x}{2c}}$$

függvények elégítik ki, ahol c tetszőszerinti állandó.

Megjegyezzük, hogy az első két függvény egyúttal az

$$f(-2x) = -2f(x)f'(x)$$

függvényegyenletet is kielégíti és nincs is ez egyenletnek más páratlan megoldása. Ugyanis ha $f(x)$ páratlan függvény, akkor $f(-2x) = -f(2x)$, tehát az $f(-2x) = -2f(x)f'(x)$ -ből az (1) alatti egyenlőség következik.

Azt is könnyen kimutathatjuk, hogy általában, ha $f(x)$ páratlan függvényre fennáll az

$$f(cx) = cf(x)f'(x) \quad (1a)$$

reláció, akkor az $f(x) = x$ kivételével c csakis ± 2 lehet. Az együtthatókra nézve ugyanis fennáll a

$$c^n a_n = c(a_1 a_n + 2a_2 a_{n-1} + 3a_3 a_{n-2} + \dots + n a_n a_1)$$

egyenlet, melyből $a_1 = 1$ és $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0$ esetében a_3 -ra $a(c^2 - 4)a_3 = 0$ következik. Ha $a_3 = 0$ volna, akkor minden páratlan indexű együttható ($a_1 = 1$ kivételével) is 0 lenne, vagyis $f(x) = x$ lenne, ami a $f(cx) = cf(x)$ egyenlőséget minden c -re nézve kielégíti. Egyébként $c^2 = 4$, vagyis valóban csak $c = \pm 2$ és így $f(x)$ csakis x vagy $\frac{1}{a} \sinh x$ lehet.

Olyan páros $f(x)$ analitikai függvény, amely az (1a) relációt kielégítené, nem létezik. Ugyanis a baloldalon páros függvény van, a jobboldalon pedig (minthogy $f'(x)$ páratlan) páratlan függvény áll.

Általában annak az analitikai függvénynek az alakja, amelynek a 0 hely reguláris helye és az (1a) reláció $c \neq 2$ esetében kielégíti, elég bonyolult. Ez a függvény az $ae^{\frac{x}{2a}}$ exponenciális függvény általánosításának volna tekinthető.

Megjegyezzük, hogy ha az (1a) relációban mindkét oldalon

x -szerint differenciálunk, akkor $f'(cx)$ az $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ -nek racionális kifejezése lesz. Újból differenciálván, $f''(cx)$ az $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ racionális függvényévé válik. Így folytatva az eljárást, arra jutunk, hogy az $f(cx)$, $f'(cx)$, $f''(cx)$... függvény-sorozat az $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$,... függvények racionális (és pedig speciális racionális) függvényei gyanánt állíthatók elő. Az $f(x)$ meghatározása e végtelen egyenletsorozatból bizonyos tekintetben általánosítása volna $n = \infty$ esetére POINCARÉ vizsgálatainak* a multiplikációs függvényekről.

Beke Manó.

ÜBER EINE FUNKTIONAL-DIFFERENTIAL- GLEICHUNG.

Die Formel $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \sin x (\sin x)'$ legt die Frage nahe, welche die analytischen Funktionen sind, die sich in $x=0$ regulär verhalten und die Funktional-Differentialgleichung $f(2x) = 2f(x)f'(x)$ befriedigen. Das Ergebnis ist, dass nur 0 , x , $\frac{1}{c} \sin cx$, und $ce^{\frac{x}{2c}}$ die gesuchten Funktionen sind. Das Problem wird in speziellen Fällen auch für $f(cx) = cf(x)f'(x)$ gelöst.

E. Beke.

* POINCARÉ: Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes. Journal de Liouville, 4^e série, t. 6.

DIOPHANTOSI EGYENLETEK GRAFIKUS MEGOLDÁSA.

Az itt tárgyalandó kérdés abba a körbe tartozik, amelyet MINKOWSKI «Geometrie der Zahlen» névvel jelölt meg. Céлом nem új eredmények közlése, hanem egy ismert tételnek szemléletesen, elemi geometriai módszerrel való bebizonyítása és e geometriai tétel számelméleti kapcsolatainak ismertetése.

A kérdés a *síkrács* bizonyos parallelogrammaira vonatkozik. «Síkrács»-nak nevezzük valamely derékszögű, párhuzamos koordinátarendszerre vonatkozólag a sík azon pontjainak összességét, melyeknek mindkét koordinátája egész szám. E pontokat *rácspontoknak* mondjuk. A síkrács egy sokszögén, vagy röviden *rács-sokszögön* olyan sokszöget értünk, melynek minden szögpontja rácspon. Az alábbiakban csak *rácsparallelogrammokról* lesz szó.

Rácsparallelogramma területe, mint könnyű belátni, mindig egész szám. Erre a területre vonatkozólag a következő, ismert¹ tételt fogom bebizonyítani:

Valamely rácsparallelogramma területe akkor és csak akkor egyenlő az egységgel, ha a rácsparallelogrammának sem belsőjében, sem a határán nincs más rácspon, mint a csúcspontok.

A tétel egyik fele, hogy t. i. ha van a Π rácsparallelogrammán vagy határán más rácspon is, akkor Π területe az egységnél nagyobb, könnyen belátható.² Ebben az esetben ugyanis

¹ FELIX KLEIN: Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Göttingen 1896. p. 6.

² Ennek bizonyítását kívánta Társulatunk idején matematikai tanulmányversenyének II. feladata, I. e kötet 571. o.

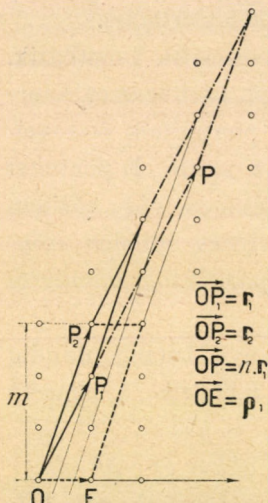
található Π területénél kisebb területű rácsparallelogramma is, tehát Π területe nem lehet a legkisebb pozitív egész szám.

A tétel másik felére azonban az irodalomban nem találtam elemi geometriai bizonyítást³ s ez indított a következő bizonyításom közlésére.

I.

Legyen tehát Π olyan rácsparallelogramma, melynek sem belsejében, sem határán nincs más rácspon, csak a csúspontok. Π egyik csúspontját válasszuk a koordinátarendszer kezdőpontjának. Π -t meghatározza az e csúsból kiinduló két oldala, az r_1 és r_2 vektor. Az általánosság rovása nélkül föltehetjük, hogy⁴

$$0 \leq \text{ampl. } r_1 < \text{ampl. } r_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$



A rácspontokon áthaladó, r_1 -gyel, illetőleg r_2 -vel párhuzamos egyenesek a síkot Π -vel kongruens rácsparallelogrammákra osztják. Ezeken az egyeneseken a rácspon, $|r_1|$, illetőleg $|r_2|$ távolságra vannak egymástól, tehát minden $|r_1|$, illetőleg $|r_2|$ hosszúságú darabjukon egy rácspon van, ha csak az egyenesdarabnak végpontjai nem rácsponok.

Legyen Π' az $n \cdot r_1$ és r_2 által meghatározott rácsparallelogramma, ahol az n egész számot úgy válasszuk meg, hogy a Π' parallelogramma r_2 -vel párhuzamos oldalának meghosszabbítása az abszcisszatengelyt az egységpontban messe. Jelöljük az

³ KLEIN a tétel bizonyítására csak útmutatást közöl, gondolatának szabatos kifejtését a körben foglalt rácsponokra vonatkozó becslés alapján I. HILBERT—COHN-VOSSEN: Anschauliche Geometrie, Berlin 1932. p. 29—31.

⁴ Azért választjuk ezt az esetet, mert a számelméleti alkalmazásban csak ez fordul elő. De az olvasó a bizonyítás elolvasása után azonnal láthatja, hogy megfontolásaink az általános esetre is éppen úgy érvényesek, csupán megszövegezésük volna hosszadalmasabb.

(1, 0) végpontú egységvektort ϱ_1 -gyel. A ϱ_1 és r_2 által adott II'' rácsparallelogramma területe egyenlő II' területével, $n \cdot t$ -vel, ha t a II területét jelenti. Másfelől II'' területe m -mel egyenlő, ha m a II'' -nek a ϱ_1 -re merőleges magassága (az r_2 végpontjának ordinátája), tehát:

$$m = n \cdot t. \quad (*)$$

II'' oldalain nincs rácspon, belsejében pedig $(n-1)$ van, mert arra az r_2 -vel párhuzamos egyenessereg $(n-1)$ elemének éppen $|r_2|$ hosszúságú darabja esik és minden ilyen darabon egy rácspon van.

De a II'' belső rácsponjainak a számát a ϱ_1 -gyel párhuzamos metszetekből is megállapíthatjuk. A ϱ_1 -gyel párhuzamos minden olyan egyenesnek, melynek ordinátája m -nél kisebb, pozitív egész szám, egységnyi hosszúságú darabja van a II'' -ben és egységnyi távolságra vannak egymástól a rácsponjai is. Tehát mindegyiken egy rácspon van II'' -ben és így II'' belső rácsponjainak száma $(m-1)$.

E szerint $m = n$, tehát $(*)$ alapján $t = 1$.

Megjegyzem még, további részletezés nélkül, hogy e bizonyításból csekély kiegészítéssel az is következik, hogy amely rácsparallelogramma belsejében és az őt meghatározó két vektoron a csúcspontokon kívül p rácspon van, annak területe $p+1$.

II.

Legyen adva az

$$ay - bx = 1, \quad (1)$$

diophantosi egyenlet, melyben a és b adott, x és y meghatározandó nemnegatív, egész számot jelent.

Az egyenlet megoldásának kapcsolatát a rácsparallelogrammákra vonatkozó kérdéssel az adja meg, hogy ha r_1 -gyel jelöljük az (a, b) , r -rel az (x, y) összetevőjű vektort és $\text{ampl. } r > \text{ampl. } r_1$, akkor az r_1 és r vektor által meghatározott rácsparallelogramma területe:

$$ay - bx.$$

Az egyenlet megoldása végett tehát az adott r_1 vektorhoz olyan r vektort kell keresnünk, hogy az r_1 és r által meghatá-

rozott rácsparallelogrammán ne legyenek rácsponatok. Ez csak akkor lehetséges, ha a és b relatív törzsszám, mert különben a parallelogramma r_1 oldalán is van már rácsponat.

Ha azonban a és b relatív törzsszám, akkor valóban van megoldás. Legyen u. i. (x, y) az a rácsponat, mely az r_1 vektor és az Y -tengely egységvektora által meghatározott parallelogrammában az r_1 vektorhoz a legközelebb van. Az ebbe a pontba irányuló r vektoron nincs rácsponat, mert hiszen végpontja az r_1 -hez legközelebbi rácsponat. Továbbá a rajta áthaladó, r_1 -gyel párhuzamos egyenes a párhuzamosok seregében az r_1 egyenesével szomszédos, tehát nincs rácsponat e parallelogramma belsejében és nincs másik két oldalán sem. E szerint a rácsparallelogramma területe 1, tehát x, y megoldása az (1) egyenletnek.

Tekintsük mármost az r_1 és $r + kr_1$ vektor által adott parallelogrammát, ahol k tetszésszerű egész szám. Ennek területe nyilván megegyezik az r_1, r vektor által meghatározott rácsparallelogramma területével, tehát $x + ka, y + kb$ is megoldása (1)-nek. Más megoldása nincs is, mert bármely más (egész számú összetevőjű) vektor végpontja az r_1 egyenesétől messzebb van, mint r végpontja és így r_1 -gyel olyan parallelogrammát ad, amelyben az r -nek, vagy valamilyen egész számú k -ra az $r + kr_1$ vektornak a végpontja benne van.

Ezzel a rácsparallelogrammára ismertetett tételünkben bizonyítottuk a következőket:

Az (1) egyenletnek csak akkor van megoldása, ha a és b relatív törzsszám. Ebben az esetben végtelen sok nemnegatív egész számú megoldás van. Ezek között van egy legkisebb gyökpár x, y melyre

$$0 \leq x < a, \quad 0 < y < b.$$

Az összes megoldásokat megadja az $x + ka, y + kb$ sorozat, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Befejezésül megjegyzem még, hogy az adott a, b értékpárhoz tartozó, legkisebb gyökpár megkeresésére⁵ gyakorlatilag is jól

⁵ Ami különben az $\frac{a}{b}$ számnak lánc tört-kifejtésével, vagy az euklidesi algoritmussal történhetik.

használható a fentiekből adódó grafikus módszer, hogy t. i. az a, b összetevőjű vektort négyzetes hálózattal beosztott papíron ábrázolva megkeressük az általa és a $0, 1$ összetevőjű vektor által alkotott paralelogrammában az (a, b) vektorhoz legközelebb eső rácsponatot.

Veress Pál.

GRAPHISCHE LÖSUNG VON DIOPHANTISCHEN GLEICHUNGEN.

Es wird durch einfache elementargeometrische Überlegungen folgender bekannte Satz bewiesen:

Ein Gitterparallelogramm⁶ hat dann und nur dann einen Flächeninhalt gleich 1, wenn auf dem Gitterparallelogramm (Begrenzung mit inbegriffen) ausser seinen Eckpunkten keine weiteren Gitterpunkte vorhanden sind.

Aus diesem Satz werden die bekannten Sätze über die diophantische Gleichung

$$ay - bx = 1$$

auf geometrischem Wege hergeleitet und eine graphische Methode zur Auffindung der Grundlösung⁷ von dieser Gleichung angegeben.

Paul Veress.

⁶ Das ist ein Parallelogramm, dessen Eckpunkte Gitterpunkte, d. h. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, sind.

⁷ D. h. die kleinste nichtnegative, ganzzahlige Lösung.

A RÁCSPARALLELOGRAMMÁKRÓL.

Rácspontok a sík azon pontjai, melyeknek derékszögű koordinátái egészszámok. Ha egy paralelogramma szögpontjai rács-pontok, *rácsparallelogrammának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy két pont egymáshoz *homológ*, ha megfelelő koordinátáik különbségei egészszámok. Ismeretes a következő tétel:

Ha egy rácsparallelogramma sem belsejében, sem határán — a szögpontjain kívül — nem tartalmaz rácspontot, akkor területe 1.

A tételt határátmeneti megfontolással szokás bizonyítani. Elemi geometriai úton bizonyította VERESS P.¹ A következőkben egy újabb elemi geometriai bizonyítást adunk. Bizonyításunkat a paralelogramma és az egységnégyszet egybevágó idomokra való felbontásával végezzük. A gondolatmenet hasonló ahhoz, mellyel a szerző egy MINKOWSKI-féle tételre egyszerű bizonyítást adott.²

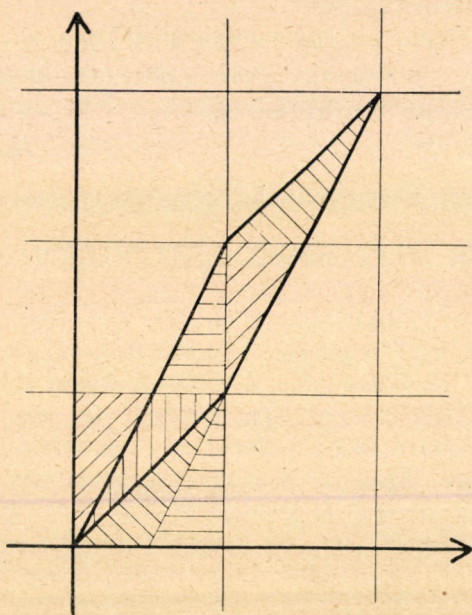
Alkalmazzuk a tétel kirovásainak eleget tevő Π paralelogrammára mindazon eltolásokat, amelyek a pontokat homológjaikba viszik át. Így mindmegannyi újabb rácsparallelogrammát nyerünk és pedig mindazokat, amelyek Π -ből eltolással keletkeznek. Ezek a síkot egyszeresen beborítják; ez a Π -ből felépített síkbálózat szemlélete alapján világos.

Π rendelkezik a következő két tulajdonsággal: *a)* A sík bármely P' pontjához található Π -nek egy P' -höz homológ P pontja. Ugyanis az az eltolás, amely a P' -t tartalmazó s az említett

¹ VERESS P.: Diophantikus egyenletek grafikus megoldása. Mat. és fiz. lapok **48** (1941), 393—397.

² G. HAJÓS: Ein neuer Beweis eines Satzes von Minkowski. Acta Litt. Sci. Szeged **6** (1934), 224—225.

hálózatban szereplő II' rácsparallelogrammát II -be viszi, P' -t a keresett P pontba viszi. $b)$ II -nek nincs két különböző s egymáshoz homológ belső P és P' pontja. Ugyanis különben P'



belső pontja volna egyrészt II -nek, másrészt az említett hálózat ama II' rácsparallelogrammjának is, amelyik a P -t a P' -be vivő eltolással II -ből keletkezik.

Állításunk bizonyításánál II -nek csak $a)$ és $b)$ tulajdonságát használjuk fel, tehát egyben azt is bizonyítjuk, hogy minden az $a)$ és $b)$ tulajdonsággal rendelkező síkidom területe 1.

Bontsuk fel a síkot a tengelyekkel párhuzamos s a rács-pontokon áthaladó egyenesekkel négyzetekre. E felbontás II -t részekre darabolja. Az ezen részeket tartalmazó négyzeteket (a bennük levő részekkel együtt) eltolással egyugyanazon rács-négyzetbe visszük. Az eltolt részek e rácsnégyzetet egyszeresen beborítják, mert a rácsnégyzet tetszőleges P' pontját lefedi (az eltolás után) az a rész, amely II -nek $a)$ szerint létező P' -höz homológ P pontját tartalmazza, közös belső pontjuk pedig az

eltolt részeknek *b)* miatt nem lehet. Tehát a részek területének összege, vagyis Π területe, 1-el egyenlő.

A szereplő fogalmak kézenfekvő általánosításával a következő tétel bizonyításához jutunk:

Ha az n -méretű tér egy rácsparallelotopja sem belsejében, sem határán — a csúcsain kívül — nem tartalmaz rácspontot, akkor tartalmának mérőszáma 1.

Hajós György.

ÜBER GITTERPARALLELOGRAMMEN.

Mit Hilfe der Methode, womit Verfasser einen Satz von MINKOWSKI bewiesen hat,² wird folgender bekannter Satz elementargeometrisch bewiesen: Ein Parallelogramm der Ebene, dessen Eckpunkte ganzzahlige rechtwinklige Koordinaten besitzen, das aber — den Rand inbegriffen — keinen weiteren Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthält, ist vom Inhalt 1. Das Parallelogramm und ein Einheitsquadrat werden nämlich in kongruente Teile zerschnitten (siehe die Figur). Entsprechendes gilt für Parallelootope des n -dimensionalen Raumes.

G. Hajós.



A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIÁRÓL.

Bevezetés.

BOLYAI JÁNOS¹ megmutatta, hogy ha a háromszög oldalai a, b, c , ezekkel szemben lévő szögei pedig rendre λ, μ, ν , akkor (valamely r sugarú kör kerületét $\bigcirc(r)$ -rel jelölve)

$$\bigcirc(a) : \bigcirc(b) : \bigcirc(c) = \sin \lambda : \sin \mu : \sin \nu.^2 \quad (B)$$

Ez *abszolút geometriai* tétel, vagyis független az euklidesi párhuzamossági axioma igaz vagy nem igaz voltától. Bebizonyítását BOLYAI JÁNOS arra alapítja, hogy a *paraszférán* (amit röviden F -fel jelöl) az euklidesi geometria érvényes, ha egyenes alatt *paraciklust* (L -vonalat) értünk.³

A (B) alatti tételből RÉTHY MÓR⁴ szellemes okoskodásával

¹ JOHANNES BOLYAI de eadem: Appendix. Stientiam spatii absolute veram exhibens etc., Marosvásárhely 1832., főkép 25. §. Magyarul I. STÄCKEL PÁL: Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai, ford. RADOS IGNÁC, Budapest 1914., II. köt. 208. old., vagy Mat. és Fiz. Lapok VI. (1897.), 164–165. old.

² BOLYAI JÁNOS a kör kerületét azzal a *paraciklus*-ívvel (L -ívvel) állítja elő, melyet a körnek a *paraszférán* (F -en) való rektifikációja eredményez. Hogy ennek hossza valóban egyenlő a kör kerületével, abból következik, miszerint a paraciklus-ívnek a húrjához való viszonya 1-hez tart, midőn az ív 0-hoz konvergál. E tétel az Appendixben nincs bebizonyítva, de könnyen bebizonyítható elemileg, a hiperbolikus trigonometria felhasználása nélkül. Különbösen a kétféle rektifikáció eredményének egyenlőségére az alábbiakban nincs szükség, elegendő $\bigcirc(r)$ alatt a jelzett paraciklus-ívet érteni.

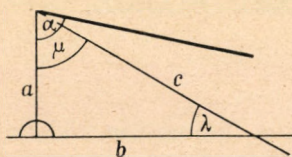
³ Az út, amelyen BOLYAI JÁNOS e klasszikus eredményhez jut (Appendix 1., 2., 4–12., 21. §.), valamivel megrövidíthető. V. ö. pl. R. BONOLATÓL a megfelelő szakaszt F. ENRIQUES: Fragen der Elementargeometrie, 2. Aufl., Leipzig — Berlin 1923, I. Teil 298–316 oldalain.

⁴ RÉTHY MÓR: Bolyai János «új, más világának» ismertetése, Mat. és Fiz. Lapok XII. (1903), főkép 15–16. old.

rögtön következik, hogy a derékszögű háromszögben, amennyiben $\nu = 90^\circ$, a λ, μ szögekre

$$\frac{\cos \lambda}{\sin \mu} = \frac{\mathcal{O}(2a)}{2\mathcal{O}(a)}, \quad (R)$$

tehát csak a -tól függ. Minthogy (Appendix 1. §.) rögzített a mellett $b \rightarrow \infty$ esetén $\lambda \rightarrow 0$, míg $\mu \rightarrow \alpha$ (1. ábra), ahol a az a távolságnak megfelelő ú. n. *elpattanási szög* (parallel-szög), ez (R) tételből folyólag



1. ábra.

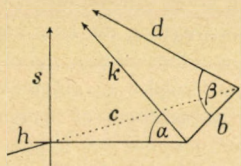
$$\frac{\cos \lambda}{\sin \mu} = \frac{1}{\sin a}.^5 \quad (I)$$

A *hiperbolikus geometriában*, ahol is az euklidesi párhuzamossági axioma helyett (amely szerint $\alpha = 90^\circ$) az *elpattanási axiómát* fogadjuk el (a többi axióma megtartásával), vagyis feltecsszük, hogy $\alpha < 90^\circ$, az a növekedtével a monoton fogy és minden 0° és 90° közti értéket felvesz. Tehát minden a hegyesszög meghatározott a távolsághoz tartozik, mint elpattanási szög; ezt az a -hoz tartozó *elpattanási távolságnak* nevezzük.⁶

⁵ BOLYAI JÁNOS¹, 27. §. Itt a bebizonyítás sokkal körülményesebb.

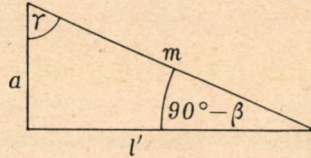
⁶ Az elpattanási távolság létezését a *folytonosságtól függetlenül* síkbelileg D. HILBERT bizonyította be: Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskischen Geometrie, Mathematische Annalen 57 (1903), főkép 140–144. old., vagy Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig und Berlin 1930., 164–168. old. Egyszerű *térbeli* bebizonyítás a következő.

Állítsunk az $\alpha = (h, k)$ csúcsában a síkjára merőlegesen valamely b egyenesdarabot (ábra), ennek végpontjából húzzuk a k -tól elpattanó d félegyenest, amelynek vetülete a (b, h) síkon c legyen. A (c, d) sík nem lehet merőleges (b, d) -re, mert akkor (b, d) és (b, h) metszésvonalára is merőleges volna, tehát $\beta = (b, d) \neq 90^\circ$ állana, az elpattanási axiómával ellentétben. Minthogy viszont a szerkesztésből folyólag $(b, d) \perp (h, k)$, azért (c, d) metszi a (h, k) síkot (Appendix 9. §.).



E síkok s metszésvonalára merőleges a mindkettőjükre merőlegesen álló (b, h) síkra, tehát $s \perp h$. De s elpattan d -től és k -től, lévén ezeken átmenő síkok metszése. E szerint s az α szög h szárából a keresett a távolságot vágja le. Qu. e. d.

N. I. LOBACSEVSZKIJ⁷ bebizonyította, hogy minden derékszögű háromszöghöz, amelynek alkatrészei a, b, c, λ, μ (1. ábra.), tartozik oly derékszögű háromszög, amelynek alkatrészei $a, l', m, 90^\circ - \beta, \gamma$ (2. ábra), ahol l' a $90^\circ - \lambda$, m pedig a μ szögnek megfelelő elpattanási távolság, β és γ rendre a b, c távolságokhoz tartozó elpattanási szögek. Erre a (I) tételt alkalmazva, nyerjük, miszerint



2. ábra.

$$\sin a \sin \beta = \sin \gamma, \quad (\text{II})$$

illetve

$$\cos \lambda = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}. \quad (\text{III})$$

(I)-ből (II) és (III) alapján

$$\sin \mu = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} \quad (\text{IV})$$

s ezt a μ szögre alkalmazott (III) alatti képlettel összevetve, (II)-re tekintettel adódik

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} a \cos \beta. \quad (\text{V})$$

Végül (I)-ből és a β elpattanási szögre vonatkozó hasonló képletből (II) felhasználásával előáll

$$\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu = \sin \gamma. \quad (\text{VI})$$

(I)—(VI) a derékszögű háromszög mondhatnók *hiperbolikus szögtrigonometriájának* LOBACSEVSZKIJ-féle alapképletei,⁸ a két

⁷ N. I. LOBATSCHESKIJ: Über die Anfangsgründe der Geometrie, Kasaner Bote 1829/30, oroszról fordította F. ENGEL, főkép 12. §., lásd F. ENGEL—P. STÄCKEL: Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie I., Leipzig 1898, 18—19. old. Az itt található egyszerű bebizonyítás térbeli. *Sikbelileg* bizonyította be a tételt H. LIEBMANN: Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie, Mathematische Annalen 61 (1905), főkép 186—190. old., vagy ugyanattól: Nichteuklidische Geometrie, 2. Aufl., Berlin und Leipzig 1912., 37—40. old.

⁸ N. I. LOBATSCHESKIJ⁷, 13. §., (14). A (I) képletből való fenti előállításukat l. ugyanattól: Pangéométrie etc., Kasan 1856., Oeuvres II. 626, 633—634. old., németül H. LIEBMANNTól Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 130, 17., 25. old.

szög és a három oldalnak megfelelő elpattanási szögek közül három-három között fennálló egyenletek.

Az alábbiakban e képletekből előállítván az általános háromszög hiperbolikus szög-trigonometriája alapképleteit, az alábbi (1)–(4) egyenleteket,⁹ a (2) egyenlet alapján bebizonyítjuk az elpattanási szögnek a távolsággal való változását leíró klasszikus (5) képletet.¹⁰ Az ennek alapján (1)–(4)-ből folyó (1*)–(4*) képletek a hiperbolikus trigonometria általános alapegyenletei, amelyek a háromszög hat alkotórésze közül négy-négy között állapítanak meg összefüggést.

Azt hisszük, ezzel különösen egyszerű és természetes utat mutatunk be a hiperbolikus trigonometriának a BOLYAI JÁNOS ÉS LOBACSEVSKIJ által megvetett *térgeometriai* alapon való előállítására.¹¹ Ez történeti és módszertani szempontból talán nem érdektelen.

⁹ LOBATSCHESKIJ⁷, 13. §., (17). Ezek levezetését LOBACSEVSKIJ csak később közölte: *Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien.*, Kasaner Gelehrte Schriften 1835–1837, orosz-ból ford. F. ENGEL, lásd F. ENGEL—P. STÄCKEL i. m. 223–225. old. Itt az elpattanási szög alábbi képlete is fel van használva.

¹⁰ BOLYAI JÁNOS¹, 29. §., LOBATSCHESKIJ⁷, 12. §., (12). E képletnek BOLYAI JÁNOSTól való klasszikus bebizonyítását közlő modern könyv G. FANO: *Geometria non euclidea*, Bologna 1935., 1. 60–62. old.

¹¹ A BOLYAI—LOBACSEVSKIJ-féle alapon egészen másképp állítja elő az (5) képletet s ezzel lényegében a hiperbolikus trigonometriát F. ENGEL: *Zur nichteuklidischen Geometrie*, Leipziger Berichte 50 (1898), főkép 187–190. old. Alapjában véve ugyanazzal a meg gondolással él KÜRSCHÁK JÓZSEF: *A parallelszögről*, Mat. és Fiz. Lapok XII. (1903), 50–52. old.

A hiperbolikus trigonometriát *síkbelileg* elsőnek állította elő H. LIEBMAN: *Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie*, Leipziger Berichte 59 (1907), 187–210. old. Más módszert követ pl. W. H. YOUNG: *On the Analytical Basis of Non-Euclidian Geometry*, American Journal of Mathematics XXXIII. (1911), 249–286. old. Mig H. LIEBMAN páraciklusokkal dolgozik, W. H. YOUNG a hiperbolikus geometriából csak annyit használ fel, hogy a háromszög szögeinek összege $< 180^\circ$. Megjegyezzük, hogy ha BOLYAI JÁNOS (B) alatti sinus-tételét DE LA VALLÉE POUSSIN: *Sur la géométrie non-euclidienne*, Mathesis, Gand (2), 5 (1895), Suppl. V, 6–15. old. nyomán *síkbelileg* bizonyítjuk be, akkor RÉTHY MÓR meg gondolásaival (i. h. 16–18. old.) a hiperbolikus trigonometriának ismét más *síkbeli* előállításához juthatunk, amely szintén csak az említett szögössze gztételt használja fel.

1. §.

Az általános háromszög hiperbolikus szögtrigonometriája.

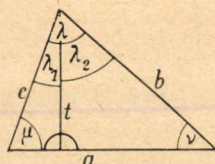
A háromszöget két derékszögű háromszög összegére vagy különbségére bontva fel, a fenti (IV) tételből rögtön következik, miszerint

$$\sin \lambda : \sin \mu = \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} a. \quad (1)$$

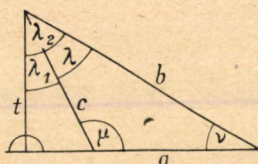
Ez a háromszög két szöge és a velük szemben fekvő oldalaknak megfelelő elpattanási szögek között fennálló egyenlet.

Most előállítjuk a λ , μ , ν szögek és az egyik, mondjuk a c oldalnak megfelelő γ elpattanási szög közti egyenletet.

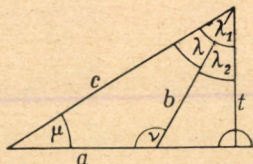
Jelöljük az a oldalhoz tartozó magasságot t -vel s ossza ez a λ szöget a λ_1 és λ_2 részekre (3a., 3b., 3c. ábra), ahol is $\lambda_1 \geq 0$



3 a. ábra.



3 b. ábra.



3 c. ábra.

a szerint, amint $\mu \leq 90^\circ$ és $\lambda_2 \geq 0$ a szerint, amint $\nu \leq 90^\circ$. A

(I) tétel szerint (a t -hez tartozó elpattanási szöget τ -val jelölve) $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$ folytán

$$\cos \nu = \frac{\sin \lambda_2}{\sin \tau} = \frac{\sin \lambda \cos \lambda_1 - \cos \lambda \sin \lambda_1}{\sin \tau}$$

s mivel ugyancsak (I) értelmében

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \tau} = \cos \mu,$$

(III) szerint pedig

$$\cos \lambda_1 = \frac{\cos \tau}{\cos \gamma},$$

innen

$$\cos \nu = -\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \tau} \frac{1}{\sin \gamma}.$$

De a (IV) tétel értelmében

$$\sin \mu = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \tau},$$

tehát végül nyerjük, hogy

$$\cos \nu = -\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu \frac{1}{\sin \gamma}. \quad (2)$$

A λ, ν szögek és az egyiket, például a λ -t bezáró b, c oldalaknak megfelelő β, γ elpattanási szögek között fennálló egyenlethez mostmár kiküszöbölés útján juthatunk.

Nevezetesen $\cos \mu$ és $\sin \mu$ értékét a λ, μ, ν, β , ill. a μ, ν, β, γ közti, (2)-höz, ill. (1)-hez hasonló egyenletekből (2) alatt behelyettesítve

$$\cos \nu = \cos \nu \cos^2 \lambda - \sin \nu \sin \lambda \cos \lambda \frac{1}{\sin \beta} + \frac{\sin \lambda \sin \nu}{\cos \gamma \operatorname{tg} \beta},$$

honnan

$$\sin \beta \sin \lambda \operatorname{ctg} \nu = -\cos \lambda + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}. \quad (3)$$

Végül az egyik szög, mondjuk ν , és az a, b, c oldalaknak megfelelő α, β, γ elpattanási szögek közti egyenlet a következő kiküszöböléssel nyerhető.

(3)-at $\sin \lambda$ -val végigszorozva $\sin \lambda \operatorname{ctg} \lambda$ és $\sin \lambda$ értékét a $\nu, \lambda, \beta, \alpha$, ill. a $\lambda, \nu, \alpha, \gamma$ között fennálló, (3)-hoz, ill. (1)-hez hasonló egyenletekből behelyettesítve

$$\sin \beta \operatorname{ctg} \nu = \frac{\operatorname{ctg} \nu}{\sin \beta} - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sin \nu \cos \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \beta}{\sin \nu} \frac{1}{\sin \gamma},$$

honnan

$$\frac{1}{\sin \gamma} = \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} - \frac{\cos \nu}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (4)$$

A derékszögű háromszögre vonatkozó (I)–(VI) képletek ez általános képleteknek speciális esetei.

2. §.

Az elpattanási szög változása a távolsággal.

Az a_1, a_2 és $a = a_1 + a_2$ távolságoknak megfelelő $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ elpattanási szögek között fennálló klasszikus egyenlethez¹² mostmár igen egyszerűen juthatunk.

¹² LOBATSCHESKI⁷, 12. §., (11).

A 4. ábrán a (2) tétel értelmében

$$\cos \lambda = -\cos \mu \cos \nu + \sin \mu \sin \nu \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Ha mármost $t \rightarrow \infty$, akkor itt $\lambda_1 \rightarrow 0$ és $\lambda_2 \rightarrow 0$, tehát $\lambda \rightarrow 0$, továbbá $\mu \rightarrow \alpha_1$ és $\nu \rightarrow \alpha_2$ (Appendix 1. §.). Ennélfogva ebből

$$1 = -\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{1}{\sin \alpha},$$

honnan a félszögek tangenseinek bevezetésével adódik

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{2}.$$

Ez $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ -re másodfokú egyenlet, amelynek gyökei nyilván $\operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{2}$ és $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}$. Minthogy azonban $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ hegyesszögek lévén, $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} > 1$ viszont $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} < 1$, azért a második gyök nem felel meg s így a kívánt egyenlet

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{2}.$$

De α az a távolságnak folytonos függvénye, minthogy növekedő a mellett monoton fogy s minden 0° és 90° közti értéket felvesz, tehát $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ is folytonos függvénye a -nak. Ennélfogva e függvényegyenletből következik,¹³ miszerint

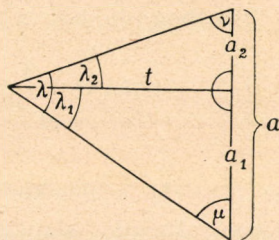
$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = e^{\frac{a}{k}}, \quad (5)$$

ahol k azt a távolságot jelenti, amelynél a megfelelő α elpattanási szögre

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = e.$$

(E k távolság a hiperbolikus geometria ú. n. *paramétere*, a *természetes hosszegység*.)

¹³ A. L. CAUCHY: Analyse algébrique, Paris 1821., Ch. V., §. I., problème II., Œuvres II^e série, t. III., 100–102. old.



4. ábra.

Minthogy (5)-ből (a hiperbolás függvényekkel kifejezve)

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a}{k}}, \quad \cos \alpha = \operatorname{th} \frac{a}{k}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{a}{k}},$$

az (1)–(4) képletekből folynak a hiperbolikus trigonometria ismert általános alapegyenletei, nevezetesen (1)-ből a *sinus-tétel*

$$\sin \lambda : \sin \mu = \operatorname{sh} \frac{a}{k} : \operatorname{sh} \frac{b}{k}, \quad (1^*)$$

(2)-ből a *második cosinus-tétel*

$$\cos \nu = -\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu \operatorname{ch} \frac{c}{k}, \quad (2^*)$$

(3)-ből a *cotangens-tétel*

$$\sin \lambda \operatorname{ctg} \nu = -\cos \lambda \operatorname{ch} \frac{b}{k} + \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{cth} \frac{c}{k}, \quad (3^*)$$

(4)-ből az *első cosinus-tétel*

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{ch} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k} - \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k} \cos \nu. \quad (4^*)$$

Szász Pál.

ÜBER DIE HYPERBOLISCHE TRIGONOMETRIE.

Ausgegangen von dem absoluten Sinussatz JOHANN BOLYAI's,¹ werden unter Benützung der einander zugeordneten rechtwinkligen Dreiecke von LOBATSCHESKI² zunächst die vier bekannten Grundformeln³ der hyperbolischen *Winkeltrigonometrie* hergeleitet, nämlich die Formeln (1)–(4) im Texte, wobei λ , μ , ν die Winkel des

¹ J. BOLYAI: Appendix etc. § 25., siehe F. ENGEL—P. STÄCKEL: Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie II., Leipzig und Berlin 1913., S. 194.

² N. I. LOBATSCHESKI: Über die Anfangsgründe der Geometrie, übers. von F. ENGEL, § 12., siehe F. ENGEL—P. STÄCKEL¹ I., Leipzig 1898., S. 18—19.

³ Vergl.² § 13., Form. (17).

Dreiecks und α, β, γ den gegenüberliegenden Seiten a, b, c entsprechende Parallelwinkel sind. Aus der Formel

$$\cos \lambda = -\cos \mu \cos \nu + \sin \mu \sin \nu \frac{1}{\sin \alpha}$$

wird dann durch den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ an der Abbildung 4., die Funktionalgleichung⁴

$$\operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \operatorname{ctg} \frac{a_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{a_2}{2} \\ (a = a_1 + a_2)$$

gewonnen (wobei den Abständen $a_1, a_2, a = a_1 + a_2$ der Reihe nach die Parallelwinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ entsprechen), woraus sich die klassische Formel⁵

$$\operatorname{ctg} \frac{a}{2} = e^{\frac{a}{k}}$$

ergibt.

Dieser Weg zur Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie auf der von BOLYAI und LOBATSCHESKIJ geschaffenen *raumgeometrischen* Grundlage, scheint äusserst einfach und natürlich zu sein.⁶

Paul v. Szász.

⁴ Vergl.² § 12., Form. (11).

⁵ Vergl. J. BOLYAI¹ § 29., resp. N. I. LOBATSCHESKIJ² § 12., Form. (12). Der Beweis von J. BOLYAI wird im modernen Buche von G. Fano: *Geometria non euclidea*, Bologna 1935., S. 60—62 wiedergegeben.

⁶ Einen ganz anderen Weg zur raumgeometrischen Herleitung der obigen Formel des Parallelwinkels hat F. ENGEL eingeschlagen. Siehe von ihm: *Zur nichteuklidischen Geometrie*, Leipziger Berichte 50 (1898), insb. S. 187—190.

A FOURIER-SOR CESÀRO-KÖZEPEIVEL VALÓ APPROXIMÁCIÓ NAGYSÁGRENDJÉRŐL.

Bevezetés.

Legyen $f(x)$ egy 2π szerint periodikus függvény. Ennek

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Fourier-sorát röviden $\mathfrak{S}(f)$ -el jelöljük. Jelentse $\sigma_n^{(\delta)}(x)$ az $\mathfrak{S}(f)$ sor n -ik δ -adrendű Cesàro-közepét (röviden (C, δ) -közepét), vagyis legyen

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(\delta)}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n-k+\delta-1}{n-k}}{\binom{n+\delta}{n}} \sigma_k^{(0)}(x) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n-k+\delta}{n-k}}{\binom{n+\delta}{n}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \end{aligned}$$

A Fourier-sor (C, δ) -közepeivel való approximáció nagyságrendjén a

$$\varrho_n^{(\delta)} = \max |f(x) - \sigma_n^{(\delta)}(x)|$$

kifejezés nagyságrendjét értjük. A megközelítés jósága attól függ, milyen rendben válik a $\varrho_n^{(\delta)}$ mennyiség n növekedtével zérussá. Ez a kérdés gyakorlati szempontból is fontos, mert Taylor-sorba nem fejthető periodikus függvények effektív előállítására szinte csak a Fourier-sor első tagjait használhatjuk fel; lényeges tehát az ilyen módon elkövetett hiba megbecslése. E kérdés tekintetében alapvető SERGE BERNSTEIN¹ következő tétele:

¹ S. BERNSTEIN, Mém. Acad. Belg. (2) **4**, 1912, 1—104. l.

Ha a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény mindenütt eleget tesz az

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h^a} \right| \leq K \quad (1)$$

α -ad rendű Lipschitz-feltételnek, akkor

$$\varrho_n^{(1)} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad (0 < \alpha < 1)$$

illetőleg

$$\varrho_n^{(1)} = O\left(\frac{\log n}{n}\right). \quad (\alpha=1)$$

Megfordítva, ha $0 < \alpha < 1$ és $\varrho_n^{(1)} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, akkor $f(x)$ egy α -ad-rendű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, de ha $\varrho_n^{(1)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, akkor ebből a megközelítési rendből $f(x)$ folytonossági viszonyai tekintetében csak az $|f(x+h) - f(x)| \leq K|h| \log \frac{1}{|h|}$ relációra lehet következtetni.

Az $\alpha = 1$ eset tehát kritikusnak mondható, holott annyiban épp ez az eset a legfontosabb, amennyiben a differencia-hányados korlátosságát köti ki, tehát a függvény differenciálhatósági viszonyait jellemző esetet ölel fel. Mégsem lehetséges $\varrho_n^{(1)}$ -re a $\log n/n$ nagyságrendnél jobb megbecslést adni, mint az például az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi x}{4}, & (0 \leq x \leq \pi) \\ \frac{\pi x}{4} - \frac{3\pi^2}{8}, & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$$

függvény esetében látható. Ennek Fourier-sora ugyanis a

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2} + \dots$$

sor, ennél pedig az $x=0$ pontban a $(2n-1)$ -ik $(G, 1)$ -közepekkel való approximáció nagyságrendje alulról a következő módon becsülhető meg:

$$|f(0) - \sigma_{2n-1}^{(1)}(0)| = \sum_{k=1}^n \left[1 - \left(1 - \frac{2k-1}{2n} \right) \right] \cdot \frac{1}{(2k-1)^2} + \\ + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} > \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} > \frac{\log(2n+1)}{4n},$$

vagyis a $(C, 1)$ -közepek valóban elérik a $\log n/n$ nagyságrendet.

A következőkben az approximáció nagyságrendjének ezzel a szingularitásával foglalkozunk és megmutatjuk, hogy ez a szinguláris viselkedés az $\mathfrak{S}(f)$ Fourier-sor konjugáltjának viselkedésével világítható meg. Jelöljük röviden $\bar{\mathfrak{S}}(f)$ -el $\mathfrak{S}(f)$ konjugált sorát, vagyis a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

sor. Legyen $\bar{\sigma}_n^{(\delta)}(x)$ ennek a sornak az n -ik (C, δ) -közepe. Ha $f(x)$ egy Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor $\bar{\mathfrak{S}}(f)$ is Fourier-sor, még pedig — mint ismeretes — az

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt$$

függvény Fourier-sora. Legyen

$$\bar{\varrho}_n^{(\delta)} = \max |\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\delta)}(x)|.$$

Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

Ha a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény mindenütt eleget tesz egy Lipschitz-feltételnek ($\alpha=1$), akkor minden $\delta > 0$ mellett

$$\bar{\varrho}_n^{(\delta)} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ez az eredmény első pillantásra meglepőnek látszik, mert ha $\alpha=1$, akkor az $f(x)$ -re vonatkozó Lipschitz-feltételből még egyáltalában nem következik, hogy $\bar{f}(x)$ is egy $\alpha=1$ kitevőjű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, hanem csak azt lehet állítani,²

² A. ZYGMUND, Trigonometrical Series (Warszawa—Lwów, 1935), 157. l. A következőkben ezt a gyakran idézett művet «T. S.»-el fogjuk jelölni.

hogy $|\bar{f}(x+h) - \bar{f}(x)| \leq K|h| \log \frac{1}{|h|}$. Előállhat tehát az az eset, hogy a Lipschitz-feltételnek eleget tevő $f(x)$ függvény Fourier-sorának (C, δ) -közepei rosszabbul konvergálnak $f(x)$ -hez, mint a Lipschitz-feltételnek eleget nem tevő $f(x)$ -hez konjugált $\bar{f}(x)$ függvény Fourier-sorának (C, δ) -közepei $\bar{f}(x)$ -hez. Ez a jelenség abban leli magyarázatát, hogy $f(x)$ deriváltjának Fourier-sora az a sor, amelyet $\mathfrak{S}(f)$ konjugált sorából $\mathfrak{S}(f)$ -ből nyerünk oly módon, hogy $\mathfrak{S}(f)$ -nek az n -ik tagját megszorozzuk n -el ($n=1, 2, \dots$). Ennek az $\mathfrak{S}(f)$ -el való összefüggésnek eredménye az a jelenség, hogy egy $f(x)$ -re vonatkozó differenciálhatósági feltételre elsősorban nem maga az $\mathfrak{S}(f)$ Fourier-sor, hanem annak konjugált sora reagál. Még inkább rávilágít erre az összefüggésre tételünk megfordítása, amely azt mutatja, hogy a $\bar{q}_n^{(\delta)}$ -ra nyert megbecslés egyúttal jellemző is $f(x)$ folytonossági viszonyaira; tételünk ugyanis a következő módon fordítható meg:

Ha minden $\delta \geq 1$ mellett $\bar{q}_n^{(\delta)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, akkor ebből a tényből már következik, hogy $f(x)$ egy $a=1$ kitevőjű Lipschitz-feltételnek tesz eleget.

1. Egy numerikus sorokra vonatkozó tétel.

Tekintsük a reális tagú

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2)$$

sort, amelynek n -ik (C, δ) -közepét $\sigma_n^{(\delta)}$ -val fogjuk jelölni. Nevezük az

$$\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} + \dots \quad (3)$$

sort egyszerűség kedvéért (2) koordinált sorának. $S_n^{(\delta)}$ -val jelöljük a (3) sor n -ik (C, δ) közepét.

I. Ha $\delta > 0$ és $\sigma_n^{(\delta)} = O(1)$, akkor $S_n^{(\delta)}$ egy véges S értékhez tart és pedig

$$|S - S_n^{(\delta)}| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Tételünket bebizonyítottuk, ha kimutatjuk, hogy

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (S_k^{(\delta)} - S_{k-1}^{(\delta)}) = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad (4)$$

(4)-ből ugyanis már következik, hogy az

$$S_n^{(\delta)} = S_1^{(\delta)} + \sum_{k=2}^n (S_k^{(\delta)} - S_{k-1}^{(\delta)})$$

sorozat egy véges S értékhez tart, aminek további következménye, hogy

$$S - S_n^{(\delta)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} (S_k^{(\delta)} - S_{k-1}^{(\delta)}),$$

vagyis (4) valóban aequivalens állításunkkal. Vegyük mindenekelőtt figyelembe, hogy

$$\begin{aligned} S_n^{(\delta)} - S_{n-1}^{(\delta)} &= \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n-k+\delta}{n-k}}{\binom{n+\delta}{n}} \cdot \frac{u_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n-1-k+\delta}{n-1-k}}{\binom{n-1+\delta}{n-1}} \cdot \frac{u_k}{k} = \\ &= \frac{u_n}{n \frac{n+\delta}{\delta} \binom{n+\delta-1}{n}} + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\binom{n-k+\delta-1}{n-k} \frac{n-k+\delta}{\delta}}{\binom{n+\delta-1}{n} \frac{n+\delta}{\delta}} - \frac{\binom{n-k+\delta-1}{n-k} \frac{n-k}{\delta}}{\binom{n+\delta-1}{n} \frac{n}{\delta}} \right\} \frac{u_k}{k} = \\ &= \frac{\delta}{n(n+\delta)} \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n-k+\delta-1}{n-k}}{\binom{n+\delta-1}{n}} u_k = \frac{\delta}{n(n+\delta)} \sigma_n^{(\delta-1)}. \end{aligned}$$

Ennek alapján egy Abel-transzformációval a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (S_k^{(\delta)} - S_{k-1}^{(\delta)}) \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{k(k+\delta)} - \frac{\delta}{(k+1)(k+1+\delta)} \right) \left| \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^{(\delta-1)} \right| + \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta}{k(k+\delta)} \left| \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^{(\delta-1)} \right| \end{aligned} \quad (5)$$

megbecsléshez jutunk. Nyilván

$$\frac{\delta}{k+\delta} \left| \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^{(\delta-1)} \right| \leq \frac{\delta(k+1)}{k+\delta} \cdot \frac{1}{k+1} \left| \sum_{i=1}^k \sigma_i^{(\delta-1)} \right| + \\ + \frac{\delta(n+1)}{k+\delta} \cdot \frac{1}{n+1} \left| \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(\delta-1)} \right|.$$

Ha tehát figyelembe vesszük, hogy HAUSDORFF³ egy tétele szerint a $(C, 1)$ közepek alkalmazása a $(C, \delta-1)$ -közpekre a (C, δ) -közpek közvetlen alkalmazásával egyenértékű művelet, vagyis hogy

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k \sigma_i^{(\delta-1)} = \sigma_k^{(\delta)} + o(1),$$

akkor az előbbi megbecslésből a

$$\frac{\delta}{k+\delta} \left| \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^{(\delta-1)} \right| = O(1) |\sigma_k^{(\delta)}| + O(1) |\sigma_n^{(\delta)}|$$

eredményt nyerjük. De feltevésünk szerint $\sigma_k^{(\delta)} = O(1)$, következőképp

$$\frac{\delta}{k+\delta} \left| \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^{(\delta-1)} \right| = O(1).$$

Ebből a relációból elsősorban

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta}{k(k+\delta)} \left| \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^{(\delta-1)} \right| = 0$$

következik, így azután (5)-ből a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (S_k^{(\delta)} - S_{k-1}^{(\delta)}) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right) \cdot \frac{\delta}{k+\delta} \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i^{(\delta-1)} \right| = \\ = \sum_{i=n+2}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

végeredményre jutunk, amivel állításunkat beigazoltuk.

³ F. HAUSDORFF, Math. Zeitschr. 9 (1921), 74—109. 1.

Megjegyzés. Ha $|\sigma_n^{(1)}| \leq K$, akkor az $O\left(\frac{1}{n}\right)$ nagyságrend pontosabban is meghatározható a következő módon:

$$\text{Ha } |\sigma_n^{(1)}| \leq K, \text{ akkor } |S - S_n^{(1)}| < \frac{4K}{n}.$$

Ez esetben ugyanis (5) az

$$S_n^{(1)} - S_{n-1}^{(1)} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{u_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{u_k}{k} = \frac{\sigma_n^{(0)}}{n(n+1)}$$

összefüggés figyelembe vételével ebben az alakban írható:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (S_k^{(1)} - S_{k-1}^{(1)}) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} \left| \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^{(0)} \right| + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k(k+1)} \left| \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^{(0)} \right|. \end{aligned}$$

De ha $|\sigma_n^{(1)}| \leq K$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} \left| \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^{(0)} \right| & \leq \frac{1}{k+1} \left| \sum_{i=1}^k \sigma_i^{(0)} \right| + \frac{n+1}{k+1} \cdot \frac{1}{n+1} \left| \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(0)} \right| \leq \\ & \leq |\sigma_k^{(1)}| + |\sigma_n^{(1)}| \leq 2K, \end{aligned}$$

tehát

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (S_k^{(1)} - S_{k-1}^{(1)}) \right| \leq 2K \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{k(k+2)} < \frac{4K}{n}.$$

Itt a 4-es faktor esetleg még valamelyest kisebbíthető, ennek azonban a következőkben már nincs jelentősége.

2. Konjugált trigonometriai sorok Cesàro-közepei.

Térjünk most át az $\mathfrak{S}(f)$, illetőleg $\overline{\mathfrak{S}}(f)$ konjugált trigonometrikus sorok (C, δ) -közepeinek $\varrho_n^{(\delta)}$, illetőleg $\bar{\varrho}_n^{(\delta)}$ approximációs nagyságrendjére. Bebizonyítjuk a bevezetésben elsőként említett tételünket:

II. Ha a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény mindenütt

eleget tesz egy $a=1$ kitevőjű Lipschitz-feltételnek, akkor minden $\delta > 0$ mellett

$$\bar{\sigma}_n^{(\phi)} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ha ugyanis $a=1$, akkor a Lipschitz-feltétel következtében — mint ismeretes — $f(x)$ teljesen folytonos függvény (= deriváltjának integrálja), vagyis $f(x)$ -nek majdnem mindenütt van $f'(x)$ deriváltja, amely a Lipschitz-feltétel folytán még korlátos is. Alkalmazhatjuk tehát az alábbi parciális integrációt, amely szerint

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx \, dx &= [f(x) \cos nx]_0^{2\pi} + \\ &+ \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = nb_n, \end{aligned}$$

illetőleg

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx \, dx = -na_n;$$

más szóval $-f'(x)$ Fourier-sora nem más, mint $\mathfrak{S}(f)$ formális deriváltja, vagyis a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx) \quad (6)$$

sor. Azonban ismeretes,⁴ hogy ha $|f'(x)|$ korlátos, akkor $f'(x)$ Fourier-sorának (C, δ) -közepei $\delta > 0$ esetén egyenletesen korlátosak. Alkalmazhatjuk tehát I. tételünket a (6) alatti sor koordinált sorára, ami, egy -1 faktortól eltekintve, nem más, mint $\bar{\mathfrak{S}}(f)$, következésképp az x helytől függetlenül fennáll az

$$|\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\phi)}(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

megbecslés, amivel állításunkat beigazoltuk.

Ami az $\mathfrak{S}(f)$ Fourier-sor (C, δ) -közepeit illeti, azok approximációjának nagyságrendjére nézve — mint azt láttuk — az $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ megbecslés nem javítható teljes általánosságban, mert

⁴ T. S. 48. l.

egyes pontokban az approximáció nagyságrendje a $\log n/n$ értéket el is érheti. Ezek a pontok azonban még a Lipschitz-feltételnél messzebbmenő feltételek mellett is csak egy nulla mértékű halmazt alkothatnak, mint az a következő tételünkből kiviláglik:

III. *Ha $f(x)$ teljesen folytonos függvény, akkor minden $\delta > 0$ mellett*

$$|f(x) - \sigma_n^{(\delta)}(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

legfeljebb egy nulla mértékű halmaz pontjai kivételével.

Ha ugyanis $f'(x)$ majdnem mindenütt létezik és $f(x)$ teljesen folytonos, akkor, mint azt az előbbi tételünk bizonyítása során igazoltuk,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx),$$

tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7)$$

trigonometrikus sor egy Fourier-sor konjugáltja, következésképp legfeljebb egy nulla mértékű halmaz kivételével minden $\delta > 0$ rendben (C, δ) -szummálható.⁵ Eszerint a (7) sor (C, δ) -közepi egy nulla mértékű halmaz elhagyása után a megmaradó halmaz minden x pontjában (az x ponttól függően) véges határok között maradnak. Pontonként alkalmazhatjuk tehát I. tételünket (7) koordinált sorára, ami nem más, mint $\mathfrak{S}(f)$, és akkor a maradék-halmaz minden pontjában, más szóval majdnem mindenütt az

$$|f(x) - \sigma_n^{(\delta)}(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

eredményt nyerjük.

IV. *Ha minden $\delta \geq 1$ mellett $\bar{\sigma}_n^{(\delta)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, akkor az $f(x)$ függvény $\alpha = 1$ kitevővel egy Lipschitz-feltételnek tesz eleget.*

Feltevésünkből következik ugyanis, hogy

$$|\bar{\sigma}_n^{(1)}(x) - \bar{\sigma}_n^{(2)}(x)| \leq |\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_n^{(1)}(x)| + |\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_n^{(2)}(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

⁵ T. S. 49. l.

Ha tehát $\bar{s}_n^{(1)}(x)$ -el jelöljük a (6) alatti sor n -ik $(C, 1)$ -közepét, akkor a

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_n^{(1)}(x) - \bar{\sigma}_n^{(2)}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \left(1 - \frac{k}{n+2}\right) \right] (b_k \cos kx - a_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) k (b_k \cos kx - a_k \sin kx) = \frac{\bar{s}_n^{(1)}(x)}{n+2} \end{aligned}$$

relációból az $\bar{s}_n^{(1)}(x) = O(1)$ eredményt nyerjük, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{s}_n^{(1)}(x)| = O(1). \quad (8)$$

Ebből a megállapításból pedig azzal kapcsolatban, hogy a (6) alatti sor együtthatói mindenestre teljesítik az $na_n = o(n)$, $nb_n = o(n)$ feltételeket, VERBLUNSKY⁶ egy tétele szerint az következik, hogy (6) Fourier-sor. Jelöljük $\varphi(x)$ -el azt a függvényt, amelynek (6) a Fourier sora. Tekintve, hogy

$$\int_0^x \varphi(t) dt = B + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \left(B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \right)$$

azért

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt + \frac{a_0}{2} - B.$$

Az $f(x)$ függvény tehát majdnem mindenütt deriválható és pedig legfeljebb egy nulla mértékű halmaz kivételével $f'(x) = \varphi(x)$, vagyis (6) nem más, mint $f'(x)$ Fourier-sora: $\mathfrak{S}(f')$. De ismeretes,⁷ hogy $\mathfrak{S}(f')$ aritmetikai közepei majdnem mindenütt $f'(x)$ -hez tartanak, ami (8)-al együtt egy olyan K állandó létezését biztosítja, amelyre nézve majdnem mindenütt fennáll az $|f'(x)| < K$ megbecsülés. Ez pedig más szóval épp azt jelenti, hogy elég kis $|h|$ mellett

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq K,$$

q. e. d.

⁶ T. S. 297. l.

⁷ T. S. 49. l.

V. Akkor és csakis akkor lehet minden $\delta > 0$ mellett $\varrho_n^{(\delta)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ és egyszersmind $\bar{\varrho}_n^{(\delta)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, ha $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ is egy $\alpha=1$ kitevőjű Lipschitz-feltételnek tesznek eleget.

Ha ugyanis $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ egy Lipschitz-feltételnek tesznek eleget ($\alpha=1$), akkor ezek Fourier-sorai az $\mathfrak{S}(f)$, illetőleg $\mathfrak{S}(\bar{f}) = \overline{\mathfrak{S}(f)}$ sorok és így II. tételünk alkalmazásával közvetlenül nyerjük a $\varrho_n^{(\delta)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ és $\bar{\varrho}_n^{(\delta)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ eredményt, vagyis a közölt feltevél szükséges. Ha viszont ez a két reláció minden $\delta > 0$ mellett teljesül, akkor nyilván $\mathfrak{S}(f)$ és $\overline{\mathfrak{S}(f)}$ konjugált Fourier-sorok és így IV. tételünk szerint $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ is egy Lipschitz-feltételnek tesznek eleget ($\alpha=1$); feltételünk tehát elégséges is.

Figyelembe véve azt a körülményt, hogy $\mathfrak{S}(f)$, illetőleg $\overline{\mathfrak{S}(f)}$ az

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (c_n = a_n - ib_n; z = re^{i\vartheta})$$

hatványsornak az egységkörön képezett reális, illetőleg imaginárius része, V. tételünket még a következő komplex alakban is megfogalmazhatjuk:

VI. Az egységkör belsejében reguláris $F(z)$ függvény deriváltja akkor és csakis akkor korlátos a zárt egységkörben, ha minden $\delta > 0$ mellett $\varrho_n^{(\delta)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ és egyúttal $\bar{\varrho}_n^{(\delta)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. Az aritmetikai közepekkel való approximáció nagyságrendje.

Gyakorlati szempontból legfontosabb a Fourier-sorból egyszerűen képezhető aritmetikai közepekkel való approximáció nagyságrendje. Lényeges tehát $\varrho_n^{(1)}$ -re olyan megbecslést találni, amely $\varrho_n^{(1)}$ -nek nemcsak nagyságrendjét, hanem számszerű felső korlátját is megadja. I. tételünkhöz fűzött megjegyzésünk segítségével II. tételünk bizonyításához teljesen hasonlóan adódik a következő eredmény:

VII. Ha $f(x)$ az (1) alatti Lipschitz-feltételnek tesz eleget ($\alpha=1$), akkor

$$\bar{\varrho}_n^{(1)} < \frac{4K}{n}.$$

Mivel azonban gyakorlati szempontból elsősorban maga a Fourier-sor, nem pedig annak konjugáltja jön számba, azért még $\varrho_n^{(1)}$ -et is meg kell becsülnünk. Ha meggondoljuk azt, hogy a gyakorlatban legtöbbször előforduló esetekben $\mathfrak{S}(f)$, illetőleg $\overline{\mathfrak{S}}(f)$ olyan $F(z)$ hatványsornak reális, illetőleg imaginárius részei, amelynek deriváltja a zárt egységkörben korlátos marad, akkor teljesen kielégítőnek találhatjuk a következő megállapítást:

VIII. Ha $F(z)$ az egységkör belsejében reguláris, ezenkívül $F'(e^{i\vartheta}) \leq K$, akkor $F(z)$ reális és imaginárius részeire egyaránt érvényes a

$$\varrho_n^{(1)} < \frac{4K}{n} > \bar{\varrho}_n^{(1)} \quad (9)$$

megbecslés.

Feltételeink folytán ugyanis $F'(e^{i\vartheta})$ reális és imaginárius részei egyaránt eleget tesznek $\alpha=1$ -el és a (9) alatti megbecslésben szereplő K konstanssal egy Lipschitz-feltételnek, állításunk tehát közvetlen folyománya VII. tételünknek.

Alexits György.

SUR L'ORDRE DE GRANDEUR DE L'APPROXIMATION D'UNE FONCTION PAR LES MOYENNES DE SA SÉRIE DE FOURIER.

Soit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

la série de Fourier d'une fonction périodique mod. 2π satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h^\alpha} \right| \leq K. \quad (2)$$

Désignons par $\sigma_n^{(\delta)}(x)$ la n -ième moyenne (C, δ) de la série (1). Le théorème suivant de S. BERNSTEIN¹ est bien connu: Si $0 < \alpha < 1$, on a

$\varrho_n^{(1)} = \text{Max} |f(x) - \sigma_n^{(1)}(x)| = O\left(\frac{1}{n^a}\right)$, mais, pour $a=1$, on n'obtient que $\varrho_n^{(1)} = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$. Inversement, $\varrho_n^{(1)} = O\left(\frac{1}{n^a}\right)$ a pour conséquence que $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz (2), pourvu que a soit < 1 ; mais l'ordre de grandeur $\varrho_n^{(1)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ n'entraîne que la condition de continuité $|f(x+h) - f(x)| \leq K|h| \log \frac{1}{|h|}$.

Il est également connu que les ordres de grandeur obtenus par S. BERNSTEIN ne peuvent être améliorés. Pourtant, en considérant la série

$$\bar{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \quad (3)$$

conjuguée à (1) et en désignant par $\bar{\sigma}_n^{(\delta)}(x)$ la n -ième moyenne (C, δ) de la série (3), on peut démontrer les théorèmes suivants:

Si $f(x)$ satisfait à la condition (2) avec $a=1$, alors on a pour tout $\delta > 0$:

$$\bar{\varrho}_n^{(\delta)} = \text{Max} |\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\delta)}(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4)$$

et on a presque partout

$$|f(x) - \sigma_n^{(\delta)}(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Inversement, la relation (4) a pour conséquence que $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz avec $a=1$.

Ces théorèmes s'obtiennent comme conséquences d'un théorème général concernant l'ordre de grandeur du reste des séries à termes réels.

Georges Alexits

¹ S. BERNSTEIN, *Mém. Acad. Belg.* (2) 4 (1912), p. 2—104.

AZ INVARIÁNS DIFFERENCIÁL MEGÁLLAPÍTÁSA A FINSLER-FÉLE TEREKBEN.

Jelen dolgozatban a FINSLER-féle terekhez tartozó invariáns differenciált új módszerrel vezetjük le, amely lényegesen rövidebb, mint az eredeti E. CARTANTÓL¹ származó és így némi érdeklődésre tarthat igényt.

A levezetésben alapvető fogalom egy görbesereg mentén oszkuláló RIEMANN-féle tér, amely először A. NAZIM-nak² C. CARATHÉODORY-nál készült disszertációjában lép fel. A. NAZIM egyébként szintén definiál egy invariáns differenciált, a nélkül azonban, hogy annak explicit alakját megadná. Az ottani fejtegetésekből³ megállapítható, hogy az ott szereplő invariáns differenciál először J. L. SYNGE-nél szerepel⁴, tehát az E. CARTAN-tól származó invariáns differenciálnak speciális esete.

Az 1. §-ban mindenekelőtt azt a felfogást ismertetjük, amelyen CARTAN levezetése alapul, míg a 2. §-ban az új levezetési módot tárgyaljuk.

1. §. A FINSLER-féle tér és az invariáns differenciálnak CARTANTÓL származó meghatározása.

Az olyan (x^1, x^2, \dots, x^n) n -dimenziós teret, amelyben a ds ív-elem

$$ds = L(x, dx) \quad (1, 1)$$

alakú, FINSLER-féle térnek nevezzük. Az (1, 1)-ben szereplő függ-

¹ E. CARTAN (1).

² A. NAZIM (1).

³ A. NAZIM (1), I-ső szakasz (5, 6) és (5, 12).

⁴ J. L. SYNGE (1).

vényről föltesszük, hogy pozitív, homogén, első dimenziójú a dx^i differenciálokban, továbbá, hogy a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (L^2(x, \dot{x}))}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k} u^i u^k \quad (1, 2)$$

quadratikusan alak pozitív definit. $L(x, \dot{x})$ tekintetbe jövő deriváltjainak létezését és folytonosságát szintén feltesszük.

Az abszolút differenciál-kalkulus módszerei, amelyek a RIEMANN-féle geometriában oly termékenyeknek bizonyultak, átvihetők ezen általánosabb esetre is.⁵ Ha még azt is el akarjuk érni, hogy a tér, éppúgy mint a RIEMANN-féle geometriában, euklidikusan összefüggő legyen, akkor kétségtelenül E. CARTAN felfogása mutatkozik legcélszerűbbnek.⁶ E szerint az alapul vett n -dimenziós (pont-)teret az x^1, x^2, \dots, x^n ; $\dot{x}^1: \dot{x}^2: \dots: \dot{x}^n$ vonalelemek $(2n-1)$ -dimenziós sokaságává bővítjük. A vonalelemek meghatározó adatait mindig röviden (x, \dot{x}) -tal fogjuk jelölni.

Az összes mennyiségeket, tehát például a tenzorokat egy vonalelemre vonatkozóan értelmezzük.

E. CARTAN szerint egy ilyen sokaság euklidikusan összefüggő, ha a következő két feltétel teljesül:

Először adva van egy $g_{ik}(x, \dot{x})$ mérték-tenzor, amelyre nézve az u^i segédváltozóknak

$$g_{ik}(x, \dot{x}) u^i u^k \quad (1, 3)$$

quadratikusan alakja bármely (x, \dot{x}) vonalelem esetén pozitív definit. Ekkor egy $\xi^i(x, \dot{x})$ vektor hosszának l^2 négyzete ugyanúgy, mint a RIEMANN-féle térben,

$$l^2 = g_{ik} \xi^i \xi^k. \quad (1, 4)$$

Ennek megfelelően értelmezhető két ugyanazon vonalelemhez tartozó vektor szöge.

⁵ Ez irányú első kutatások L. BERWALD-nál (1) J. H. TAYLOR-nál (1) és J. SYNGE-nél (1).

⁶ E. CARTAN (1), különösen 3—5 p.

Másodszor egy adott vektor-mezőhöz az invariáns differenciál

$$D\xi^i = d\xi^i + C_{kl}^i \xi^k d\xi^l + \Gamma_{kl}^i \xi^k dx^l \quad (1, 5)$$

alakban van értelmezve. Ha

$$D\xi^i = 0, \quad (1, 6)$$

akkor a vektor « (x, \dot{x}) -ből $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ -ba párhuzamosan át van helyezve.» További követelmény, hogy párhuzamos áthelyezéssel egy vektor hossza se változzék. Ebből a kikötésből adódik, hogy az (1, 5)-ben szereplő $C_{kl}^i(x, \dot{x})$ és $\Gamma_{kl}^i(x, \dot{x})$ mennyiségek kielégítik a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} &= g_{is} C_{jk}^s + g_{is} C_{jk}^s, \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= g_{is} \Gamma_{jk}^s + g_{js} \Gamma_{ik}^s \end{aligned} \quad (1, 7)$$

differenciálegyenletrendszer.

Ezekután a teendő abban áll, hogy az adott $L(x, dx)$ alapp-függvényből kiindulva a hozzátartozó $g_{ik}(x, \dot{x})$, $C_{ikl}(x, \dot{x})$ és $\Gamma_{ikl}(x, \dot{x})$ mennyiségeket invariáns természetű követelmények alapján meghatározzuk.

E. CARTAN a következő négy követelményt állította fel:⁷

C. 1. Ha egy ξ^i vektor vonalelemével egyirányú, akkor hossza $L(x, \xi)$.

C. 2. Ha ξ^i és η^i két rögzített komponensekkel bíró vektor, és ha $D\xi^i$ és $D\eta^i$ e két vektor invariáns differenciálja arra az esetre, amidőn a közös (x, \dot{x}) vonalelem csupán x^i centruma körül $(x, \dot{x} + d\dot{x})$ irányban forog, akkor

$$g_{ik} \xi^i D\eta^k = g_{ik} \eta^i D\xi^k.$$

C. 3. Egy vonalelemével közös irányú, rögzített komponensekkel bíró vektornak invariáns differenciálja zérus, ha a vonalelem saját centruma körül infinitesimális elfordulást végez.

⁷ E. CARTAN (1) 10. o. Ott különben öt követelmény van adva, amelyek közül a (B-vel jelölt) második felesleges, mert a többiekéből következik. Lásd E. CARTAN (2).

C. 4. Ha az (x, \dot{x}) vonalelemet (1, 6) szerint párhuzamosan $(x + dx)$ -be áthelyezzük,^s akkor az invariáns differenciálban fellépő komponenseket Γ_{kl}^{*i} -vel jelöljük. A végső követelmény abban áll, hogy ezek az alsó indexekben szimmetrikusak legyenek.

2. §. Az invariáns differenciál megállapítása.

Az invariáns differenciálnak CARTAN-tól származó levezetésében lényeges, hogy az az (1, 5) alakkal bír és hogy a C_{kl}^i és Γ_{kl}^i áthelyezési paraméterek az (1, 7) egyenleteket kielégítik. Az általunk követett úton önként adódik, hogy az invariáns differenciál dx^i és $d\dot{x}^i$ -ben lineáris, tehát (1, 5) alakú és hogy paraméterei az (1, 7) relációkat kielégítik.

Hogy vonalelem-sokaságunkat euklidikusan összefüggővé tegyük, mindenekelőtt az 1. §.-ban kifejtett módon metrikát kell bevezetnünk. Ez két lépésben történjék:

A. 1. Vonalelemével egyirányú vektor hosszának megállapítása.

A. 2. Tetszőleges vektor hosszának megállapítása. A. 1. megállapítás legyen az előző §. C. 1. feltételével egyező:

A. 1. Ha ξ^i az (x, \dot{x}) vonalelemhez tartozó vektor, melyre nézve

$$\xi^i = \varrho(x, \dot{x}) \dot{x}^i, \quad \varrho(x, \dot{x}) > 0 \quad (2, 1)$$

érvényes, akkor a vektor l hossza legyen

$$l = L(x, \xi). \quad (2, 2)$$

Az (x, \dot{x}) vonalelem irányába eső egységvektor komponensei ekkor

$$l^i = \frac{\dot{x}^i}{L(x, \dot{x})}. \quad (2, 3)$$

Egy tetszőleges, az (x, \dot{x}) -hoz tartozó vektor hosszának értelmezése céljából tekintsük az összes, ugyanazon x_0^i centrumból

^s Természetesen kimutatandó, hogy a vonalelemeknek csak a szomszédos ponttól függő áthelyezése lehetséges.

kiinduló vonalelemeket. Azon egységvektorok végpontjai, amelyek ezen vonalelemekben fekszenek, az l^i változók terében (amely célszerűen affin pont-térnek tekinthető) az

$$L(x_0, l) = 1 \quad (2, 4)$$

hiperfelületet töltik be (CARATHÉODORY-féle indikatrix).⁹

Ha mármost (x_0, \dot{x}_0) egy tetszőleges x_0^i -ből kiinduló vonalelem, akkor létezik egy egyértelműen meghatározott másodrendű felület, amelynek x_0^i a középpontja és amely az indikatrixot a

$$l_0^i = \frac{\dot{x}_0^i}{L(x_0, \dot{x}_0)}$$

pontban oszkuálja. Ennek egyenlete az affin tér X^i ($i=1, 2, \dots, k$) koordinátaiban

$$g_{ik}(x_0, \dot{x}_0) X^i X^k = 1, \quad (2, 5)$$

ahol

$$g_{ik}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial (L^2(x, \dot{x}))}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k}. \quad (2, 6)$$

A (2, 5) felület az (x, \dot{x}) vonalelemhez tartozó oszkuáló indikatrix és pedig (1, 2) szerint konvex.

A. 2. Az (x, \dot{x}) vonalelemhez tartozó tetszőleges vektor l hosszára legyen

$$l^2 = g_{ik}(x, \dot{x}) \xi^i \xi^k. \quad (2, 7)$$

Miként a RIEMANN-féle térben, úgy itt is két ugyanazon vonalelemhez tartozó vektor szögét g_{ik} segítségével meghatározhatjuk.

Az euklidikus összefüggés teljes meghatározásához még az invariáns differenciált kell megállapítanunk, amit a következőkben fogunk megtenni.

Legyen adva az

$$x^i = x^i(\tau), \quad (2, 8a)$$

$$\dot{x}^i = \dot{x}^i(\tau) \quad (2, 8b)$$

egyenletek által valamely $\langle \tau_0, \tau_1 \rangle$ intervallumban a vonalelemeknek egy folytonosan differenciálható serege. Ezt a vonalelem-

⁹ C. CARATHÉODORY (1), 456. o.

sereget a (2, 8a) görbe környezetében a következő módon akarjuk folytatni. Ha az $L(x, dx)$ függvényt egy variációs probléma alapfüggvényének tekintjük, akkor a (2, 8) vonalelem-seregen át egy egy-paraméteres extrémális-sereget vezethetünk. Ezt beágyazzuk egy olyan extrémálishalmazba, mely az n -dimenziós x^i ponttérnek egy B tartományát egyrétűen befödi. Ha mindegyik extrémálison az

$$s = \int L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt \quad (2, 9)$$

«ívhosszat» paraméterül választjuk és az erre a paraméterre vonatkozó érintővektort meghatározzuk, akkor B -nek minden x^i pontjához egyértelműen egy r^i irányt rendeltünk, tehát

$$r^i = r^i(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (2, 10)$$

Ezzel a (2, 8) vonalelemeknek a (2, 8a) görbe környezetében való folytatását megvalósítottuk.¹⁰ Válasszuk a (2, 8b) vonalelemeket közvetlenül olyképpen, hogy azok az extrémálisoknak az ívhossz szerinti deriváltjaival összeessenek. Ekkor fennállnak a következő identitások:

$$\dot{x}^i(\tau) \equiv r^i(x^1(\tau), \dots, x^n(\tau)). \quad (2, 11)$$

Az r^i -ket a $g_{ik}(x, \dot{x})$ függvényekbe helyettesítjük és bevezetjük a

$$\gamma_{ik}(x^1 \dots x^n) \equiv g_{ik}(x^1, \dots, x^n, r^1(x^1 \dots x^n), \dots, r^n(x^1 \dots x^n)) \quad (2, 12)$$

jelölést. (1, 3) következtében az w^i ($i = 1, 2, \dots, n$) segédváltozóknak

$$\gamma_{ik} w^i w^k \quad (2, 13)$$

kvadratikusan alakja ismét pozitív definit. Tehát γ_{ik} a B tarto-

¹⁰ A következőkben elégséges volna a vektormező szerkesztésekor a következő gyengébb követelményeket szabni: szerkesztendő egy tetszőleges görbesereg, amely az extrémális sereget a (2, 8a) görbe pontjaiban oszkuálja és az beágyazandó egy görbeseregbe, amely egy B tartományt egyrétűen befödi. A sereghez tartozó bármely görbének érintő vektora még alkalmazható normálendő és irányítendő. Ez mindig elérhető, például oly módon, hogy a szóbanforgó vektort az érintő extrémálisnak érintő vektorával azonosítjuk.

mányban egy RIEMANN-féle tér fundamentális tenzorául választható. A

$$ds^2 = r_{ik} dx^i dx^k \quad (2, 14)$$

RIEMANN-féle mérték meghatározásához tartozó extremálisoknak mármost az a jellegzetes tulajdonságuk, hogy az $L(x, dx)$ alapfüggvényhez tartozó extremálisokat oszkuálják, amennyiben van közös (x^i, r^i) vonalelemük ($r^i(2, 11)$ -ből!). Ez rögtön belátható az extremálisok differenciálegyenletei és (2, 12) alapján.¹¹ Az így meghatározott teret ezen tulajdonsága alapján egy a görbesereg mentén oszkuáló RIEMANN-féle térnek nevezzük.

Ezekután az oszkuáló RIEMANN-féle tereknek egy, további vizsgálataink szempontjából fontos részhalmazát tekintsük. Ezen részhalmaz bármelyik tere a következő két tulajdonsággal jellemezhető: Először, a (2, 8b) vektormező (2, 8a) mentén a RIEMANN-féle térben paralelnek mutatkozik. A második tulajdonsághoz jutunk, ha (2, 10)-ből egy r^i vektort és (2, 8b)-ből egy \dot{x}^i vektort vizsgálunk. Ha ezeknek a vektoroknak támadáspontjaira nézve fennállnak

$$|x^i - x^i(\tau)| < \varepsilon \quad (\tau \text{ rögzített}), \quad (2, 15)$$

ahol ε tetszőleges kis adott szám, akkor az r^i és \dot{x}^i vektorok az oszkuáló RIEMANN-féle térben paralelek legyenek, amennyiben ε -nak egynél magasabb hatványai elhanyagoltatnak.

A két tulajdonságot kevésbé pontosan, de szemléltetőbben leírhatjuk a következő módon:

A (2, 10) mező összes olyan vektorai, amelyeknek támadáspontjai egy a (2, 8a) körüli elég vékony «csőben» foglaltatnak, az oszkuáló RIEMANN-féle térben első közelítésben párhuzamosak.

Kimutatandó természetesen, hogy ilyen terek léteznek. Ez önként fog adódni, ha a fenti tulajdonságokat analitikusan kifejezzük.

Válasszunk B -ben egy \bar{x}^i pontot és kössük azt össze egy

¹¹ A. NAZIM (1). Az extremálisoknak ez a tulajdonsága ott a 18–20. oldalon van bebizonyítva.

folytonosan differenciálható görbeívvel (2, 8a)-nak valamely $x^i(\tau)$ pontjával. Ekkor lényeges, hogy a görbe összes pontjainak a $x^i(\tau)$ ponttól való eltérései (2, 15)-nek megfelelőek legyenek. A különböző lehetséges görbeívek közt

$$x^i = x^i(\tau) + \sigma [\bar{x}^i - x^i(\tau)] \quad (0 \leq \sigma \leq 1) \quad (2, 16)$$

különösen egyszerű paraméter-előállítással bír. Elegendő lesz ilyen görbeívek vizsgálataira szorítkoznunk.

Ha a γ_{ik} mennyiségek CHRISTOFFEL-féle szimbolumait $\overset{(e)}{\Gamma}_{kl}^i$ -val jelöljük, akkor

$$\frac{\partial r^i}{\partial x^l} (\bar{x}^l - x^l(\tau)) + \overset{(e)}{\Gamma}_{kl}^i r^k (\bar{x}^l - x^l(\tau)) = 0 \quad (2, 17)$$

azt fejezi ki, hogy az r^i vektor-mező (2, 16) mentén párhuzamos. (2, 17)-ben az r^i , $\frac{\partial r^i}{\partial x^l}$, $\overset{(e)}{\Gamma}_{kl}^i$ a (2, 16) mentén felvett értékekkel képezendők. Alkalmazzuk ezekre a differenciálszámítás középértéktételét, figyelembevéve, hogy mint fentebb említettük, ε -ra nézve elsőnél magasabbfokú mennyiségek elhanyagolandók. Ekkor azt találjuk, hogy azok az egyenletek is fennállanak, amelyek (2, 17)-ből úgy keletkeznek, hogy bennük az r^i , $\frac{\partial r^i}{\partial x^l}$ és $\overset{(e)}{\Gamma}_{kl}^i$ függvényeknek az $x^i(\tau)$ helyen (τ rögzített!) felvett értékeit helyettesítjük. Ha még figyelembe vesszük, hogy $\bar{x}^i - x^i(\tau)$ tetszőleges, továbbá azt, hogy az r^i -k (2, 8a) mentén párhuzamosak, akkor nyerjük, hogy (2, 8) mentén

$$\frac{\partial r^i}{\partial x^l} + \overset{(e)}{\Gamma}_{kl}^i r^k = 0. \quad (2, 18)$$

Ezek szerint az egyenletek szerint az a két tulajdonság, amellyel az általunk kiválasztott oszkuláló RIEMANN-féle terek bírnak, *equivalens* azzal, hogy r^i kovariáns deriváltja egy ilyen térben (2, 8a) mentén eltűnik. (2, 18)-at még átalakítjuk. Először is emlékeztetünk arra, hogy az extrémálisok differenciálegyenletei, amelyek az $L(x, dx)$ alapfüggvénnyel képezett variációs problémához tartoznak, a második deriváltakra nézve megoldhatók,

ha a (2, 1) ívhosszat használjuk paraméterül.¹² Ílymódon nyerjük a

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -2G^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \quad (2, 19)$$

egyenleteket, ahol

$$G_i(x, x') = G^m G_{mi} = \frac{\partial^2 (\frac{1}{2} L^2)}{\partial x'^i \partial x^k} x'^k - \frac{\partial (\frac{1}{2} L^2)}{\partial x^i}. \quad (2, 20)$$

A $G_i(x, x')$ függvények x'^i -re nézve homogén, második dimenziójúak.

A $\overset{(e)}{\Gamma}_{kl}^i$ CHRISTOFFEL-szimbólum jelentéséből adódik, (2, 10) és (2, 12)-re való tekintettel, hogy

$$\begin{aligned} \overset{(e)}{\Gamma}_{kpl}^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^p} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kp}}{\partial r^s} \frac{\partial r^s}{\partial x^l} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pl}}{\partial r^s} \frac{\partial r^s}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial r^s} \frac{\partial r^s}{\partial x^p}. \end{aligned} \quad (2, 21)$$

Ezeket az egyenleteket r^k -val komponáljuk. Ekkor az $L(x, \dot{x})$ -ra vonatkozó homogenitási feltevés és (2, 6) alapján adódik:

$$r^k \overset{(e)}{\Gamma}_{kpl}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^p} \right) r^k + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pl}}{\partial r^s} \frac{\partial r^s}{\partial x^k} r^k. \quad (2, 22)$$

(2, 22) jobboldalán az első összeg számára (2, 6), (2, 20) és G^i homogenitásának figyelembevételével nyerjük:¹³

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^p} \right) r^k = \\ &= g_{pm} \frac{\partial G^m}{\partial r^l} + \frac{\partial g_{pm}}{\partial r^l} G^m. \end{aligned} \quad (2, 23)$$

A második összegben $\frac{\partial r^s}{\partial x^k}$ -t a (2, 18)-ből adódó értékével helyettesítjük. Ílymódon (2, 22) a következő alakba megy át:

$$\overset{(e)}{\Gamma}_{kpl}^i r^k = g_{pm} \frac{\partial G^m}{\partial r^l} + \frac{\partial g_{pm}}{\partial r^l} G^m - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pl}}{\partial r^s} \overset{(e)}{\Gamma}_{jk}^s r^j r^k. \quad (2, 24)$$

¹² J. H. TAYLOR (2), L. BERWALD (1) 2–7. o., (2), 44. o. E. CARTAN (1) 17. o. A. NAZIM (1) 19. o.

¹³ Ez a képlet más összefüggésben E. CARTANNÁL (1), 16. o. található.

Ha (2, 24)-et r^l -lel komponáljuk, akkor (2, 6)-ra és G^i homogenitására való tekintettel adódik:

$$\overset{(9)}{\Gamma}_{kpl} r^k r^l = 2G_p. \quad (2, 25)$$

Továbbá ezt (2, 24)-be helyettesítve:

$$\overset{(9)}{\Gamma}_{kpl} x^k = g_{ip} \frac{\partial G^i}{\partial x^l}. \quad (2, 26)$$

E szerint (2, 18) a (2, 8a) görbe mentén

$$\boxed{\frac{\partial r^i}{\partial x^k} = - \frac{\partial G^i}{\partial x^k}} \quad (2, 27)$$

alakban írható.

Ezekután kimutatjuk, hogy a (2, 27) egyenletek az r^i térvektorból esetleg levezethető differenciálegyenletekkel nincsenek ellentmondásban. Ílymódon az általunk kiválasztott különleges oszkuláló RIEMANN-féle terek létezését igazoltuk.

Ha a fentebb szerkesztett mezőnek bármelyik

$$x^i = x^i(s) \quad (2, 28)$$

extremálisát tekintjük, akkor föltevésünk szerint

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{dr^i}{ds} \quad (2, 29)$$

és ebből (2, 19)-re és G^i homogenitására való tekintettel következik, hogy

$$\frac{\partial r^i}{\partial x^k} r^k = - \frac{\partial G^i}{\partial r^k} r^k. \quad (2, 30)$$

Tehát ezt a parciális differenciálegyenletet tartozik az r^i térvektor (2, 10) kielégíteni. Mint látható, a (2, 30) és (2, 27) egyenlet között nincs ellentmondás.

Rövidebb beszédmód kedvéért ezeket a különleges tereket a (2, 8) vonalelem-sereghez tartozó oszkuláló RIEMANN-féle tereknek nevezzük.

Ezekután az invariáns differenciált a következőképpen állapítjuk meg:

A. 3. Valamely (2, 8) mentén értelmezett vektor invariáns differenciálja legyen egyenlő bármelyik (2, 8)-hoz tartozó oszku-
láló RIEMANN-féle térben mutatkozó invariáns differenciáljával.

Utólag bebizonyítjuk, hogy ez a megállapítás független az oszku-
láló RIEMANN-féle tér választásától.

A. 3. azt jelenti, hogy

$$\frac{D\xi^i}{d\tau} = \frac{d\xi^i}{d\tau} + \overset{(e)}{\Gamma}_{kl}^i \xi^k dx^l \quad (2, 31)$$

érvényes. Az összes (2, 31)-ben fellépő függvények (2, 8) mentén képezendők. (2, 8) mentén azonban a (2, 11) identitások miatt fennáll

$$\frac{\partial \gamma^s}{\partial x^l} \frac{dx^l}{d\tau} = \frac{d\dot{x}^s}{d\tau} \quad (2, 32)$$

Ha ezt, valamint (2, 27)-et behelyettesítjük (2, 21)-be, akkor végre a (2, 31) invariáns derivált számára a

$$\frac{D\xi^i}{d\tau} = \frac{d\xi^i}{d\tau} + C_{kl}^i(x, \dot{x}) \xi^k \frac{d\dot{x}^l}{d\tau} + \overset{(e)}{\Gamma}_{kl}^i \xi^k \frac{dx^l}{d\tau} \quad (2, 33)$$

alakot nyerjük, ahol

$$C_{kl}^i = g^{is} C_{ksl} = \frac{1}{2} g^{is} \frac{\partial g_{ks}}{\partial \dot{x}^l} \quad (2, 34)$$

és

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma_{kl}^i &= g^{ip} \Gamma_{kpl} = g^{ip} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^p} \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_{kls} \frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^p} - C_{pls} \frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^k} \right]. \end{aligned}} \quad (2, 35)$$

(2, 33) szerint az invariáns differenciálnak tényleg (1, 5)-tel egyező alakja van. Továbbá (3, 34) és (3, 35) mutatja, hogy A. 3. az oszku-
láló RIEMANN-féle tér választásától független. A RIEMANN-féle terekre nézve ismert

$$d\gamma_{ik} = \overset{(e)}{\Gamma}_{ikl} dx^l + \overset{(e)}{\Gamma}_{kil} dx^l \quad (2, 36)$$

relációkból következik továbbá, hogy Γ_{kl}^i és C_{kl}^i áthelyezési paraméterek az (1, 6) differenciálegyenleteket kielégítik. Ez egyéb-

ként csak annyit jelent, hogy parallel áthelyezéssel a vektorok hossza nem változik, ami A. 3.-nak majdnem triviális következménye.

Az általunk értelmezett invariáns differenciál egyébként a CARTAN-félével egyezik, minthogy könnyen igazolható, hogy az 1. §.-ból C. 2.—C. 4. teljesülnek, míg C. 1. azonos A. 1.-gyel. A megegyezés pusztán formálisan abból is adódik, hogy mindkét esetben az áthelyezési paraméterek megegyeznek.¹⁴

Varga Ottó.

Irodalom.

L. BERWALD (1) Über Parallelübertragungen in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung. Jahresb. D. M. V. **34**. 213—220. — (2) Untersuchungen über die Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Math. Zeitschr. **25**. 40—74.

C. CARATHÉODORY (1) Über diskontinuierliche Lösungen in der Variationsrechnung. Diss. Göttingen. 1904, Math. Ann. 62.

E. CARTAN (1). Les espaces de Finsler. Actualités scientifiques et industrielles, **79**, Paris, Hermann & Cie, 1934. — (2) Les espaces de FINSLER. Abh. aus dem Seminar für Vektor und Tensoranalysis, IV. Moskau 1937, 70—81.

P. FINSLER (1) Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Diss. Göttingen 1918.

A. NAZIM (1) Über Finsler'sche Räume, Diss. München 1936.

J. L. SYNGE (1) A generalization of the Riemannian line-element. Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 61—67.

J. H. TAYLOR (1) Generalization of Levi-Civita parallelism and the Frenet formulas. Diss. Chicago 1924 = Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 246—264. — (2) Reduction of Euler's equations to canonical form. Bull. Amer. Math. Soc. **31**, 257—262.

BESTIMMUNG DES INVARIANTEN DIFFERENTIALS IN FINSLER'SCHEN RÄUMEN.

Der zum Aufbau der FINSLER'schen Geometrie wesentliche Begriff des Invarianten-Differentials wird von E. CARTAN folgendermassen hergeleitet.

¹⁴ E. CARTAN (1), V. képlet és a 16. o. képlete.

Ist ξ^i ein Vektor im Linienelement (x, \dot{x}) , dann soll das invariante Differential $D\xi^i$ das man erhält, wenn man zum Nachbarelement $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ übergeht, linear in $d\xi^i, \xi^i, d\dot{x}^i$ und dx^i sein, also die Gestalt

$$D\xi^i = d\xi^i + C_{kl}^i(x, \dot{x})\xi^k d\dot{x}^l + \Gamma_{kl}^i(x, \dot{x})\xi^k dx^l \quad (a)$$

besitzen. Die Übertragungsparameter C_{kl}^i und Γ_{kl}^i sollen sich eindeutig aus der Grundfunktion $L(x, dx)$ des FINSLER'schen Raumes bestimmen lassen. Um dies zu bewirken, stellt E. CARTAN neben der selbstverständlichen Forderung, dass die Übertragung metrisch sein soll, noch 4 weitere ziemlich verwickelte Forderungen.

In der vorliegenden Arbeit wird das in Frage stehende invariante Differential auf eine andere Weise hergeleitet, die vielleicht übersichtlicher und mehr geometrisch ist. Der Grundgedanke ist folgender.

Längs einer stetig differenzierbaren Folge von Linienelementen

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(\tau), \\ \dot{x}^i &= \dot{x}^i(\tau) \end{aligned} \quad (\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1) \quad (b)$$

wird die FINSLER'sche Massbestimmung durch eine oskulierende RIEMANN'sche approximiert. Das für diese RIEMANN'sche Massbestimmung wohlbekannte invariante Differential wird nun als invariantes Differential längs der Linienelementfolge (b) erklärt. Das aus dieser Festsetzung heraus bestimmte invariante Differential erweist sich mit dem CARTAN'schen (a) identisch.

O. Varga.

EGY GRÁFELMÉLETI SZÉLSŐÉRTÉK- FELADATRÓL.¹

I. §.

Legyenek adva bizonyos pontok, melyekből valamely szabály szerint bizonyos pontpárokat összekötünk egymással, a többit nem. Az így keletkezett alakzatot nevezzük gráfnak. Az eredetileg adott pontok a gráf szögpontjai, az összekötő vonalak a gráf élei. A gráf általános fogalma megengedné, hogy ugyanazon két szögpont esetleg több éllel legyen összekötve; e dolgozatban azonban a gráf szót mindenkor abban a szűkebb értelemben használjuk, melynél bármely két szögpont *legfeljebb* egy éllel van összekötve. Gráfot nyerünk pl., ha az n pontnak, P_1, P_2, \dots, P_n -nek, rendre megfeleltetjük egy n -tagú társaság tagjait és a $P_i P_j$ élt akkor és csak akkor húzzuk meg, ha a társaság i -ik és j -ik tagjai ismerik egymást. Egy B gráfot az A gráf részgráfjának nevezzük, ha B minden éle és szögpontja szerepel A -ban. Az A gráfot akkor nevezzük teljes gráfnak, ha A bármely két szögpontját összekötő él szerepel A -ban. Az n szögpontból álló teljes gráfot némelykor teljes n -szögnek is fogom nevezni² és ha szögpontjai P_1, P_2, \dots, P_n , akkor (P_1, P_2, \dots, P_n) -el fogom jelölni. Egy A gráf *kiegészítő* gráfja alatt azon, a későbbiekben \bar{A} -val jelzendő, gráfot értjük, melynek szögpontjai az eredeti gráfnak is szögpontjai és élei az A gráfot teljes gráffá egészítik

¹ E tárgyról szerző előadást tartott az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat 1941. márc. 27.-i ülésén.

² Ha $n=3$, akkor is «teljes» háromszögről fogok beszélni az egyöntetűség végett.

ki. Ha például az A gráf szögpontjai P_1, P_2 és P_3 , élei pedig P_1P_2 és P_1P_3 , akkor az \bar{A} gráf szögpontjai P_2 és P_3 , egyetlen éle pedig P_2P_3 . Ezzel már ismertettük a gráfelmélet azon alapfogalmait, amelyek a későbbiekben szerepelnek.

A kérdés, amivel foglalkozunk, szemléletes interpretációban a következő: n -számú játékos egyszeri körmérkőzést játszik, mely N számú mérkőzés lejátszása után abbamarad. Milyen nagynak kell lenni a lejátszott játszmák N számának, hogy biztosan következtetni tudjunk arra, hogy a játékosok között van legalább k játékos, akik *egymás közt* lejátszották a körmérkőzést? Természetesen n, k, N -re feltesszük, hogy

$$3 \leq k \leq n, \quad N < \binom{n}{2}.$$

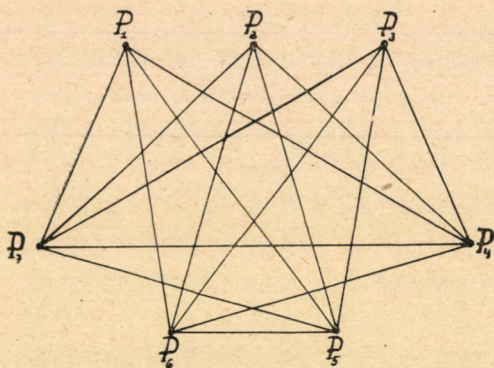
Ha minden játékosnak rendre megfeleltetjük a különböző P_1, P_2, \dots, P_n pontokat és a P_i, P_j pontokat akkor és csak akkor kötjük össze egyetlen éllel, ha az i -ik és j -ik játékosok mérkőzése szerepelt a lejátszott N mérkőzés között, akkor egy n szögpontú A gráfot nyerünk, melyben N él szerepel és melynek van egy k szögpontú teljes részgráfja. Ekkor kérdésünk úgy is fogalmazható, hogy milyen nagynak kell lenni N -nek, hogy az n számú szögpont között *bárhogyan* húzok is meg N számú élt, a kapott gráfban biztosan legyen k szögpontú teljes részgráf. Egy harmadik, nyilván az előbbivel egyenértékű fogalmazás, a következő: a P_1, P_2, \dots, P_n szögpontú gráfban *legfeljebb* hány él szerepelhet, ha a gráfnak *nincs* k szögpontú teljes részgráfja? Ezen maximális élszám természetesen csak n -től és k -től függ; ha ezt $M_k(n)$ -nel jelöljük, akkor minden n szögpontú gráfban, melyben legalább $M_k(n) + 1$ él szerepel, biztosan létezik k szögpontú teljes részgráf. Feladatunk tehát ezen $M_k(n)$ meghatározása; ez fogja jelenteni azt a szélsőértékfeladatot, melyre a dolgozat címe vonatkozik.

Vizsgálatunkban nagy szerepe lesz egy speciális gráfnak, melyet $D(n, k)$ -val fogunk jelölni, éleinek számát pedig $d_k(n)$ -nel. E gráfot a következő, látszólag mesterkélt módon értelmezzük. Osszuk

el n -et $(k-1)$ -el; az osztás hányadosa legyen t , maradéka r , vagyis

$$\begin{aligned} n &= (k-1)t + r, \\ 0 &\leq r \leq k-2. \end{aligned} \quad (1)$$

Ekkor a P_1, P_2, \dots, P_n szögpontokat osszuk $(k-1)$ osztályba úgy, hogy az első r osztály mindegyikébe $(t+1)$ szögpontot, a többi $(k-r-1)$ osztály mindegyikébe t szögpontot teszünk; ezáltal nyilván valamennyi szögpont beleesik egy és csak egy osztályba. Mármost *bármely* két oly szögpontot, mely *nem* esik közös osztályba, kössünk össze egymással, viszont oly P_i, P_j szögpontpárokat, melyek *közös* osztályba esnek, nem. Ezzel a $D(n, k)$ gráf szerkezetileg egyértelműen meg van határozva.³



A $D(7, 4)$ gráf az ábrán látható; itt $r = 1$, $t = 2$; P_1, P_2, P_3 szögpontok tartoznak az első osztályba, P_4 és P_5 a másodikba, P_6 és P_7 a harmadikba. Kimutatjuk, hogy ezen $D(n, k)$ gráf és csak ez képezi szélsőértékfeladatunk megoldását. Más szóval, ha egy n szögpontú

gráfban legalább $1 + d_k(n)$ számú él van, akkor biztosan van benne egy k szögpontú teljes részgráf; ha azonban csak $d_k(n)$ számú él van benne, akkor van olyan, egyértelműen meghatározott gráf (éppen az előbb definiált $D(n, k)$ gráf), melyben nincs k -szögpontú teljes részgráf. Ez lesz az I. tétel. Könnyen igazolható, hogy (1) jelölésével

$$d_k(n) = \frac{k-2}{2(k-1)} (n^2 - r^2) + \binom{r}{2},$$

³ Ezen gráfra $n \equiv 0 \pmod{3}$, $k=4$ esetben WINKLER JÓZSEF mérnök úr volt szíves figyelmemet felhívni.

de e tényre a bizonyításban nem lesz szükség. Mivel $k = 3$ esetében

$$d_3(n) = \frac{1}{4}(n^2 - r^2) > \frac{1}{2} \binom{n}{2},$$

azért, az előbbi interpretációban, a mérkőzéseknek több, mint a felét le kell játszani ahhoz, hogy biztosan állíthassuk, hogy egy hármas körmérkőzés lezajlott.⁴

Az I. tétel kritériumot ad arra, hogy egy véges szögpont-számú gráfnak legyen k szögpontú teljes részgráfja. Ezen gondolatkörbe vágó — tudomásom szerint egyetlen — tétel ERDŐS PÁL és SZEKERES GYÖRGY egy közös dolgozatában található⁵ és lényegileg úgy fogalmazható, hogy, ha egy n szögpontú A gráf olyan, hogy az \bar{A} kiegészítő gráf csak «kevés» szögpontszámú teljes részgráfot tartalmaz, akkor maga az A gráf biztosan tartalmaz egy «sok» szögpontú teljes részgráfot. Tételük a «kevés» és «sok» megjelölések helyén csak becsléseket tartalmaz, sőt majdnem csak az egzisztenciát fejezi ki; a megfelelő szélsőértékfeladat pontos megoldása igen érdekesnek, de nehéznek látszik éppúgy, mint GRÜNWARD GÉZÁNAK ebből folyó következő megjegyzésének pontosítása: minden pozitív egész n -hez létezik oly $l = l(n)$, hogy egy tetszőleges n szögpontú A gráfban, vagy \bar{A} -ban mindig van l -szögpontú teljes részgráf.

Legyen most a vizsgálandó A gráfnak megszámlálhatóan végtelen sok szögpontja, P_1, P_2, \dots és keressünk kritériumokat arra, hogy A -nak biztosan legyen *végtelen sok szögpontú teljes részgráfja*. Az erre vonatkozó egyetlen ismeretes tétel SZEKERES GYÖRGYTŐL⁶ származik és következőképp szól. Ha a vizsgált

⁴ Ebből $d_3(2n) = n^2$; ha tehát a $2n$ szögpontú gráfban legalább $(n^2 + 1)$ él szerepel, akkor biztosan van benne teljes 3-szög, n^2 él esetén ez nem biztos. Mint ERDŐS PÁL levélbeli közléséből tudom, H. RADEMACHER e tételt olyképp szigorította, hogy $(n^2 + 1)$ él esetén nemcsak egy, hanem mindjárt legalább n számú teljes 3-szög van a gráfban. Mint ERDŐS PÁL kimutatta, $(n^2 + 2)$ él esetén a gráfban legalább $2n$ számú teljes 3-szög van.

⁵ P. ERDŐS and G. SZEKERES: A Combinatorial Problem in Geometry. *Compositio Mathematica*, 1935, vol. 2, p. 463—470.

⁶ Levélbeli közlés.

A gráf olyan tulajdonságú, hogy bárhogy vészek is ki a szögpontokból 3 különbözőt, ezek közül lesz legalább két olyan szögpont, melyeket összekötő él benne van A -ban, akkor A -nak biztosan van végtelen teljes részgráfja.⁷ II. tételünk ennek általánosítása, amennyiben biztosítjuk minden olyan, megszámlálhatóan végtelen sok szögpontú B gráfban egy végtelen sok szögpontú teljes részgráf létezését, melyhez van olyan pozitív egész d szám, hogy $d \geq 2$ és bárhogyan veszünk is ki B szögpontjai közül d számú különbözőt, ezek között van legalább két olyan szögpont, melyeket összekötő él benne van B -ben. Ez $d = 3$ -ra SZEKERES fenti tétele.

Érdekes feladat volna a II. tétel véges analogonját megtalálni, mivel ez véges gráfnál másszerű kritériumot adna teljes részgráf létezésére, mint az I. tétel. A II. tétel véges analogonja alatt pontosabban a következőket értjük. Legyen adva az n szögpontú C gráf, amelyhez van egy olyan, n -nél kisebb, pozitív egész d szám, hogy a szögpontokból bárhogy véve is ki d számú különbözőt, ezek között van legalább két olyan szögpont, melyeket összekötő él C -nek éle. Ekkor hány szögpontú teljes részgráf létezését tudjuk biztosítani? E kérdés tisztázására máshelyütt szeretnék visszatérni; egyelőre a $d = 3$ esetben annyit sikerült kimutatnom, hogy, ha s a legnagyobb egész szám, melyre még $\frac{s(s+1)}{2} \leq n$, akkor a gráf biztosan tartalmaz s szögpontú teljes részgráfot. Ennek bizonyítását nem részletezzük.

Az I. tétel egy másik érdekes kérdésre is rögtön választ ad. Egy teljes n -szögben minden teljes k -szöget reprezentáljunk egy élével; természetesen $k \leq n$. Ezen reprezentálás nyilván nagyon sokféleképp vihető keresztül. Keresendő azonban azon reprezentálási mód, mely a lehető legkevesebb számú éllel reprezentál. A kérdés úgy is kifejezhető, hogy egy adott egész k számhoz, melyre $3 \leq k < n$, keresendő az n szögpontú teljes gráf oly éleinek

⁷ Mint SZEKERES GYÖRGY levélileg közölte, ilyen típusú gráfokhoz a a nevezetes BURNSIDE-féle csoportelméleti problémának, ill. ennek egy, GRÜNWARD GÉZÁtól eredő módosított alakjának vizsgálata közben jutott.

minimális száma, melyek együttesen minden teljes k -szöget «lefognak». A III. tétel erre pontos választ ad, amennyiben kimondja, hogy ezen minimális élszámú lefogó érendszer egyedül az előbb definiált $D(n, k)$ gráf kiegészítője, tehát egy olyan gráf, mely szétesik $(k-1)$ számú teljes gráf összegére.⁸ A minimális lefogó élszám tehát $\binom{n}{2} - d_k(n)$; vagyis: egy n szögpontú teljes gráfból bárhogy távolítunk is el $\binom{n}{2} - d_k(n) - 1$ számú élt, a megmaradó gráf biztosan tartalmaz k szögpontú teljes részgráfot. Azon természetesen adódó általánosabb kombinatorikus kérdésre, hogy n elem l -edosztályú kombinációi közül *legalább* hányat kell kivenni, hogy minden k -adosztályú kombinációban legyen legalább egy kiválasztott l -edosztályú ($l < k$), egyelőre nem tudok válaszolni; az $l = 2$ esetet azonban a III. tétel tökéletesen elintézi. A III. tétel az előbbi bekezdésben definiált gráfokra is ad tájékoztatást és pedig olyan értelemben, hogy az ilyen tulajdonságú gráfokra, ha szögpontjaik száma n , nem lehet «túlkeves» éle; pontosabban, éleinek száma legalább $\binom{n}{2} - d_k(n)$.

A véges gráfokra vonatkozó I. és III. tételeket a II. §-ban, a végtelen gráfokra vonatkozó II. tételt a III. §-ban fogom bebizonyítani.

II. §.

Az I. tételt a következő formában bizonyítjuk be:

I. tétel. *Azon n szögpontú gráfok közül, melyeknek nincs k szögpontú teljes részgráfjuk, a legtöbb éle az I. §-ban definiált $D(n, k)$ gráfnak és csak ennek van.*

Mint az I. §-ban említettük, a keresett maximális élszámot $M_k(n)$ -nel jelöljük, a $D(n, k)$ gráf éleinek számát pedig $d_k(n)$ -nel; tehát azt kell bizonyítani, hogy $M_k(n) = d_k(n)$ és hogy az I. tételben kívánt tulajdonságú gráfok között csak a $D(n, k)$ gráfnak van $d_k(n)$ számú éle.

⁸ Vagyis $(k-1)$ számú olyan teljes gráfra, melyeknek páronként sem közös élük, sem közös szögpontjuk nincs.

A bizonyításhoz szükség van három egyszerű megjegyzésre:

a) Bebizonyítjuk, hogy $M_\nu(n) > M_{\nu-1}(n)$ ($\nu = 3, 4, \dots, n$).

Tekintsünk ugyanis egy E gráfot, melynek n szögpontja, $M_{\nu-1}(n)$ éle van és nem tartalmaz teljes $(\nu-1)$ -szöget. Vegyünk ehhez hozzá egy élt (ez $\nu \leq n$ miatt megtehető) és tekintsük a kapott E' gráfot, melynél az élek száma tehát $M_{\nu-1}(n) + 1$. Azt állítom, hogy az E' gráf nem tartalmazhat ν szögpontú teljes részgráfot. U. i., ha tartalmazna egy ν szögpontú teljes részgráfot, E'' -t, melynek szögpontjai, a jelölés alkalmas megválasztásával, P_1, P_2, \dots, P_ν volnának, akkor két eset képzelhető: E'' vagy tartalmazza az E -hez hozzátett élt, vagy nem. A második eset nyilván nem lehetséges, mert ekkor az E'' gráf E -nek is részgráfja volna, ami nem lehet, mert E -nek még $(\nu-1)$ szögpontú teljes részgráfja sincs a definíciója szerint. De az első eset is lehetetlen; ha ugyanis a hozzátett él benne volna E'' -ben és ez az él — ami az általánosság rovása nélkül feltehető — épp $P_1 P_2$ volna, akkor a (P_2, P_3, \dots, P_ν) teljes gráf E -nek részgráfja volna, ami E definíciójának ellentmond. Tehát az E' gráf valóban nem tartalmaz ν szögpontú teljes részgráfot, vagyis éleinek száma $\leq M_\nu(n)$. Tehát

$$M_{\nu-1}(n) + 1 \leq M_\nu(n). \quad Q. e. d.$$

b) Bebizonyítjuk, hogy a $D(n, k)$ gráfnak valóban nincs k szögpontú teljes részgráfja.

Ez egyszerűen onnan következik, hogy a $k-1$ számú osztály valamelyikébe a k számú szögpont közül legalább kettőnek kell esni. De ezen két szögpont a $D(n, k)$ gráf definíciója szerint nem lehet összekötve.

c) Bebizonyítjuk, hogy $k \leq n$ -re

$$M_k(n) \leq \binom{k-1}{2} + M_k(n-k+1) + (k-2)(n-k+1).$$

Tekintsünk ugyanis egy oly n szögpontú A gráfot, melynek nincs k szögpontú teljes részgráfja és melyben az élek száma $M_k(n)$. Az a) alatti segédétel szerint A -nak van $(k-1)$ szögpontú teljes részgráfja; a jelölést megválaszthatjuk úgy, hogy

ez $(P_1, P_2, \dots, P_{k-1})$ legyen, a többi szögpont: P_k, P_{k+1}, \dots, P_n . Ezáltal a szögpontokat két részre osztottuk. Figyeljük meg, hogy bármelyik oly szögpontból, mely a második részbe tartozik, az első részhez tartozók felé legfeljebb $(k-2)$ él indul ki; mert, ha például P_k -ből $(k-1)$ ilyen él indulna ki, akkor a definíció szerint a $(P_1, P_2, \dots, P_{k-1}, P_k)$ gráf (tehát egy k szögpontú teljes gráf) A -nak része volna, ami ellentmond A definíciójának. Mivel a második részhez tartozó szögpontok száma $(n - k + 1)$, az olyan élek száma, melyek *különböző* részekhez tartozó szögpontokat kötnek össze, *legfeljebb*

$$(k-2)(n-k+1).$$

Azon élek száma, melyek mindkét végpontja az első részhez tartozik, nyilván *pontosan*

$$\binom{k-1}{2}.$$

Végül azon élek száma, melyek mindkét végpontja a második részhez tartozik, *legfeljebb*

$$M_k(n-k+1);$$

ugyanis a második részbe $(n-k+1)$ szögpont esik és az ezeket egymás közt összekötő élek által alkotott gráf se tartalmazhat k szögpontú teljes részgráfot. Mindezekből a bebizonyítandó egyenlőtlenség következik.

Ezek után rátérhetünk az I. tétel bizonyítására. A bizonyítást fix $k \geq 3$ mellett « n -ről $(n+k-1)$ -re való teljes indukcióval» végezzük, ami alatt pontosan a következőket értjük. Fix k mellett n változzék; nyilván csak oly n -ekre kell a tételt bebizonyítani, melyek $(k-1)$ -nél nagyobbak. Az n lehetséges értékeit a következőkép csoportosítjuk

$$\begin{array}{ccccccc} (k) & (2k-1) & (3k-2) & . & . & . & \\ (k+1) & (2k) & (3k-1) & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ (2k-2) & (3k-3) & (4k-4) & . & . & . & \end{array} \quad (2)$$

ahol tehát közös sorban állanak azon n -értékek, melyek mod $(k-1)$ kongruensek. A tétel be lesz bizonyítva, ha előbb bebizonyít-

juk (2) táblázat első oszlopának n -értékeire, azután külön minden egyes sorra. A bizonyítási módszer jobb kiemelése végett e *logikai* sorrendet *időbelileg* megfordítjuk és előbb — feltételezve, hogy a tétel az első oszlop elemeire már igazolva van — bebizonyítjuk minden egyes sorra, azután pedig minden feltételes állítástól függetlenül az első oszlop n -értékeire.

Tekintsük tehát (2) táblázat azon sorát, melyben az $n = (k-1)t + r$ alakú értékek vannak, hol r fix és t változik. Tegyük fel, hogy a tétel már $t \leq T$ -re igazolva van és be akarjuk bizonyítani $t = (T+1)$ -re, azaz $n = (k-1)(T+1) + r$ -re; itt $T \geq 1$, ha $1 \leq r \leq (k-2)$ és $T \geq 2$, ha $r = 0$ mint az a (2) táblázatból látható. Tekintsük a *c*) alatti egyenlőtlenséget $n = (k-1)(T+1) + r$ -rel és vizsgáljuk, mikor helyettesíthető benne a \leq jel egyenlőséggel. Mint ott kiemeltük, csak a második és harmadik tagot kell e szempontból megvizsgálni. A harmadik tagnál nyilván akkor és csak akkor nem növeltünk, ha a második részbe tartozó *minden* szögpontról épp $(k-2)$ él indul az első részhez tartozó szögpontok felé. A második tagban pedig nyilván akkor és csak akkor állhat egyenlőség, ha a második részbe tartozó szögpontok oly $(k-1)T + r$ szögpontú gráfot alkotnak, melyben nincs k szögpontú teljes részgráf és élszáma az *ilyen gráfok között* maximális; de ekkor az indukciós feltevésünk alapján a második részbe tartozó szögpontok alkotta gráf azonos a $D(\overline{k-1} \cdot T + r, k)$ gráffal, élszáma tehát $d_k(\overline{k-1} \cdot T + r)$. Nyertük tehát, hogy

$$M_k(\overline{k-1} \cdot T + r) \leq \binom{k-1}{2} + d_k(\overline{k-1} \cdot T + r) + (k-2)(n - k + 1). \quad (3)$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor áll (3)-ban, ha

- a*) a második részbe tartozó mindegyik szögpontról épp $(k-2)$ él indul ki az első részbe tartozók felé és
- β*) a második részbe tartozó szögpontok alkotta gráf azonos a $D(\overline{k-1} \cdot T + r, k)$ gráffal.

Olyan $[(k-1)(T+1) + r]$ szögpontú gráf, mely az *a*) és *β*) feltételeket kielégíti, sok van; kimutatjuk azonban, hogy ezek

között olyan, amelyiknek nincs k szögponthú teljes részgráfja, egyetlen egy van és ez éppen a $D(\overline{k-1}, \overline{T+1}+r, k)$ gráf.

Hogy ezen állításunkat bebizonyítsuk, tekintsük a második részhez tartozó szögponthok. Ezek a $D(\overline{k-1}, \overline{T+1}+r, k)$ gráf definíciója szerint szétesnek $(k-1)$ osztályra, melyek közül r számú osztály egyenként $(T+1)$ szögponthot, a többi $(k-r-1)$ számú osztály egyenként T szögponthot tartalmaz. *a)* szerint továbbá minden oly szögponthoz, mely a második részhez tartozott, tartozik egy és csak egy, az első részhez tartozó oly szögponth, mellyel ő *nincs* összekötve. Ezen első részbe tartozó szögponthot fogjuk a következőkben az illető, második részhez tartozó, szögponth *asszociáltjának* nevezni. Azt állítjuk, hogy két oly, a második részhez tartozó szögponthoz, melyek *különböző* osztályokhoz tartoznak, *különböző* asszociáltak tartoznak. Ugyanis, ha ez nem volna igaz, akkor volna két oly szögponth a második részben — a jelölés alkalmas megválasztásával épp P_k és P_{k+1} — melyek *különböző* osztályokba esnének és asszociáltjuk közös volna és pedig az általánosság rovása nélkül P_1 . De ekkor, az asszociált definíciója szerint, P_k össze volna kötve P_2, P_3, \dots, P_{k-1} -gyel és ugyanúgy P_{k+1} is; P_k össze *van* kötve P_{k+1} -gyel a $D(\overline{k-1}, \overline{T+1}+r, k)$ gráf definíciója miatt, tekintve, hogy feltevés szerint P_k és P_{k+1} *különböző* osztályokba tartoznak és a P_2, P_3, \dots, P_{k-1} szögponthok bármely párja össze *van* kötve egymással az első részbe tartozó szögponthok definíciója szerint. Így a $(P_2, P_3, \dots, P_{k-1}, P_k, P_{k+1})$ gráf, tehát egy k -szögponthú teljes gráf, része volna gráfunknak, ami a feltevés ellenére van. Tehát a második részhez tartozó, de *különböző* osztályokba eső szögponthok asszociáltjai *különbözők*. Azt állítjuk továbbá, hogy két oly, a második osztályba tartozó, szögponthoz, melyek *ugyanazon* osztályhoz tartoznak, *ugyanazon* asszociáltak tartoznak. Ugyanis, ha ez nem volna igaz, akkor volna két oly szögponth a második részben — a jelölés alkalmas megválasztásával P_k és P_{k+1} — melyek az első osztályba esnek és asszociáltjaik P_1 , illetve P_2 volnának. Legyen $P_{k+2}, P_{k+3}, \dots, P_{2k-1}$ egy-egy szögponth a második részbe tartozó szögponthok második, harmadik, ..., $(k-1)$ -ik

osztályából. Előbbi észrevételünk alapján P_{k+2}, \dots, P_{2k-1} szög-pontok asszociáltjai különbözők (hiszen P_{k+2}, \dots, P_{2k-1} különböző osztályokba esnek) ezen asszociáltak különböznek P_1 és P_2 -től (hisz P_k és P_{k+1} , melyeknek P_1 , illetve P_2 az asszociáltjai, az első osztályba tartoznak, tehát másba, mint P_{k+2} , vagy P_{k+3}, \dots vagy P_{2k-1}). Vagyis, ha P_k és P_{k+1} asszociáltjai különbözők volnának, akkor a különböző asszociáltak száma legalább k volna; de ez lehetetlen, mert az asszociáltak az első részhez tartozó szögpontok és az első részhez annak definíciója szerint épp $(k-1)$ szögpont tartozik. Azt nyertük tehát, hogy a $\{(k-1)(T+1) + r\}$ -szögpontú, $\alpha)$ és $\beta)$ tulajdonságokkal rendelkező gráf, ha nincs k szögpontú teljes részgráfja, olyan, hogy a második részhez tartozó szögpontok minden osztályához egy közös asszociált tartozik és e közös asszociált mind a $(k-1)$ osztályra más és más. Mármost mind a $(k-1)$ osztályhoz csatoljuk hozzá a bele-tartozó szögpontok közös asszociáltját; így az első részbe tartozó szögpontok pontosan definiált módon «felszívódtak» a $(k-1)$ számú eredeti osztályba. Ekkor az asszociált definíciója alapján a bővített osztályok mindegyikének szintén meglesz az a tulajdonsága, hogy közös osztályba tartozó szögpontpár nincs éllel összekötve. Nyilvánvalóan a bővített osztályok közül az első r számú osztály mindegyikébe épp $(T+2)$ szögpont, a többi $(k-r-1)$ osztály mindegyikébe $(T+1)$ szögpont esik. Ha még belátjuk, hogy bármelyik két különböző bővített osztályból is véve ki egy-egy szögpontot, ezek egymással össze vannak kötve, akkor gráfunk épp a $D(k-1, T+1+r, k)$ gráf, mely $\beta)$ szerint valóban nem tartalmaz k -szögpontú teljes részgráfot. Tehát ezzel I. tétel be lesz bizonyítva, feltéve még természetesen, hogy a tétel a (2) táblázat első oszlopának n -értékeire igaz.

Hogy azonban bármely két oly szögpont, mely különböző bővített osztályokba tartozik, mindig össze van kötve egymással, az előbbieket alapján könnyen belátható. Ha a vizsgálandó két szögpont mindegyike a második részhez tartozott, akkor ez a $D(k-1, T+r, k)$ gráf definíciójából következik. Ha a vizsgálandó szögpontok mindkettője az első osztályba tartozott, akkor ezek,

definíció szerint a $(k-1)$ szögpontú $(P_1, P_2, \dots, P_{k-1})$ teljes részgráf szögpontjai lévén, össze vannak kötve egymással. Ha végül a vizsgálandó szögpontok egyike az első részbe tartozott, másika a másodikba, akkor, mivel e két szögpont a feltevés szerint különböző bővített osztályokba esik, a bővített osztályok definíciója szerint az a szögpont, mely az első részbe tartozott, *nem* asszociáltja annak, amelyik a másodikba tartozott; tehát az asszociált definíciója szerint e két szögpont össze van kötve egymással.

Így tehát csak azt kell még bebizonyítani, hogy a (2) táblázat első oszlopának n -értékeire a tétel igaz. Legyen először $r \neq 0$ és így $T=1$. Ekkor $c)$ alapján

$$\begin{aligned} M_k(k-1+r) &\leq \binom{k-1}{2} + M_k(r) + (k-2)r \leq \\ &\leq \binom{k-1}{2} + \binom{r}{2} + (k-2)r. \end{aligned} \quad (4)$$

Nézzük meg, mikor válhatik a (4) egyenlőtlenség egyenlőséggé. Nyilván akkor és csak akkor, ha az r számú, második részbe tartozó szögpont mindegyike épp a $(k-2)$ első részbe tartozóval van összekötve és a második részbe tartozó szögpontok r -szögpontú teljes részgráfot alkotnak. Egy ilyen gráfban tehát egy második részbe tartozó szögpont asszociáltját ugyanúgy értelmezhetjük, mint az előbb. Pontosan úgy, mint előbb, bebizonyíthatjuk, hogy csak akkor lehetséges, hogy ne legyen a gráfban egy k szögpontú teljes részgráf, ha bármely két oly különböző szögpontnak, melyek a második részhez tartoztak, az asszociáltjai különbözők. (Természetesen ekkor nem mindegyik, első részbe tartozó szögpont lesz asszociált!) A jelölést megválaszthatjuk úgy, hogy P_k asszociáltja legyen P_1 , P_{k+1} -é P_2, \dots, P_{k-1+r} -é pedig P_r ; a $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_{k-1}$ első részbe tartozó szögpontok tehát *nem* asszociáltak. De ekkor egy osztályba véve P_k -t és P_1 -et, P_{k+1} -et, és P_2 -t, \dots , P_{k-1+r} -et és P_r -et, továbbá külön osztályoknak P_{r+1} -et, P_{r+2} -t, \dots , P_{k-1} -et, $(k-1)$ számú osztályt nyertünk, melyek közül az első r osztály mind-

egyike $2 = T + 1$ szögponthoz, a többi $(k - 1 - r)$ osztály mindegyike $1 = T$ számú szögponthoz tartozik. Hogy a fenti feltételeket kielégítő gráfokat a $D(k - 1 + r, k)$ gráffal identifikálhassuk, először azt kell belátni, hogy közös osztályba tartozó szögpontok soha sincsenek összekötve egymással, másodszor, hogy különböző osztályba tartozók viszont mindig. Az első állítást nyilván csak az első r osztályra kell igazolni; ezekre pedig az osztályoknak és az asszociált definíciója alapján az állítás evidens. A második állítás igazolására elég megjegyezni, hogy az osztályok szerkesztése szerint a $(k - 1)$ számú, első részhez tartozott szögponthoz bármely párja egymással össze van kötve, ugyanez áll azon r számú szögpontra, melyek a második részt alkotják; az első és második részbe tartozó szögpontok közül a szerkesztés szerint *csak* azok nincsenek összekötve, melyeknél az első részbe tartozó szögponthoz a másodikba tartozónak asszociáltja. De ezek épp azon szögpontpárok, melyek egy-egy osztályt alkotnak. Tehát $r \neq 0$ esetben a bizonyítás teljesen be van fejezve; ha $r = 0$ és így $T = 2$, a bizonyítás teljesen ugyanígy halad, csak az összes alosztályok két-két szögponthoz tartalmazzanak. A bizonyítás ezzel be van fejezve.

Mielőtt rátérnék — mint az I. §.-ban említettem — a III. tétel bizonyítására, az $n = 2m$, $k = 3$ esetre egy másik, rövidebb bizonyítást közlök. Ezen bizonyítás igen egyszerű lesz és módosításával — az extrém gráf unicitásától eltekintve — az I. tétel bevezethető minden n és k -ra, de számítást igényel és ez az általános esetben meglehetősen áttekinthetetlen. Ez a bizonyítás is teljes indukción alapszik. Ugyanis $m = 2$ -re könnyen belátható, hogy $5 = 2^2 + 1$ él létezése mellett minden 4 szögponthoz gráfban biztosan van teljes háromszög; tegyük fel bebizonyítottunk, hogy egy $n = 2m$ szögponthoz gráfban legfeljebb m^2 számú él húzható meg úgy, hogy ne legyen benne teljes háromszög és vizsgáljuk meg az $n = 2m + 2$ szögponthoz gráfokat. Tekintsünk egy olyan gráfot, melynek $(2m + 2)$ szögponthoz, $M_3(2m + 2)$ éle van és nincs benne teljes háromszög. Vegyünk ki e gráfból egy tetszőleges élt; a jelölést úgy választhatjuk meg, hogy ennek vég-

pontjai P_{2m+1} , ill. P_{2m+2} legyenek. A gráf élei részint oly P_i és P_k szögponthoz kötnek össze egymással, melyre $\max(i, k) \leq 2m$, részint olyanokat, melyekre $\min(i, k) \leq 2m < \max(i, k)$ végül olyanokat, melyekre $\min(i, k) > 2m$. Utolsó típusú él persze csak egy van; első típusú él az indukciós feltevés miatt m^2 . A második típusú élek száma $\leq 2m$; u. i. a P_1, P_2, \dots, P_{2m} szögponthoz egyike sem lehet úgy P_{2m+1} -el, mint P_{2m+2} -vel összekötve (mert ha például P_1 mindkettővel össze volna kötve; akkor P_{2m+1} és P_{2m+2} definíciója szerint a $(P_1, P_{2m+1}, P_{2m+2})$ gráf része volna gráfunknak, annak definíciója ellenére). Tehát

$$M_3(2m+2) \leq m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2. \quad Q. e. d.$$

Ezután rátérünk a III. tétel bizonyítására, mely az I. tételből igen egyszerűen fog következni.

III. tétel. Az n szögponthú teljes gráfban azon minimális számú élből álló élrendszer, mely minden k szögponthú teljes részgráfból legalább egy élt tartalmaz, az I. §.-ban értelmezett $D(n, k)$ gráf kiegészítő gráfja és csak ez adja.

E tétel következőképp bizonyítható. Legyen egy minimális élszámú, kívánt tulajdonságú élrendszer E és éleinek száma x . Tekintsük az E gráfnak \bar{E} kiegészítő gráfját; \bar{E} éleinek száma tehát $\binom{n}{2} - x$. Minden olyan élrendszer, amely minden k -szögponthú részgráfból legalább egy élt tartalmaz, nyilván olyan, hogy a kiegészítő gráfjában nincs k szögponthú teljes részgráf; mivel E ezen élrendszerek közül a minimális élszámú, azért \bar{E} azon maximális élszámú gráf lesz, melynek nincs k -szögponthú teljes részgráfja. Tehát az I. tétel szerint az \bar{E} gráf azonos $D(n, k)$ -val, amivel már a III. tétel be is van bizonyítva.

III. §.

Most rátérünk a megszámlálhatóan végtelen sok szögponthú gráfokra.

II. tétel. A megszámlálhatóan végtelen sok szögponthú tartalmazó végtelen A gráfról, melynek szögponthai P_1, P_2, \dots

feltesszük, hogy van oly 1-nél nagyobb d egész szám, hogy bárhogyan veszünk is ki A szögpontjai közül d számú különbözőt, ezek között van legalább két oly szögpont, melyeket összekötő él benne van A -ban. Ekkor A -nak van legalább egy végtelen sok szögpontú, teljes részgráfja.

A tételt d -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be. $d = 2$ -re a tétel nyilván igaz. Tegyük fel, hogy a tétel $d = l$ -re be van bizonyítva és vizsgáljuk a $d = l + 1$ esetet. Legyen P_1 a gráf egy tetszőleges szögpontja. Tegyük fel először, hogy létezik végtelen sok P_{i_1}, P_{i_2}, \dots különböző pont melyek A -ban P_1 -gyel nincsenek összekötve. Ekkor azt állítjuk, hogy azon A_1 végtelen részgráf, melynek szögpontjai épp az előbbi P_{i_1}, P_{i_2}, \dots szögpontok, olyan tulajdonságú, hogy szögpontjai közül bárhogy véve is ki l számú különbözőt, ezek között van legalább két oly szögpont, melyeket összekötő él benne van A_1 -ben. Ugyanis, ha például a $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_l}$ szögpontok semelyik párja sem volna az A_1 gráfban összekötve, akkor a $P_1, P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_l}$ szögpontoknak, tehát $(l + 1)$ különböző szögpontnak, nyilván az a tulajdonsága volna, hogy semelyik szögpontpár sincs ezek közül A -ban összekötve; de ez az A gráf definíciója ellenére van. Ekkor azonban az A_1 gráf az indukciós feltevés alapján tartalmaz végtelen sok szögpontú teljes részgráfot; tehát az A gráf a fortiori tartalmaz ilyen. Ílymódon csak azon esetet kell még megvizsgálni, amikor van oly ν_1 egész szám, hogy a $(P_1, P_{\nu_1}), (P_1, P_{\nu_1+1}), \dots, (P_1, P_n), \dots$ élek *mind* szerepelnek A -ban. Ekkor a P_1 szögpontra ugyanazt a műveletet végezzük, mint előbb P_1 -re és ugyanúgy nyerjük egy végtelen sok szögpontú teljes részgráf létezését az indukciós feltevés alapján, kivéve ismét azt az esetet, ha van oly $\nu_2 > \nu_1$ egész szám, hogy a $(P_{\nu_1}, P_{\nu_2}), (P_{\nu_1}, P_{\nu_2+1}), \dots, (P_{\nu_1}, P_n), \dots$ élek *mind* szerepelnek A -ban. Ezen konstrukció vagy μ véges sok lépés után megszakad vagy nem. Ha megszakad, akkor a $(P_{\nu_\mu}, P_{\nu_\mu+1}), (P_{\nu_\mu}, P_{\nu_\mu+2}), \dots$ élek között van végtelen sok, mely *nem* éle A -nak; ekkor az indukciós feltevés alapján, mint előbb, következik, hogy a $P_{\nu_\mu+1}, P_{\nu_\mu+2}, \dots$ szögpontú gráf tartalmaz végtelen sok szögpontú teljes rész-

gráfot, tehát a fortiori A is. Ha viszont nem szakad meg, akkor nyilván P_1, P_2, P_3, \dots szögponút teljes gráf maga egy végtelen sok szögponút teljes részgráfja A -nak. Ezzel a II. tétel be van bizonyítva.

★

Megjegyzés a korrekturánál. Amint KÖNIG DÉNES professzor úr szíves volt megjegyezni, a fenti $D(n, k)$ gráf a következő elegáns módon értelmezhető. Számozzunk meg n pontot rendre az $1, 2, 3, \dots, n$ számokkal és azon szögponutokat kössük össze, amelyekhez rendelt számok mod $(k-1)$ inkongruensek. A kapott gráf épp $D(n, k)$.

Továbbá KRAUSZ JÓZSEF tanár úr szíves közléséből arról értesülök, hogy $d_k(n)$ -nek a 438. lapon adott értékét $k=3$ esetre már 1907-ben megtalálta W. MANTEL (Wiskundige Opgaven, 10. k., 60—61. o.). Dolgozatát csak a Fortschritte d. Math. (38. k., 270. o.) referátumából ismerem.

Turán Pál.

EINE EXTREMALAUFGABE AUS DER GRAPHEN-THEORIE.

Das behandelte Problem lautet folgendermassen. Es seien n und k gegebene natürliche Zahlen ($2 \leq k \leq n$); wie viele Kanten kann ein Graph mit n Knotenpunkten, in dem jedes Knotenpunktpaar durch höchstens eine Kante verbunden ist, höchstens enthalten, wenn er keinen vollständigen Teilgraphen mit k Knotenpunkten enthält? (Ein Graph heisst bekanntlich vollständig, wenn je zwei seiner Knotenpunkte durch eine und nur eine Kante verbunden sind). Es wird zunächst ein dem gegebenen Paar (n, k) natürlicher Zahlen entsprechende Graph $D(n, k)$ angegeben, der — in der eleganten Formulierung von Prof. D. KÖNIG — folgendermassen definiert werden kann: wir numerieren n Punkte der Reihe nach mit $1, 2, \dots, n$ und verbinden diejenige und nur diejenige Punkte miteinander, denen mod $(k-1)$ inkongruente Zahlen zugeordnet wurden. Es wird bewiesen, dass der so entstehende Graph $D(n, k)$ (für $n=7, k=4$ s. die Figur) die

Lösung, und zwar die einzige Lösung der obigen Extremalaufgabe liefert. Die Kantenanzahl dieses Graphen beträgt:

$$\frac{k-2}{2(k-1)} (n^2 - r^2) + \binom{r}{2},$$

wo r durch

$$n \equiv r \pmod{k-1}, \quad 0 \leq r < k-1$$

definiert ist. [Für $k=3$ wurde dieser Satz schon 1907. von W. MANTEL gefunden (s. Fortschritte d. Math., B. 38, S. 270)]. Die hiedurch gelöste Aufgabe kann man — in rein kombinatorischer Fassung — auch folgendermassen formulieren. Es soll eine möglichst kleine Menge M von Kombinationen zweiter Klasse (ohne Wiederholung) aus n Elementen angegeben werden, so dass jede Kombination k -ter Klasse (ohne Wiederholung) dieser n Elemente wenigstens ein Element aus M enthält.

Über unendliche Graphen wird folgender Satz bewiesen. Ein Graph mit abzählbar unendlichvielen Knotenpunkten besitzt stets einen unendlichen vollständigen Teilgraphen, wenn für eine natürliche Zahl k folgende Bedingung erfüllt ist: werden k Knotenpunkte des Graphen in beliebiger Weise angegeben, so gibt es unter ihnen stets wenigstens zwei solche Knotenpunkte, die durch eine Kante des Graphen verbunden sind. Für $k=3$ stammt dieser Satz von Herrn G. SZEKERES, der durch seine, das BURNSIDE-sche Problem behandelnde gruppentheoretische Untersuchungen zu solchen Graphen geführt wurde.

Paul Turán.

A JACOBI-POLINÓMOK ELMÉLETEHEZ.

Bevezetés.

A JACOBI-féle vagy *hipergeometrikus* polinóмок, mint azt nevük is jelzi, szoros összefüggésben állanak a (GAUSS-féle) *hipergeometrikus* függvényekkel, melyeknek definíciója a következő:

$$F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n, \quad (0.1)$$

ahol $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, $(a)_0 = 1$. Itt az a, b, c valós vagy nem valós paraméterek; ha $R(c-a-b) > 0$, az F sor a $|x| \leq 1$ tartományban abszolút összetartó. Ennyi itt elegendő is a *hipergeometrikus* függvényről.

A JACOBI-polinóмокra több különböző definíció ismeretes és van használatban. Mi azt fogadjuk el, amely — a *hipergeometrikus* függvény segítségével — az n -edfokú JACOBI-polinóмокot a következőképen fejezi ki:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F\left(n+\alpha+\beta+1, -n; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (0.2)$$

($|x| \leq 1$)

A klasszikus JACOBI-polinóмок fontos tulajdonságai (ezek között is elsősorban ortogonalitásuk) miatt már régóta hasznos segédeszközül szolgálnak a matematikai analízisben és önmagukban is sok kutatásnak képezték tárgyát. SZEGŐ GÁBOR nemrég megjelent könyvében¹ nagy teret szentel e többtagúak ismer-

¹ G. SZEGŐ, *Orthogonal Polynomials*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 23. 1939. (Chapter IV).

tetésének és pedig úgy az alapvető tulajdonságok, mint a gyökök eloszlása és sorbafejtések tekintetében.

Dolgozatunkban tárgyalt főbb kérdések a következők: A 2. §-ban új generátorfüggvényeket bizonyítunk be, melyek a JACOBI-polinómak eddig ismert generátor-függvényénél jóval egyszerűbbek és gyakorlati szempontból is hasznosabbak. Említsük meg a (3.16) szorzat-generátorfüggvényt is, mint a LAGUERRE-polinómak ú. n. HILLE—HARDY-tételének általánosítását. Egyébként a 8. §-ban részletesebben is foglalkozunk a JACOBI-, illetőleg LAGUERRE- és HERMITE-polinómak összefüggésével. Itt különösen a (8.8) egyenletet emeljük ki. A 4. és 5. §-ban ú. n. multiplikáció-tételeket vezetünk le és ezek alkalmazásaként megállapítjuk a $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ polinómak $P_r^{(\gamma, \delta)}(x)$ -szerinti sorbafejtését. Ez a képlet sok igen fontos speciális esetet tartalmaz. Az utolsó fejezetben végül a JACOBI-polinómak egy általánosítását adjuk két változó esetére, az APPELL-féle hipergeometrikus függvények segítségével. Általában, a dolgozat szinte minden eredménye és a bizonyítások legnagyobb része is szoros összefüggésben áll a hipergeometrikus függvények elméletével.

Bevezetésképen — SZEÖ idézett könyve alapján — ideiktatjuk a továbbiakhoz szükséges képleteket, annak a hangsúlyozása mellett, hogy e dolgozat célja nem újabb összefoglaló tárgyalását adni az említett polinómak elméletének, hanem — tudomásunk szerint — új eredményekkel gazdagítani ezt a már amúgy is igen nagy kiterjedésű elméletet. Így tehát kizárólag csak a felhasználandó összefüggéseket kölcsönözzük más szerzők kézikönyveiből, illetőleg dolgozataiból.

1. §. Definíciók és ismert összefüggések.

A (0.2) képlettel megadott polinómak egy másik fontos kifejezése a következő

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}, \quad (1.1)$$

mely az ismeretes RODRIGUES-féle

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \} \quad (1.2)$$

képlet közvetlen következménye.

E polinóмок legfontosabb tulajdonságát, az ortogonalitást, a következő összefüggés mutatja:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \\ & = \delta_{mn} \cdot \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \equiv \delta_{mn} \cdot h_n^{(\alpha, \beta)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

ahol, szokásos jelöléssel, $\delta_{mn} = 0$, ha $m \neq n$ és $\delta_{nn} = 1$. Itt és az alábbiakban mindig, az α és β paraméterek eleget tesznek az $\alpha > -1$ és $\beta > -1$ (illetőleg általánosabban az $R(\alpha) > -1$, $R(\beta) > -1$) egyenlőtlenségeknek.

Egy másik, nagyon fontos képlet szerint

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^r \{ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \} = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r} P_{n-r}^{(\alpha+r, \beta+r)}(x), \quad (1.4)$$

($r=0, 1, 2, \dots, n$)

továbbá

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x). \quad (1.5)$$

A JACOBI-polinóмок egy nagyon jelentős alcsoportja az ú. n. *ultraszférikus* (vagy GEGENBAUER-féle) polinóмок osztálya, melyek az $\alpha = \beta$ esetnek felelnek meg. A rájuk vonatkozó képletek könnyen levezethetők az előbbiekből, de fontosságuk miatt inkább írjuk le ezeket is részletesen. A definíció:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} P_n^{(\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(x). \quad (1.6)$$

($R(\lambda) > -\frac{1}{2}$)

Itt jegyezzük meg azt az igen fontos tényt is, hogy az $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ esetben (illetőleg (1.5) szerint a $\beta = \pm \frac{1}{2}$ esetben is) a JACOBI-polinóмок ultraszférikus polinóмокra redukálódnak:

$$\begin{aligned}
 P_{2n}^{(\lambda)}(x) &= (-1)^n 2^{2n} \frac{n!}{(2n)!} (\lambda)_n P_n^{(-\frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(1 - 2x^2) = \\
 &= (-1)^n \frac{(\lambda)_n}{n!} F(-n, n + \lambda; \frac{1}{2}; x^2),
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
 P_{2n+1}^{(\lambda)}(x) &= (-1)^n 2^{2n+1} \frac{n!}{(2n+1)!} \lambda(\lambda+1)_n x P_n^{(\frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(1 - 2x^2) = \\
 &= (-1)^n 2\lambda \frac{(\lambda+1)_n}{n!} x F(-n, n + \lambda + 1; \frac{3}{2}; x^2).
 \end{aligned}$$

Ezen polinómok explicit alakja is ismeretes:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{(\lambda)_{n-r}}{(n-2r)! r!} (2x)^{n-2r}. \tag{1.8}$$

Az ortogonalitás kifejezése itt

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_m^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(x) dx &= \\
 &= \delta_{mn} \frac{2\pi}{2^{2\lambda} [\Gamma(\lambda)]^2 (n+\lambda)} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!} \equiv \delta_{mn} \cdot h_n^{(\lambda)};
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

két másik fontos képlet pedig:

$$\begin{aligned}
 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{(-2)^n}{n!} \frac{(\lambda)_n (2\lambda)_n}{(2\lambda)_{2n}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\} \equiv \\
 &\equiv h_n^{(\lambda)} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

és

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r \{P_n^{(\lambda)}(x)\} = 2^r (\lambda)_r P_{n-r}^{(\lambda+r)}(x). \tag{1.11}$$

($r=0, 1, 2, \dots, n$)

Hasznosak még a

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{1}{2^n} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_n}{n!}, \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} P_n^{(\lambda)}(x) &= 2^n \frac{(\lambda)_n}{n!}, \\
 \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^n P_n^{(\alpha, \beta)}\left(1 - \frac{x}{\mu}\right) &= (-1)^n \frac{(n+\alpha+\beta+1)_n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

és

$$P_n^{(\alpha, -n)}(x) = \frac{(a+1)_n}{n!} \left(\frac{1+x}{2} \right)^n \quad (1.13)$$

összefüggések is.

Ezen összefüggések felsorolását néhány speciális esettel és pedig speciális ultraszférikus polinóмок említésével zárjuk:

$$\text{ha } \lambda = 0, \lim \lambda^{-1} P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{2}{n} T_n(x), \quad T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$$

(elsőfajú CSEBISEV-polinóмок),

ha $\lambda = -m$, $m = 0, 1, 2, \dots$ újból $P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$ JACOBI-polinóмок-
kat kapunk, $\alpha = -m - \frac{1}{2}$ paraméterrel,

$$\text{ha } \lambda = \frac{1}{2}, P_n^{(\frac{1}{2})}(x) = P_n(x) \text{ (LEGENDRE-polinóмок)},$$

ha $\lambda = 1$, $P_n^{(1)}(x) = U_n(x)$, $U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ (másod-
fajú CSEBISEV-polinóмок).

2. §. Generátor-függvények.

A JACOBI-polinóмокra a következő generátor-függvény ismeretes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n = 2^{a+\beta} (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} \{1-t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-\alpha} \{1+t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-\beta}. \quad (2.1)$$

Erre az igen bonyolult alakú összefüggésre SZEGŐ idézett műve² négy bizonyítást (illetőleg bizonyítási módszert) ad, melyeknek egyike sem elemi. E generátor-függvény gyakorlati alkalmazás szempontjából nem jelentős. A (2.1) képlet az általános ultraszférikus polinóмок esetében sem egyszerűsödik, de ez utóbbiakra, $\lambda \neq -m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) paraméter-érték mellett, a következő sokkal egyszerűbb generátor-függvénnyel rendelkezünk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x) t^n = (1-2xt+t^2)^{-\lambda}. \quad (2.2)$$

A (2.1) és (2.2) generátor-függvények — mint azt SZEGŐ is megjegyzi — kizárólag csak az $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2} = 0$ paraméter-

² G. SZEGŐ, loc. cit. §. 4.4.

értékek (azaz a LEGENDRE-polinómak) esetében azonosak. Kézenfekvő tehát a gondolat, hogy oly generátor-függvényt keressünk, mely lehetőleg egyszerű alakján kívül avval az előnnyel is rendelkezik, hogy megadja az átmenetet a JACOBI-polinómak generátor-függvénye és az ultraszférikus polinómak (2.2) generátor-függvénye között.

Vizsgáljuk a következő összeget:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n F(a+n, -n; c; x).$$

A (0.1) definíció szerint ez az összeg a következő módon írható:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \frac{(a)_n (a+n)_r (-n)_r}{(c)_r n! r!} x^r z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \frac{(a)_{n+r}}{(c)_r r! (n-r)!} (-xz)^r z^n = \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r+s}}{(c)_r r! s!} (-xz)^r z^s = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r}}{(c)_r r!} (-xz)^r \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a+2r)_s}{s!} z^s. \end{aligned}$$

Az s szerinti összeg abszolút összetartó, ha $|z| < 1$ és értéke ebben az esetben $(1-z)^{-a-2r}$ úgy, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n F(a+n, -n; c; x) = (1-z)^{-a} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r}}{(c)_r r!} \left(-\frac{xz}{(1-z)^2} \right)^r.$$

De, amint ez könnyen igazolható,

$$(a)_{2r} = 2^{2r} \left(\frac{a}{2} \right)_r \left(\frac{a+1}{2} \right)_r, \quad (2.3)$$

tehát az r szerinti összeg a (0.1) szerint éppen egy F függvény. Végül is a keresett összeg

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n F(a+n, -n; c; x) = \\ & = (1-z)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}; c; -\frac{4xz}{(1-z)^2} \right). \quad (|z| < 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Alkalmazva ezt az összefüggést a (0.2) által meghatározott JACOBI-polinómokra, azt találjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+\beta+1)_n}{(a+1)_n} t^n P_n^{(a, \beta)}(x) =$$

$$= (1-t)^{-a-\beta-1} F\left(\frac{a+\beta+1}{2}, \frac{a+\beta}{2}+1; a+1; -\frac{2t(1-x)}{(1-t)^2}\right). \quad (2.5)$$

($|t| < 1$)

Ez a jelzett generátor-függvény. Ha a kívánt egyszerűségnek nem is tesz teljes egészében eleget, amennyiben az összeget nem egyszerű explicit függvénnyel adja meg, a második követelménynek viszont megfelel. Ugyanis, ha $a=\beta$, a (2.5) alatti F függvény $(1-2xt+t^2)^{-a-\frac{1}{2}}$ -vel egyenlő, a baloldalon pedig épen a (2.2) alatti összeg szerepel, $a=\lambda-\frac{1}{2}$ esetében. Ez rögtön látható akkor is, ha (2.5)-öt a következő, kissé módosított, alakban írjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+\beta+1)_n}{(a+1)_n} t^n P_n^{(a, \beta)}(x) =$$

$$= (1-t)^{\beta-a} (1-2xt+t^2)^{-\beta-\frac{1}{2}} F\left(\frac{a-\beta+1}{2}, \frac{a-\beta}{2}; a+1; -\frac{2t(1-x)}{(1-t)^2}\right). \quad (2.6)$$

Említsünk meg még egy speciális esetet. Ha $\beta=a+1$, (2.6) szerint szintén egyszerűbb összefüggést nyerünk, mint amit (2.1) adna, és pedig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a+2)_n}{(a+1)_n} t^n P_n^{(a, a+1)}(x) = (1-t)(1-2xt+t^2)^{-a-\frac{3}{2}}. \quad (2.7)$$

Innen például az ú. n. «vegyes» JACOBI-polinómok ($a=-\frac{1}{2}, \beta=+\frac{1}{2}$) generátor-függvénye:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1-t}{1-2xt+t^2}.$$

Megjegyezzük még, hogy a paraméterekre az $R(a) > -1$ és $R(a+\beta) > -1$ megszorításokat kell tennünk. A (2.5)-ben szereplő

F sor összetartási feltétele, a bevezetés szerint, az $R(\beta) < -\frac{1}{2}$ egyenlőtlenség. Ezt azonban, mivel csak a konvergencia-kör kerületén szükséges, itt elhanyagolhatjuk. A (2.5) generátorfüggvény érvényes $x = 1$ -re és ((1.5) alapján) $x = -1$ -re is. A 3. §-ban levezetünk egy másik, (2.5)-höz hasonló, de sokkal bonyolultabb generátorfüggvényt is. A (2.5)-ből elég egyszerűen nyerhetjük a $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ explicit kifejezését, ha a jobboldalt t hatványai szerinti sorba fejtjük ki és a két oldalon egyenlővé tesszük a t megfelelő hatványainak együtthatóit. Ebből a szempontból azonban sokkal célravezetőbb az alábbiakban adandó generátorfüggvények használata.

Egy előbbi dolgozatban találtuk, mint általános eredményeink egy különleges esetét, a következő összefüggést:³

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h)_n}{n!} z^n F(a, -n; c; x) = (1-z)^{-h} F\left(a, h; c; -\frac{xz}{1-z}\right). \quad (2.8)$$

($|z| < 1$)

Teljesség kedvéért ennek itt a (2.5) levezetéséhez hasonló direkt bizonyítását adjuk. A (2.8) baloldalán álló összeg

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \frac{(h)_n (a)_r (-n)_r}{(c)_r n! r!} x^r z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \frac{(h)_n (a)_r}{(c)_r r! (n-r)!} (-x)^r z^n = \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_{r+s} (a)_r}{(c)_r r! s!} (-xz)^r z^s = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(h)_r (a)_r}{(c)_r r!} (-xz)^r \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h+r)_s}{s!} z^s. \end{aligned}$$

Ha $|z| < 1$, az s szerinti összeg $(1-z)^{-h-r}$, tehát (2.8) baloldala:

$$(1-z)^{-h} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (h)_r}{(c)_r r!} \left(-\frac{xz}{1-z}\right)^r,$$

ami (0.1) szerint épen a (2.8) jobboldalán álló kifejezés, q. e. d.

Most már, ha ebben az összefüggésben $h = c = a + 1$,

³ E. FELDHEIM, Contributions à la théorie des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables I—II—III. Sajtó alatt (Recueil Math.).

$\alpha = \alpha + \beta + 1$, úgy a (0.2) szerint a következő eredményt találjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) t^n = (1-t)^{\beta} \left(1 - t \frac{1+x}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1}, \quad (2.9)$$

($|t| < 1$)

Ezzel megtaláltuk a JACOBI-polinómak keresett egyszerű generátorfüggvényét. Ez az explicit alak felírásához igen alkalmas, de az a hátránya, hogy az összegezési index a paraméter-értékben is szerepel, ami által az ortogonalitás erre az összefüggésre nézve elveszti a jelentőségét. Másrészt a (2.9) speciális JACOBI-polinómkra sem alkalmazható (az $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ eset kivételével).

A (2.9)-hez hasonló a következő generátorfüggvény, mely azonban nincs korlátozva a t abszolút értékben 1-nél kisebb értékeire: legyen (2.8)-ban $h = \frac{1}{\varepsilon}$, $z = \varepsilon t$ és $\varepsilon \rightarrow 0$. Az F hipergeometrikus függvény tudvalevőleg az ${}_1F_1$ (konfluens, vagy KUMMER-féle) hipergeometrikus függvényre redukálódik, és a szóbanforgó összefüggés

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{(a+1)_n} P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) = e^{t \frac{1+x}{2}} {}_1F_1\left(-\beta; \alpha+1; t \frac{1-x}{2}\right) \quad (2.10)$$

($Re > -1$)

lesz. Megjegyezzük még, hogy

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} x^n.$$

Az ultraszférikus polinómkra vonatkozó generátorfüggvényeket (2.9) és (2.10) az (1.7) összefüggések segítségével rögtön megadja. Itt azonban a páros, illetve páratlan fokú polinómkra különböző eredményeket találunk. Így (2.9)-ből

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (1-\lambda)_n} t^n P_{2n}^{(\lambda-n)}(x) &= \\ &= (1-t)^{\lambda-\frac{1}{2}} [1-t(1-x^2)]^{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(1 + \frac{tx^2}{1-t}\right)^{-\lambda}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n! (1-\lambda)_n} t^n P_{2n+1}^{(\lambda-n)}(x) &= \\ &= \lambda x (1-t)^{\lambda-\frac{1}{2}} [1-t(1-x^2)]^{-\lambda-1}. \end{aligned}$$

($|t| < 1$)

A (2.10) generátor-függvény ultraszférikus esetben a következő:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(1-\lambda)_n} P_{2n}^{(\lambda-n)}(x) = e^t {}_1F_1\left(\lambda; \frac{1}{2}; -tx^2\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(1-\lambda)_n} P_{2n+1}^{(\lambda-n)}(x) = 2\lambda x \cdot e^t {}_1F_1\left(\lambda+1; \frac{3}{2}; -tx^2\right).$$
(2.12)

Itt fel kell tételezni, hogy $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A 9. §-ban olyan általánosabb generátor-függvényt vezetünk le, mely tartalmazza a (2.9) és (2.10) összefüggéseket, mint különleges eseteket. Megjegyezzük még, hogy az ismeretes határeset-képletek segítségével az eddig levezetett generátor-függvényekből könnyen nyerhetők a LAGUERRE- és HERMITE-polinómak klasszikus generátor-függvényei is (lásd 8. §.).

3. §. Szorzat generátor-függvénye.

Az ortogonális sorok elméletében fontos szerepet játszik az ü. n. ortogonális mag-függvény, a különböző argumentumú, egyenlő fokszámú két ortonormalizált polinóm szorzatának generátor-függvénye, mely a JACOBI-polinómak esetében a következő:

$$K(x, y; t) =$$

$$= (1-x)^{\frac{\alpha}{2}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}}(1-y)^{\frac{\alpha}{2}}(1+y)^{\frac{\beta}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(y),$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{h_n^{(\alpha, \beta)}}, \quad |t| < 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{és} \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Ezt az összeget G. N. WATSON vizsgálta meg⁴ és igen bonyolult integrálkifejezést adott rá. Az ő eredménye még speciális esetekben (ultraszférikus, vagy akár csak a LEGENDRE-

⁴ G. N. WATSON, Notes on generating functions of polynomials (3)–(4). Journal of the London Math. Soc. vol. 8, 1933, p. 289–292; vol. 9, 1934, p. 22–28.

polinómokra) sem egyszerűsödik. Újabban ERDÉLYI ARTUR foglalkozott a kérdéssel,⁵ aki a $K(x, y; t)$ kifejezést a kétváltozós APPELL-féle F_2 hipergeometrikus függvény segítségével számította ki. Legegyszerűbb talán még W. N. BAILEY⁶ eredménye, mely az említett összeget az APPELL-féle F_4 hipergeometrikus függvényvel adja meg. Ez áll legközelebb a jelen dolgozat gondolatmenetéhez. Mi az ő eredményét általánosítjuk, helyesebben a BAILEY-képletet mint általánosabb és más szempontból is említésreméltó eredményünk különleges esetét újból megtaláljuk. Másrészt a (2.9)-cel rokon más generátor-függvényt is levezetünk a JACOBI-polinomok szorzatára vonatkozóan.

G. N. WATSON egy eredményéből indulunk ki, amely szerint⁷

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(y) = (-1)^n \frac{(\alpha+1)_n (\beta+1)_n}{(n!)^2} \cdot F_4 \left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1, \beta+1; \frac{(1-x)(1-y)}{4}, \frac{(1+x)(1+y)}{4} \right). \quad (3.1)$$

A jobboldalon álló kétváltozós APPELL-féle F_4 hipergeometrikus függvény értelmezése:

$$F_4(a, b; c, c'; x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s} (b)_{r+s}}{(c)_r (c')_s r! s!} x^r y^s; \quad (3.2)$$

e végtelen kettős sor összetartásának feltétele: $|\sqrt{x}| + |\sqrt{y}| < 1$.

BAILEY szintén a (3.1) képletből indul ki tételének bizonyításánál. Mivel mi nem akarjuk megismételni az ő eljárását, illetőleg bizonyítását, már itt közöljük említett általános eredményünket, melyet azonban csak a 9. §-ban fogunk bebizonyítani.

⁵ A. ERDÉLYI, Über die erzeugende Funktion der Jacobischen Polynomen. Ibid. vol. 12. 1937. p. 56—57.

⁶ W. N. BAILEY, The generating functions of Jacobi-polynomials. Ibid. vol. 13. 1938.

⁷ G. N. WATSON, A Treatise on the Theory of Bessel functions. Cambridge. 1922. (lásd 370—372. oldal), vagy l. c. 4, (4).

Tehát, ha a és b tetszőleges paraméterek, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ és $|t| < 1$, úgy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(a+\beta+1)_n(a)_n(b)_n}{(a+1)_n(\beta+1)_n(a+\beta+1)_{2n}} t^n \cdot$$

$$\cdot F(a+n, b+n; a+\beta+2+2n; t) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \quad (3.3)$$

$$= F_4\left(a, b; a+1, \beta+1; t \frac{(1-x)(1-y)}{4}, t \frac{(1+x)(1+y)}{4}\right).$$

Ha $t=1$, a és b úgy választandó, hogy a baloldali összegben szereplő F sor összetartó legyen, tehát $a+b < a+\beta+2$. Ennek a feltételnek eleget tesz például az $a = -m$, $b = m + a + \beta + 1$ választás (m nem negatív egész szám). Ekkor (3.3) a WATSON-féle (3.1) transzformációra vezethető vissza. Ugyanis, ha megemlítjük a következő ismert és fontos összefüggéseket

$$F(\gamma, \delta; \varepsilon; 1) = \frac{\Gamma(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon - \gamma - \delta)}{\Gamma(\varepsilon - \gamma) \Gamma(\varepsilon - \delta)}, \text{ ha } R(\varepsilon - \gamma - \delta) > 0 \text{ (GAUSS)} \quad (3.4)$$

és

$$(-\gamma)_n = \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-n)}, \text{ azaz például } (-m)_n = \frac{(-1)^n m!}{(m-n)!}, \quad (3.5)$$

az említett a és b értékekkel

$$(a)_n F(a+n, b+n; a+\beta+2+2n; 1) =$$

$$= \frac{(-1)^n m! (a+\beta+2)_{2n}}{(m-n)! (n-m)! (a+\beta+2)_{m+n}}.$$

Az n szerinti összegezésnél ez a kifejezés akkor és csak akkor nem azonosan zérus, ha $n=m$ és így valóban a (3.1) összefüggést nyerjük.

Az a és b paraméterek más megfelelő választásával fontos összefüggéseket vezethetünk le az általános (3.3) eredményből. Itt csak az említett BAILEY-féle generátor-függvényt adjuk, más érdekes alkalmazásra majd a 9. §-ban térünk rá.

Legyen tehát a (3.3)-ban

$$a = \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \quad b = \frac{\alpha+\beta}{2} + 1, \quad \text{és} \quad t = \frac{4z}{(1+z)^2} \quad (|t| < 1)$$

A baloldalon szereplő F sor ebben az esetben könnyen összegezhető. Az írás egyszerűsítése kedvéért keressük az

$$A \equiv F(a, a + \tfrac{1}{2}; 2a + 1; \sin^2 2\theta)$$

sor értékét. Ismert tétel szerint A így is írható:

$$A = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2a+1)}{\Gamma(a+1) \Gamma(a+\frac{1}{2})} F(a, a + \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}; \cos^2 2\theta) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}) \Gamma(2a+1)}{\Gamma(a) \Gamma(a+\frac{1}{2})} \cos 2\theta \cdot F(a+1, a + \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; \cos^2 2\theta).$$

A (2.3) alapján

$$F(a, a + \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}; \cos^2 2\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2a)_{2k}}{(2k)!} \cos^{2k} 2\theta,$$

$$F(a+1, a + \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; \cos^2 2\theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2a+1)_{2k}}{(2k+1)!} \cos^{2k} 2\theta,$$

úgy, hogy

$$\begin{aligned} A &= 2^{2a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2a)_{2k}}{(2k)!} \cos^{2k} 2\theta - 2^{2a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2a)_{2k+1}}{(2k+1)!} \cos^{2k+1} 2\theta = \\ &= 2^{2a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2a)_k}{k!} \cos^k 2\theta \end{aligned}$$

és

$$A \equiv F(a, a + \tfrac{1}{2}; 2a + 1; \sin^2 2\theta) = \cos^{-4a} \theta. \quad (3.6)$$

Tehát az a fenti értékével és $z = \operatorname{tg}^2 \theta$ -val, $A = (1+z)^{2a}$. Végül is a (3.3)-ban szereplő F sor értéke $(1+z)^{2n+a+\beta+1}$. A (2.3) ismételt alkalmazásával így a (3.3)-ból rögtön nyerjük a szóbanforgó szorzat-generátorfüggvényt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! (a+\beta+1)_n}{(a+1)_n (\beta+1)_n} z^n P_n^{(a, \beta)}(x) P_n^{(a, \beta)}(y) = (1+z)^{-a-\beta-1}. \quad (3.7)$$

$$\cdot F_4 \left(\frac{a+\beta+1}{2}, \frac{a+\beta}{2} + 1; a+1, \beta+1; \frac{z(1-x)(1-y)}{(1+z)^2}, \frac{z(1+x)(1+y)}{(1+z)^2} \right).$$

Az itt kiszámított összegben levő együttható azonban különbözik a 3. § elején jelzett generátor-sor $c_n = 1/h_n^{(a, \beta)}$ együtthatójától.

BAILEY ezen úgy segít, hogy a (3.7) mindkét oldalát megszorozza $z^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}$ -vel és z szerint differenciál. Így épen a keresett együtthatót kapja meg. Írjuk még ide, teljesség kedvéért, ezt az összefüggést is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \frac{1-z}{(1+z)^{\alpha+\beta+2}} \cdot F_4\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}, \frac{\alpha+\beta+3}{2}; \alpha+1, \beta+1; \frac{z(1-x)(1-y)}{(1+z)^2}, \frac{z(1+x)(1+y)}{(1+z)^2}\right). \quad (3.8)$$

Itt is feltételezzük, hogy $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Mivel az ultraszférikus polinómokra ezek a generátor-függvények nem egyszerűsödnek lényegesen, részletes leírásukat itt mellőzzük.

Rátérhetünk most már a (2.5) generátorfüggvény második levezetésére. Legyen a (3.7) összefüggésben $y = -1$. A (0.2) és (1.5) képletek alapján a baloldal rögtön a (2.5) baloldalát adja, az F_4 függvény egyik változója pedig 0 lévén, a (3.2) szerint szintén a (2.5)-nek megfelelő F függvényre redukálódik. Ezzel a bizonyítás teljes is.

A 2. §-ban jelzett újabb generátor-függvény szintén a (3.7)-ből nyerhető, a következő módon. Írjunk itt z helyébe $\frac{z}{y}$ -t és legyen $y \rightarrow \infty$. Az (1.12) szerint azt találjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+1)_{2n}}{(\alpha+1)_n (\beta+1)_n} z^n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = F_4\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}+1; \alpha+1, \beta+1; -2z(1-x), 2z(1+x)\right). \quad (3.9)$$

Ezt az összefüggést később még felhasználjuk, most pedig rátérünk másodikfajta generátor-függvényünk levezetésére.

A (2.8) összeg általánosításaként keressük a következő összeget:

$$K(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n}{n!} F(b, -n; c; \xi) F(b', -n; c; \eta) z^n, \text{ ha } |z| < 1. \quad (3.10)$$

Az itt szereplő összetartó (véges vagy végtelen) sorok megfelelő átrendezése révén könnyen igazolható, hogy

$$K(z) \equiv (1-z)^{-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (b')_n}{(c)_n n!} \left(\frac{\xi \eta z}{1-z} \right)^n.$$

$$\cdot F_2 \left(c+n, b+n, b'+n; c+n, c+n; \frac{\xi z}{z-1}, \frac{\eta z}{z-1} \right),$$

ahol az F_2 szintén APPELL-féle kétváltozós hipergeometrikus függvény:

$$F_2(a, b, b'; c, c'; x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s} (b)_r (b')_s}{(c)_r (c')_s r! s!} x^r y^s; \quad (3.11)$$

az összetartás feltétele: $|x| + |y| < 1$. Abban a különleges esetben viszont, amikor $a = c = c'$, a F_2 sor egyszerűen előállítható az F sor segítségével:^s

$$F_2(c, b, b'; c, c; x, y) = (1-x)^{-b} (1-y)^{-b'} F \left(b, b'; c; \frac{xy}{(1-x)(1-y)} \right),$$

tehát

$$K(z) \equiv \frac{[1-z(1-\xi)]^{b-c} [1-z(1-\eta)]^{b'-c}}{[1-z(1-\xi-\eta)]^{b+b'-c}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (b')_n}{(c)_n n!} \left(\frac{\xi \eta z}{1-z(1-\xi-\eta)} \right)^n \cdot F \left(c-b, c-b'; c+n; \frac{\xi \eta z^2}{[1-z(1-\xi)][1-z(1-\eta)]} \right). \quad (3.12)$$

A továbbiakban csak két, a GAUSS-féle hipergeometrikus függvényekre vonatkozó elemi összefüggést használunk fel:

$$F(b, b'; c; x) = (1-x)^{c-b-b'} F(c-b, c-b'; c; x) \quad (3.13)$$

(EULER-transzformáció) és

$$\frac{d^n F}{dx^n} = \frac{(b)_n (b')_n}{(c)_n} F(b+n, b'+n; c+n; x). \quad (3.14)$$

^s P. APPELL—J. KAMPÉ DE FÉRIET, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite. Paris. 1926. (Lásd a 24. oldalon a (28) és a 35. oldalon a (10) összefüggést.)

A (3.13) alapján $K(z)$ a következő alakban írható:

$$K(z) \equiv \frac{(1-z)^{b+b'-c}}{[1-z(1-\xi)]^{b'} [1-z(1-\eta)]^b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (b')_n}{(c)_n n!} \left(\frac{\xi \eta z (1-z)}{[1-z(1-\xi)] [1-z(1-\eta)]} \right)^n \cdot F\left(b+n, b'+n; c+n; \frac{\xi \eta z^2}{[1-z(1-\xi)] [1-z(1-\eta)]}\right),$$

tehát, (3.14) szerint,

$$K(z) \equiv \frac{(1-z)^{b+b'-c}}{[1-z(1-\xi)]^{b'} [1-z(1-\eta)]^b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\xi \eta z}{[1-z(1-\xi)] [1-z(1-\eta)]} - X \right)^n \frac{d^n}{dX^n} F(b, b'; c; X)$$

(X -szel, rövidség kedvéért, a $\frac{\xi \eta z^2}{[1-z(1-\xi)] [1-z(1-\eta)]}$ mennyiséget jelöltük). TAYLOR tétele szerint az utóbbi összeg nem egyéb, mint

$$F\left(b, b'; c; \frac{\xi \eta z}{[1-z(1-\xi)] [1-z(1-\eta)]}\right).$$

Végül a (3.13) újbóli alkalmazása a keresett összefüggéshez vezet:

$$K(z) \equiv \frac{[1-z(1-\xi)]^{b'-c} [1-z(1-\eta)]^{b-c}}{[1-z(1-\xi)(1-\eta)]^{b+b'-c}} \cdot F\left(c-b, c-b'; c; \frac{\xi \eta z}{[1-z(1-\xi)] [1-z(1-\eta)]}\right). \quad (3.15)$$

Lássuk most a (3.10)–(3.15) alkalmazását a JACOBI-polinómkokra. Legyen $b = a + \beta + 1$, $b' = a + \gamma + 1$, $c = a + 1$ és $\xi = \frac{1-x}{2}$, $\eta = \frac{1-y}{2}$. A (0.2) figyelembevételével a következő új generátor-függvényt találjuk:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)_n} z^n P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) P_n^{(\alpha, \gamma-n)}(y) = \\
& = \left(1 - z \frac{1+x}{2}\right)^{\gamma} \left(1 - z \frac{1+y}{2}\right)^{\beta} \left(1 - z \frac{1+x}{2} \cdot \frac{1+y}{2}\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-1} \cdot \\
& \cdot F\left(-\beta, -\gamma; a+1; \frac{z \frac{1-x}{2} \cdot \frac{1-y}{2}}{\left(1 - z \frac{1+x}{2}\right) \left(1 - z \frac{1+y}{2}\right)}\right). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

(|z| < 1)

Említsünk meg rögtön néhány speciális esetet:

a) ha $\gamma=0$ vagy $y=1$, az (1.13), illetőleg (0.2) összefüggések segítségével (3.16)-ból közvetlenül megkaphatjuk a (2.9) generátor-függvényt.

b) Ha $y=-1$, (3.16) a következő új generátor-függvényt adja:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)_n}{(a+1)_n} z^n P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) = \\
& = \left(1 - z \frac{1+x}{2}\right)^{\gamma} F\left(-\beta, -\gamma; a+1; \frac{z \frac{1-x}{2}}{1 - z \frac{1+x}{2}}\right). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

(|z| < 1)

(Ez $-\gamma=a+1$ esetében a (2.9) összefüggésre vezethető vissza.)

c) Írjunk (3.16)-ban z helyébe $\frac{z}{y}$ -t és legyen $y \rightarrow \infty$. (1.12) szerint újból a (3.17) generátor-függvényt találjuk. A 9. §-ban ennek még egy általánosítását is levezetjük.

Ha (3.16)-ban $\alpha = \pm \frac{1}{2}$, (1.7) alapján az ultraszférikus polinomokra kapunk hasonló összefüggéseket, melyek az $y=0$ esetben (2.11)-re egyszerűsödnek.

4. §. Multiplikáció-tételek.

E cím alatt — amint ez szokásos — a $P_n^{(\alpha, \beta)} [1 - \mu(1-x)]$ oly JACOBI-polinomok szerinti sorbafejtését értjük, ahol μ csak az együtthatókban fordul elő. Természetesen igen sokféle multiplikáció-tétel adható a szerint, hogy a kifejtésben az összegezési

index (fokszám) előfordul-e a paraméterekben vagy sem, illetőleg a sorbafejtésnél (α, β) paraméterű, vagy különböző, (γ, δ) paraméterű JACOBI-polinómat veszünk-e tekintetbe. Az említett lehetőségek mindegyikére rá fogunk itt térni.

Először is írjunk a (2.10) mindkét oldalán t helyébe $\frac{t}{\mu}$ -t, x helyébe pedig $1-\mu(1-x)$ -et. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(\alpha+1)_n} \mu^{-n} P_n^{(\alpha, \beta-n)} [1-\mu(1-x)] &= \\ &= e^{\frac{t}{\mu} \left(1-\mu \frac{1-x}{2}\right)} {}_1F_1 \left(-\beta; \alpha+1; t \frac{1-x}{2} \right). \\ &= e^{\frac{1-\mu}{\mu} t} \cdot e^{\frac{t}{\mu} \frac{1+x}{2}} {}_1F_1 \left(-\beta; \alpha+1; t \frac{1-x}{2} \right). \end{aligned}$$

A (2.10) tekintetbevételével az utóbbi kifejezés a következő alakra hozható:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\mu}{\mu} \right)^r \frac{1}{r! (\alpha+1)_s} t^{r+s} P_s^{(\alpha, \beta-s)}(x),$$

ahonnan, ha $r+s=n$, végül is a keresett multiplikáció-tételt nyerjük:

$$P_n^{(\alpha, \beta)} [1-\mu(1-x)] = \sum_{r=0}^n \binom{n+\alpha}{r} (1-\mu)^r \mu^{n-r} P_{n-r}^{(\alpha, \beta+r)}(x). \quad (4.1)$$

($|\mu| < 1$)

Közvetlenül belátható, hogy (4.1) érvényes marad $\mu=1$ -re is, mert ekkor azonosságot kapunk, továbbá (4.1) helyes még μ -nek 1-nél nagyobb értékei mellett is.

Az ultraszférikus polinómok multiplikáció-tételét ugyanígy vezethetjük le a (2.2) generátor-függvényből:

$$P_n^{(\lambda)}(\mu x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(\lambda)_r}{r!} (\mu^2 - 1)^r \mu^{n-2r} P_{n-2r}^{(\lambda+r)}(x). \quad (4.2)$$

Ugyanezt az eredményt megkaphatjuk az előbbi módszerrel

úgy is, hogy (2.12)-ben t helyébe $\frac{t}{\mu^2}$ -et, x helyébe μx -et írunk stb.

Ezzel az elsőfajta multiplikáció-tételekkel végeztünk is. Térjünk most át azokra a sokkal fontosabb tételekre, melyekkel, mint említettük, a (4.1) baloldalán álló polinóмок $P_r^{(\gamma, \delta)}(x)$ -szerinti sorbafejtését határozzuk meg. Az alkalmazott módszer segítségével könnyen adhatunk itt oly multiplikáció-tételeket is, melyek a (4.1) baloldalát ultraszférikus sorral, illetőleg a (4.2) baloldalát JACOBI-polinóмок szerinti sorral fejezik ki. Megállapítunk tehát $J-J$, $J-U$, $U-J$ és $U-U$ multiplikáció-tételeket, ahol a jelölés értelme teljesen világos.

Lényegileg csak a

$$A_r h_r^{(\gamma, \delta)} = \int_{-1}^{+1} (1-x)^\gamma (1+x)^\delta P_r^{(\gamma, \delta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}[1-\mu(1-x)] dx \quad (4.3)$$

integrált kell kiszámítanunk. Alkalmazzuk az (1.2) összefüggést és hajtsunk végre r -szeres parciális integrálást. Az (1.4) szerint

$$A_r h_r^{(\gamma, \delta)} = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^{2r} r!} \mu^r \int_{-1}^{+1} (1-x)^{r+\gamma} (1+x)^{r+\delta} P_{n-r}^{(\alpha+r, \beta+r)}[1-\mu(1-x)] dx.$$

Ez utóbbi integrációt úgy végezzük el, hogy a JACOBI-polinóm helyébe a (0.2) explicit kifejezést helyettesítjük és tagonként integrálunk (ami itt jogsult). Mivel

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1-x)^{r+\gamma+k} (1+x)^{r+\delta} dx &= \\ &= 2^{2r+k+\gamma+\delta+1} \frac{\Gamma(r+\gamma+1) \Gamma(r+\delta+1)}{\Gamma(2r+\gamma+\delta+2)} \frac{(r+\gamma+1)_k}{(2r+\gamma+\delta+2)_k}, \end{aligned}$$

végül is, $h_r^{(\gamma, \delta)}$ helyébe az (1.3) értéket írva,

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r (\alpha+1)_n}{(\alpha+1)_r (n-r)!} \frac{(\gamma+\delta+1)_r}{(\gamma+\delta+1)_{2r}} \mu^r \cdot \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-n+r)_k (n+r+\alpha+\beta+1)_k (r+\gamma+1)_k}{(r+\alpha+1)_k (2r+\gamma+\delta+2)_k k!} \mu^k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A szóbanforgó multiplikációs képletben az együtthatók e szerint a ${}_3F_2$ általánosított hipergeometrikus függvényekkel fejezhetők ki, melyeknek definíciója:

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ d, e \end{matrix} ; x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{(d)_n (e)_n n!} x^n. \quad (4.5)$$

Megjegyezzük, hogy ha a d, e mennyiségek egyike egyenlő az a, b vagy c mennyiségek valamelyikével, úgy a ${}_3F_2$ közönséges F függvényre redukálódik (melyet, egységes jelölés kedvéért, ${}_2F_1$ -gyel is szokás jelölni).

A JACOBI-polinóмок általános multiplikáció-tétele tehát a következő:

$$P_n^{(a, \beta)} [1 - \mu(1-x)] = \sum_{r=0}^n \frac{(a+1)_n (n+a+\beta+1)_r (\gamma+\delta+1)_r}{(a+1)_r (\gamma+\delta+1)_{2r} (n-r)!} \mu^r \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n+r, n+r+a+\beta+1, r+\gamma+1; \\ r+a+1, 2r+\gamma+\delta+2 \end{matrix} ; \mu \right) P_r^{(\gamma, \delta)}(x). \quad (4.6)$$

Nem érdektelen a különleges esetek részletes leírása sem, ($a=\gamma$ vagy $a=\gamma, \beta=\delta$), mert ekkor az együtthatók lényegesen egyszerűsödnek:

$$P_n^{(a, \beta)} [1 - \mu(1-x)] = \sum_{r=0}^n \frac{(a+1)_n (n+a+\beta+1)_r (a+\delta+1)_r}{(a+1)_r (a+\delta+1)_{2r} (n-r)!} \mu^r \cdot F(-n+r, n+r+a+\beta+1; 2r+a+\delta+2; \mu) P_r^{(a, \delta)}(x). \quad (4.7)$$

Feltéve, hogy $a > -1$, $\beta > \delta$ és $0 \leq \mu < 1$, a jobboldalon szereplő F függvény, a (0.2) szerint, kifejezhető JACOBI-polinóмокokkal is. A $\delta = \beta$ esetben a (4.7) kifejezés alakja nem változik:

$$P_n^{(a, \beta)} [1 - \mu(1-x)] = \sum_{r=0}^n \frac{(a+1)_n (n+a+\beta+1)_r (a+\beta+1)_r}{(a+1)_r (a+\beta+1)_{2r} (n-r)!} \mu^r \cdot F(-n+r, n+r+a+\beta+1; 2r+a+\beta+2; \mu) P_r^{(a, \beta)}(x). \quad (4.8)$$

A $J-J$ tételekkel ezzel végeztünk is.

A $J-U$ tételeket egyszerűen nyerjük a (4.6)-ból, mert ha itt

$\gamma = \delta = \lambda - \frac{1}{2}$, az (1.6) és (2.3) segítségével rögtön felírhatjuk, hogy

$$P_n^{(\alpha, \beta)} [1 - \mu(1-x)] = \sum_{r=0}^n \frac{(a+1)_n (n+a+\beta+1)_r}{(a+1)_r (\lambda)_r (n-r)! 2^{2r}} \mu^r \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n+r, n+r+a+\beta+1, r+\lambda+\frac{1}{2} \\ r+a+1, 2r+2\lambda+1 \end{matrix}; \mu \right) P_r^{(\lambda)}(x). \quad (4.9)$$

Ha $a = \lambda - \frac{1}{2}$, a (4.7)-nek megfelelő speciális tételt kapjuk.

Ha viszont $a = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, akkor (4.6) az inverz, $U-J$ multiplikációs képletet adja, itt azonban a szokásos $P_n^{(\lambda)}(\mu x)$ helyett $P_n^{(\lambda)}[1 - \mu(1-x)]$ szerepel a baloldalon. Az ultraszférikus polinóm szimmetrikus lévén, célszerűbb az előbb említett kifejezés JACOBI-polinómok szerinti kifejtését keresni; ezért kiszámítjuk, (4.3)-hoz hasonlóan, a

$$B_r h_r^{(\alpha, \beta)} = \int_{-1}^{+1} (1-x)^a (1+x)^b P_r^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\lambda)}(\mu x) dx \quad (4.10)$$

integrált. Sajnos, ez utóbbi még annyira sem fejezhető ki zárt alakban, mint a (4.3). A legegyszerűbb alak, amit a B_r együtthatóknak sikerült adnunk, a következő:

$$B_r = \frac{(-1)^r (r+a+\beta+1)}{(a+1)_r (2r+a+\beta+1)} \sum_{s=r}^n \frac{(-1)^s (a+1)_s (\lambda)_s}{(r+a+\beta+2)_s (s-r)!} (4\mu)^s P_{n-s}^{(\lambda+s)}(\mu),$$

$$(r=0, 1, 2, \dots, n; |\mu| \leq 1).$$

Az $U-J$ képletek explicit leírását most már mellőzzük és rátérünk az $U-U$ multiplikáció-tételre, vagyis a $P_n^{(\lambda)}(\mu x)$ -nek $P_r^{(\varrho)}(x)$ szerinti sorbafejtésére. Az együtthatók meghatározása itt a

$$C_r h_{n-2r}^{(\varrho)} = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\varrho-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(\mu x) P_{n-2r}^{(\varrho)}(x) dx \quad (4.11)$$

integrál kiszámításán alapszik. A már többször alkalmazott eljárás az (1.10) és (1.11) segítségével azt adja, hogy

$$C_r h_{n-2r}^{(\varrho)} = k_{n-2r}^{(\varrho)} \cdot (-1)^n (\lambda)_{n-2r} (2\mu)^{n-2r} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{n-2r+\varrho-\frac{1}{2}} P_{2r}^{(\lambda+n-2r)}(\mu x) dx;$$

az (1.7) helyettesítése és tagonkinti integrálás végül is C_r következő kifejezésére vezet:

$$C_r = (-1)^r \frac{(\lambda)_{n-r}}{(\varrho)_{n-2r}!} \mu^{n-2r} F(-r, n-r+\lambda; n-2r+\varrho+1; \mu^2).$$

Így a keresett $U-U$ multiplikáció-tétel:

$$P_n^{(\lambda)}(\mu x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{(\lambda)_{n-r}}{(\varrho)_{n-2r}!} \mu^{n-2r} \cdot F(-r, n-r+\lambda; n-2r+\varrho+1; \mu^2) P_{n-2r}^{(\varrho)}(x). \quad (4.12)$$

A paraméterekről elegendők a $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\varrho > -\frac{1}{2}$ és $|\mu| \leq 1$ feltételek. Az előbbi tételek néhány általánosítását a 9. §-ban adjuk.

5. §. A multiplikáció-tételek alkalmazásai.

a) *Paraméter-változtatások.* — E cím alatt az (α, β) paraméterű JACOBI-polinóмок más, (γ, δ) paraméterű JACOBI-polinóмок szerinti sorbafejtését, vagy JACOBI-polinóмок ultraszférikus polinóмок szerinti sorbafejtését (ami az előbbinek speciális esete), illetőleg ezek inverz sorait értjük. Mindezek rögtön levezethetők a 4. §-ban adott multiplikáció-tételekből, mégpedig a μ szorzó alkalmas megválasztásával. Hasonló természetű eredményt SZEGŐ könyve csak egy különleges esetben ad: a (9.4.1) és (9.4.4) képletek $P_n^{(\alpha+\varepsilon+1, \beta)}(x)$ -nek $P_r^{(\alpha, \beta)}(x)$ szerinti sorbafejtését és ennek megfordítását adják. Ismeretes továbbá az ultraszférikus polinóмок cosinus- (azaz $T_n(x)$ polinóмок szerinti) sorbafejtése.

Térjünk most már az általános tételre. Ha a (4.6)-ban $\mu=1$ -et írunk, a baloldalon álló polinóm argumentuma épen x lesz; ha a változó értéke 1, a (4.5) összefüggés baloldalán az 1 argumentumot el szokták hagyni. Tehát azt találjuk, hogy

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{r=0}^n \frac{(a+1)_n (n+\alpha+\beta+1)_r (\gamma+\delta+1)_r}{(a+1)_r (\gamma+\delta+1)_{2r} (n-r)!} \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n+r, n+r+\alpha+\beta+1, r+\gamma+1 \\ r+\alpha+1, 2r+\gamma+\delta+2 \end{matrix} \right) P_r^{(\gamma, \delta)}(x). \quad (5.1)$$

Az együtthatót két esetben lehet egyszerűsíteni. Ha $\gamma = a$, a (4.7)-ből és (3.4)-ből, $\beta < \delta + 1$ esetében,

$$P_n^{(a, \beta)}(x) = (-1)^n (a+1)_n \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{2r+a+\delta+1}{n+r+a+\delta+1} \cdot \frac{(n+a+\beta+1)_r (\beta-\delta)_{n-r}}{(r+a+\delta+1)_n (a+1)_r (n-r)!} P_r^{(a, \delta)}(x), \quad (5.2)$$

ami összehasonlítandó SZEGŐ idézett eredményével. Nyilvánvaló, hogy (5.2) érvényes a $\beta \geq \delta + 1$ értékekre is.

Ha $\delta = \beta$, az (5.1)-ben szereplő ${}_3F_2$ SAALSCHÜTZ tételével kiszámítható,⁹ de ha tekintetbe vesszük az (1.5) összefüggést, rögtön látjuk, hogy az eredmény (5.2)-re vezethető vissza. Végül, ha (5.2)-ben még $\delta = \beta$, úgy azonosságot kapunk, mert az együttható csak $r = n$ esetében nem identikusan zérus. Jelentékenyen egyszerűsödik az (5.2) akkor is, ha $\beta = \delta + 1$. Ezt nem írjuk le részletesen, mert SZEGŐ könyvében is megtalálható (egyrészt, mint a (9.4.1) különleges esete, másrészt, mint a más módszerrel levezetett (4.5.3) képlet, amiről épen szó van.)

Az általános JACOBI-polinómak tetszőleges ultraszférikus sorbafejtését a (4.9) adja, $\mu = 1$ -re:

$$P_n^{(a, \beta)}(x) = \sum_{r=0}^n \frac{(a+1)_n (n+a+\beta+1)_r}{2^{2r} (a+1)_r (\lambda)_r (n-r)!} \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n+r, n+r+a+\beta+1, r+\lambda+\frac{1}{2} \\ r+a+1, 2r+2\lambda+1 \end{matrix} \right) P_r^{(\lambda)}(x). \quad (5.3)$$

Ez igen hasznos képlet, mert λ megfelelő választásával megadja a JACOBI-polinómaknak LEGENDRE-polinómak, cosinus ($T_n(x)$ -) stb. szerinti sorbafejtését. Ez utóbbit írjuk itt le részletesen:

$$P_n^{(a, \beta)}(\cos \theta) = \sum_{r=0}^n \epsilon_r \frac{(a+1)_n (n+a+\beta+1)_r}{2^{2r} (a+1)_r (n-r)! r!} \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n+r, n+a+\beta+1, r+\frac{1}{2} \\ r+a+1, 2r+1 \end{matrix} \right) \cos r\theta, \quad (5.4)$$

⁹ Lásd pl. F. J. WHIPPLE, Proc. London Math. Soc. (2), vol. 23, 1924. p. 104–114.

ahol az ú. n. NEUMANN-féle tényező: $\epsilon_r=1$, ha $r=0$ és $\epsilon_r=2$, ha $r \geq 1$.

Ha $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, az (5.3)-ban lévő ${}_3F_2$ kiszámítható, ha (4.7)-ben $\alpha = \delta = \lambda - \frac{1}{2}$ és $\mu=1$ -et írunk és a (3.4)-et felhasználjuk. Ez egyszerűsítést jelent például az (5.4)-re is, de ekkor a baloldalon álló JACOBI-polinóm az (1.7) szerint maga is ultraszférikus, és így az ultraszférikus eset különleges képletét nyerjük. Mielőtt erre az esetre térünk, nézzük még az (5.3) inverzét. Ezt szintén (4.6)-ból kapjuk, $\mu=1$ és $\alpha=\beta=\varrho - \frac{1}{2}$ helyettesítéssel:

$$P_n^{(\varrho)}(x) = \sum_{r=0}^n \frac{(2\varrho)_{n+r}(\gamma+\delta+1)_r}{(\varrho+\frac{1}{2})_r(\gamma+\delta+1)_{2r}(n-r)!} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n+r, n+r+2\varrho, r+\gamma+1 \\ r+\varrho+\frac{1}{2}, 2r+\gamma+\delta+2 \end{matrix}\right) P_r^{(\gamma, \delta)}(x). \quad (5.5)$$

Mint különleges esetet írjuk fel ismét a $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$ polinóm JACOBI-polinómak szerinti sorbafejtését:

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r-1)!(\gamma+\delta+1)_r! 2^{2r}}{(\gamma+\delta+1)_{2r}(n-r)!(2r)!} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n+r, n+r, r+\gamma+1 \\ r+\frac{1}{2}, 2r+\gamma+\delta+2 \end{matrix}\right) P_r^{(\gamma, \delta)}(x). \quad (n \geq 1) \quad (5.6)$$

Az ultraszférikus polinómkra vonatkozó eredményt a (4.12)-ből vezetjük le $\mu=1$ -re és (3.4) tekintetbevételével:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n-2r+\varrho}{n-r+\varrho} \frac{(\lambda-\varrho)_r(\lambda)_{n-r}}{r!(\varrho)_{n-r}} P_{n-2r}^{(\varrho)}(x). \quad (5.7)$$

Ez az egyszerű összefüggés szintén igen jelentős, mert minden ultraszférikus polinómnak bármilyen más, ugyanehhez az osztályhoz tartozó polinómak szerinti sorbafejtését azonnal megadja. Így például az ismert cosinus-sort (ha $\varrho \rightarrow 0$):

$$P_n^{(\lambda)}(\cos \theta) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \epsilon_{n-2r} \frac{(\lambda)_r(\lambda)_{n-r}}{r!(n-r)!} \cos(n-2r)\theta. \quad (5.8)$$

$$\epsilon_s = \begin{cases} 1, & \text{ha } s=0 \\ 2, & \text{ha } s \geq 1 \end{cases}$$

Más bizonyításokat lásd pl. SZEGŐ többször idézett könyvében.¹⁰
Hasonlóképen, ha $\varrho=1$,

$$P_n^{(\lambda)}(\cos \theta) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n-2r+1}{n-r+1} \frac{(\lambda-1)_r (\lambda)_{n-r}}{r! (n-r)!} \frac{\sin(n-2r+1)\theta}{\sin \theta}. \quad (5.9)$$

Megemlíthetjük az (5.8) megfordítását is (az (5.7)-ben $\lambda \rightarrow 0$):

$$\cos n\theta = \frac{n}{2} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n-2r+\varrho}{n-r+\varrho} \frac{(n-r-1)! (-\varrho)_r}{r! (\varrho)_{n-r}} P_{n-2r}^{(\varrho)}(\cos \theta). \quad (5.10)$$

$(n \geq 1)$

A 4. §-ban láttuk, hogy a multiplikáció-tételek jobboldalán szereplő JACOBI-polinómok paramétereiben előforduló összegezési indexet (fokszámot) csak annak az árán tudtuk kiküszöbölni, hogy az összeg együtthatóit sokkal bonyolultabbá tettük. Hasonló a helyzet a jelen §-ban tárgyalt összefüggésekkel is. Az eddig levezetett sorbafejtések együtthatói általában elég bonyolult hipergeometrikus függvényekkel vannak megadva. Evvel szemben találhatunk a (4.1)- és (4.2)-höz hasonló természetű összefüggéseket is. Ezeket itt bizonyítás nélkül közöljük; bizonyításuk módját később (a 7. §-ban tárgyalt integrál-tételekkel kapcsolatban) fogjuk vázolni. Tehát a JACOBI-polinómok a következő módon is kifejezhetők ultraszférikus sorba:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{(a+\beta+1)_n} \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (a+\beta+1)_r (a+\frac{1}{2})_r (\frac{1}{2})_r}{r!} P_{2n-2r}^{(\alpha+\beta+r+1)} \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}} \right). \quad (5.11)$$

Ennek megfordítása:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+\frac{1}{2})_n} \sum_{r=0}^n \frac{(\beta-\lambda+\frac{1}{2})_r}{r!} P_{n-r}^{(2\lambda-\beta-1, \beta+r)}(x). \quad (5.12)$$

$(\lambda > \frac{\beta}{2}, \beta > -1)$

¹⁰ G. SZEGŐ, loc. cit. §. 4. 9.

A (2.9) generátor-függvényből is nyerhetünk igen egyszerű új összefüggéseket, melyekben új paramétert vezetünk be. Ugyanis (2.9) így is írható:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) t^n &= (1-t)^{\beta-\gamma} \cdot (1-t)^\gamma \left(1-t \frac{1+x}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\beta)_r}{r!} t^r \cdot \sum_{s=0}^{\infty} P_s^{(\alpha+\beta-\gamma, \gamma-s)}(x) t^s = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot \sum_{r=0}^n \frac{(\gamma-\beta)_r}{r!} P_{n-r}^{(\alpha+\beta-\gamma, \gamma-n+r)}(x), \end{aligned}$$

ahonnan most már rögtön kapjuk az egyszerű

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{r=0}^n \frac{(\gamma-\beta)_r}{r!} P_{n-r}^{(\alpha+\beta-\gamma, \gamma+r)}(x), \quad (5.13)$$

($\gamma > \beta$)

összefüggést. Hasonló módon bizonyítható be még

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{r=0}^n \frac{(a-\gamma)_r}{r!} P_{n-r}^{(\gamma, a+\beta-\gamma+r)}(x). \quad (5.14)$$

($a > \gamma$)

Ha $\alpha = \beta = \rho - \frac{1}{2}$, a baloldal kifejezhető ultraszférikus polinómmal. Végül az ultraszférikus polinómmok között is fennáll egy, az (5.11)-hez hasonló képlet, amit ebből $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ helyettesítéssel rögtön levezethetünk:

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x) &= \\ &= \frac{(-1)^n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{1}{2}\right)_{n-r} (2\lambda)_{n-r} (\lambda)_r P_{2n-2r}^{(2\lambda+r)} \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right). \quad (5.15) \end{aligned}$$

b) A JACOBI-polinómmok inverziós képletei. — A (4.1) és (4.2), (4.7) és (4.12) multiplikáció-tételeket most kissé módosított alakban írjuk:

$$(1-\mu)^n P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{1-x}{1-\mu}\right) = \\ = \sum_{r=0}^n \binom{n+\alpha}{r} (1-2\mu)^r \mu^{n-r} P_{n-r}^{(\alpha, \beta+r)} \left(1 - \frac{1-x}{\mu}\right),$$

$$\mu^n P_n^{(\lambda)} \left(\frac{x}{\mu}\right) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{(\lambda)_r}{r!} (\mu^2-1)^{\frac{n}{2}-r} P_{n-2r}^{(\lambda+r)} \left(\frac{x}{\sqrt{\mu^2-1}}\right),$$

$$(1-\mu)^n P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{1-x}{1-\mu}\right) = \\ = \sum_{r=0}^n \frac{(a+1)_n (n+\alpha+\beta+1)_r (a+\delta+1)_r}{(a+1)_r (a+\delta+1)_{2r} (n-r)!} \mu^r (1-\mu)^{n-r} \cdot \\ \cdot F\left(-n+r, n+r+\alpha+\beta+1; 2r+\alpha+\delta+2; \frac{\mu}{1-\mu}\right) \cdot \\ \cdot P_n^{(\alpha, \delta)} \left(1 - \frac{1-x}{\mu}\right),$$

és végül

$$\mu^n P_n^{(\lambda)} \left(\frac{x}{\mu}\right) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{(\lambda)_{n-r}}{(\varrho)_{n-2r} r!} \mu^{2r} (\mu^2-1)^{\frac{n}{2}-r} \cdot \\ \cdot F\left(-r, n-r+\lambda; n-2r+\varrho+1; \frac{\mu^2-1}{\mu^2}\right) P_{n-2r}^{(\varrho)} \left(\frac{x}{\sqrt{\mu^2-1}}\right).$$

Írjuk most már rendre a $\mu=1$ és $\mu=0$ értékeket az előbbi összefüggésekben. Ha tekintetbe vesszük az (1.12) képleteket, a JACOBI- és ultraszférikus polinórok inverziós képleteit találjuk, vagyis a $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ -nek $\frac{1-x}{2}$ -szerinti sorbafejtését és, ennek megfordításaként, $\left(\frac{1-x}{2}\right)^n$ JACOBI-polinórok szerinti sorát, valamint hasonló összefüggéseket $P_n^{(\lambda)}(x)$ és x^n között:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(a+1)_n}{n!} \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (n+a+\beta+1)_r}{(a+1)_r r!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^r,$$

(lásd például még (0.2)-t)

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^n = \frac{n!(a+1)_n(a+\beta+1)_n}{(a+\beta+1)_{2n}} \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{(a+1)_{n-r} r!} P_{n-r}^{(\alpha, \beta+r)}(x), \quad (5.16)$$

(n=0, 1, 2, ...)

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^n = \frac{(a+1)_n}{(a+\beta+1)_n} \sum_{r=0}^n \frac{2r+a+\beta+1}{n+r+a+\beta+1} \frac{(-n)_r (a+\beta+1)_r}{(a+1)_r (n+a+\beta+1)_r} \cdot P_r^{(\alpha, \beta)}(x).$$

(n=0, 1, 2, ...)

és

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{(\lambda)_{n-r}}{r! (n-2r)!} (2x)^{n-2r},$$

$$(2x)^n = \frac{n!}{(\lambda)_n} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(\lambda)_r}{r!} P_{n-2r}^{(\lambda+r)}(x),$$

(n=0, 1, 2, ...)

$$(2x)^n = n! \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n-2r+\lambda}{n-r+\lambda} \frac{1}{r! (\lambda)_{n-r}} P_{n-2r}^{(\lambda)}(x).$$

(n=0, 1, 2, ...)

Mindezek igen hasznos összefüggések és a következő §-ban alkalmazni is fogjuk őket. Itt még a $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ JACOBI-polinóm x hatványai szerint rendezett explicit alakját adjuk meg. A számitást nem írjuk le részletesen, csak az eredményt közöljük:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(a+1)_n}{n!} \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (-n)_r (n+a+\beta+1)_r}{(a+1)_r r! 2^r}. \quad (5.18)$$

$$\cdot F(-n+r, n+r+a+\beta+1; r+a+1; \frac{1}{2}) x^r.$$

A 9. §-ban az (5.16) harmadik sorbafejtését általánosítjuk nem-pozitív egész kitevőkre is.

6. §. Szorzat sorbafejtése.

Az (5.16) tekintetbevételével

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\gamma, \delta)}(x) = \frac{(a+1)_m (\gamma+1)_n}{m! n!} \cdot \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n \frac{(-m)_r (-n)_s (m+a+\beta+1)_r (n+\gamma+\delta+1)_s}{(a+1)_r (\gamma+1)_s r! s!} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{r+s} =$$

$$= \frac{(a+1)_m (\gamma+1)_n}{m! n!} \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{m+n} \sum_{r=0}^k \frac{(-m)_r (-n)_{k-r} (m+a+\beta+1)_r (n+\gamma+\delta+1)_{k-r}}{(a+1)_r (\gamma+1)_{k-r} r! (k-r)!} \left(\frac{1-x}{2} \right)^k;$$

$\left(\frac{1-x}{2} \right)^k$ helyébe az (5.16) harmadik képletét írva, (ϱ, σ) paraméterekkel, azt találjuk, hogy

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\gamma, \delta)}(x) = \frac{(a+1)_m (\gamma+1)_n}{m! n!} \sum_{s=0}^{m+n} \frac{(\varrho+\sigma+1)_s (2s+\varrho+\sigma+1)}{(\varrho+1)_s} \cdot$$

$$\left\{ \sum_{k=s}^{m+n} \sum_{r=0}^k \frac{(-m)_r (-n)_{k-r} (-k)_s (m+a+\beta+1)_r (n+\gamma+\delta+1)_{k-r} (\varrho+1)_k}{(a+1)_r (\gamma+1)_{k-r} (\varrho+\sigma+1)_k (k+\varrho+\sigma+1)_s (k+s+\varrho+\sigma+1) r! (k-r)!} \right\} \cdot P_s^{(\varrho, \sigma)}(x).$$

Írjuk a sorbafejtést a következő alakban:

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\gamma, \delta)}(x) = \frac{(a+1)_m (\gamma+1)_n}{m! n!} \sum_{s=0}^{m+n} \frac{2s+\varrho+\sigma+1}{s+\varrho+\sigma+1} \frac{(-1)^s}{(\varrho+1)_s} \cdot \quad (6.1)$$

$$\left\{ \sum_{r=0}^{m+n} \sum_{k=\max(r, s)}^{m+n} \frac{(-m)_r (-n)_{k-r} (m+a+\beta+1)_r (n+\gamma+\delta+1)_{k-r} k! (\varrho+1)_k}{(a+1)_r (\gamma+1)_{k-r} (s+\varrho+\sigma+2)_k r! (k-r)! (k-s)!} \right\} \cdot P_s^{(\varrho, \sigma)}(x).$$

Lényeges egyszerűsítést az együtthatóra nem tudtunk találni, még egyenlő paraméterű JACOBI-polinómok sorbafejtésénél, sőt ultraszférikus polinómok esetében sem. Ez utóbbiakra igen érdekes lenne legalább a

$$P_m^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{r=0}^n A_r^{(m, n; \lambda)} P_{m+n-2r}^{(\lambda)}(x) \quad (m \geq n)$$

sorbafejtés együtthatóit lehetőleg egyszerű alakban meghatározni és levezetni a megfordítását is,

$$P_{m+n}^{(\lambda)}(x) = \sum_{r=0}^n B_r^{(m, n; \lambda)} P_{m-r}^{(\lambda)}(x) P_{n-r}^{(\lambda)}(x) \quad (m \geq n)$$

alakban. Erre a kérdésre talán másutt sikerülni fog kielégítő választ adnunk.

Különleges esetekben az $A_r^{(m, n; \lambda)}$ együttható ismeretes, például a LEGENDRE-polinómokra;¹¹ ezt az összefüggést, hasznosságára való tekintettel, ideiktatjuk:

$$P_m(x) P_n(x) = \sum_{r=0}^n \frac{2m-2n+4r+1}{2m+2r+1} \frac{\binom{m}{n-r}^2 \binom{m+r}{r}^2}{\binom{2m}{2n-2r} \binom{2m+2r}{2r}} P_{m+n-2r}(x). \quad (6.2)$$

(m ≥ n)

Igen egyszerű összefüggések állanak fenn, természetesen a $T_n(x)$ CSEBISSEV-polinómokra, sőt még az $U_n(x)$ másodfajú CSEBISSEV-polinómok esetében is. Így

$$T_m(x) T_n(x) = \frac{1}{2} T_{m+n}(x) + \frac{1}{2} T_{m-n}(x), \quad (6.3)$$

$$T_{m+n}(x) = 2T_m(x) T_n(x) - T_{m-n}(x) T_0(x)$$

és

$$U_m(x) U_n(x) = \sum_{r=0}^n U_{m+n-2r}(x), \quad (6.4)$$

$$U_{m+n}(x) = U_m(x) U_n(x) - U_{m-1}(x) U_{n-1}(x); \quad (m \geq n)$$

$n=1$ -re valamennyi szóbanforgó összefüggés a szereplő polinómok ismeretes rekurziós képleteit adja.

Más természetű sorbafejtéseket viszont könnyűszerrel levezethetünk az eddig adott összefüggésekből. Nézzük például a (3.7)

¹¹ ADAMS, Proc. Roy. Soc. vol. 28, vagy E. W. HOBSON, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge. 1939.

és (3.9) generátor-függvényeket és az utóbbiban végezzük el a következő helyettesítéseket:

$$-2z(1-x) = \frac{t(1-\xi)(1-\eta)}{(1+t)^2}, \quad 2z(1+x) = \frac{t(1+\xi)(1+\eta)}{(1+t)^2},$$

ahonnan

$$x = \frac{1+\xi\eta}{\xi+\eta} \quad \text{és} \quad z = \frac{t}{(1+t)^2} \cdot \frac{\xi+\eta}{2}.$$

(3.9) tehát így változik a (3.7) jobboldalával való összehasonlítás után:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+\beta+1)_{2n}}{(a+1)_n(\beta+1)_n} \frac{t^n}{(1+t)^{2n}} \left(\frac{\xi+\eta}{2} \right)^n P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{1+\xi\eta}{\xi+\eta} \right) = \\ & = F_4 \left(\frac{a+\beta+1}{2}, \frac{a+\beta}{2}+1; a+1, \beta+1; \frac{t(1-\xi)(1-\eta)}{(1+t)^2}, \frac{t(1+\xi)(1+\eta)}{(1+t)^2} \right) = \\ & = (1+t)^{a+\beta+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!(a+\beta+1)_m}{(a+1)_m(\beta+1)_m} t^m P_m^{(\alpha, \beta)}(\xi) P_m^{(\alpha, \beta)}(\eta); \end{aligned}$$

t megfelelő együtthatóinak azonosítása révén a keresett eredményt nyerjük:¹²

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(y) &= \frac{(-1)^n (a+1)_n (\beta+1)_n}{n!} \cdot \\ & \cdot \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (n+a+\beta+1)_r}{(a+1)_r (\beta+1)_r (n-r)!} \left(\frac{x+y}{2} \right)^r P_r^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{1+xy}{x+y} \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Másrésről a (2.9) generátor-függvény segítségével könnyen bebizonyítható a következő összefüggés:

$$\begin{aligned} P_m^{(\alpha, \beta+n)}(x) P_n^{(\alpha, \beta+m)}(x) &= \frac{(a+1)_m (\beta+1)_n (\beta+1)_{m+n}}{(a+1)_{m+n}} \cdot \\ & \cdot \sum_{r=0}^{\min(m, n)} \frac{(a+\beta+1+m+n)_r (m+n-2r)!}{(a+1)_r (\beta+1)_{m+n-r} r! (m-r)! (n-r)!} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{2r} P_{m+n-2r}^{(\alpha+2r, \beta+r)}(x) \end{aligned} \quad (6.6)$$

¹² Más bizonyítást lásd W. N. BAILEY, Proc. London Math. Soc. vol. 41. 1936. p. 215—220.

és megfordítása:

$$P_{m+n}^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{m! n!}{(m+n)!} \frac{(a+1)_{m+n} (\beta+1)_{m+n}}{(a+1)_m (a+1)_n} \cdot \sum_{r=0}^{\min(m, n)} \frac{(-1)^r (a)_r (a+1)_{2r} (a+\beta+1+m+n)_r}{(a+1+m)_r (a+1+n)_r (a)_{2r} (\beta+1)_{m+n-r}} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{2r} \cdot P_{m-r}^{(\alpha+2r, \beta+n)}(x) P_{n-r}^{(\alpha+2r, \beta+m)}(x). \quad (6.7)$$

Hasonló eredményeket vezethetünk le (2.11)-ből az ultraszférus polinómokra is. Másrészt, például $m=n$ esetében, az $\left(\frac{1-x}{2}\right)^{2r} P_{2n-2r}^{(\alpha+2r, \beta+r)}(x)$ -nek $P_s^{(\alpha, \beta+n)}(x)$ szerinti sorbafejtése és (6.6)-ba való helyettesítése révén a (6.1) különleges esetét kapjuk, esetleg az abból levezetett képletnél egyszerűbb alakban is. Ezeket a számításokat itt azonban mellőzzük.

7. §. Integrál-összefüggések.

SZEGŐ, idézett könyvében, ad néhány integrál-előállítást a JACOBI- és ultraszférus polinómokra éspedig az (1.2)-, (1.10)-, illetőleg (2.2)-ből levezetett kontur-integrálokat és ezek bizonyos átalakításait. Itt mi a kérdéses polinómokra csak egy-egy integrál-előállítást említünk meg, a § többi részében pedig oly integrál-összefüggéseket tárgyalunk, melyek különböző paraméterű JACOBI-polinómot, illetőleg ultraszférus polinómot tartalmaznak.

A hipergeometrikus függvény klasszikus integrál-előállításából, a

$$F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-b-1} (1-ux)^{-a} du. \quad (7.1)$$

($R(c) > R(b) > 0$)

összefüggésből, (0.2) alapján a feltételeknek megfelelő, következő integrál-előállítást nyerjük:

$$P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+1) \Gamma(-\beta)} \int_0^1 u^{\alpha+\beta} (1-u)^{-\beta-1} \left(1-u \frac{1-x}{2}\right)^n du, \quad (7.2)$$

ahol $\alpha > -1$ és $-1 < \beta < 0$.

Rögtön megjegyezhetjük, hogy a (2.9) generátor-függvény innen is könnyen levezethető.

Az ultraszférikus polinómokra egészen más természetű integrál-előállításal is rendelkezünk. Ez:¹³

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)} \frac{(2\lambda)_n}{n!} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi)^n \sin^{2\lambda-1} \varphi d\varphi; \quad (7.3)$$

$(R(\lambda) > -\frac{1}{2})$

$\lambda = \frac{1}{2}$ (azaz a LEGENDRE-polinómok) esetében a megfelelő integrál-képletet SZEGŐ könyve is tárgyalja.¹⁴

Térjünk most már a mi tárgyunkra. A (7.1) általánosításaként ismeretes, hogy¹⁵

$$F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(c-\gamma)} \int_0^1 v^{\gamma-1} (1-v)^{c-\gamma-1} F(a, b; \gamma; vx) dv. \quad (7.4)$$

$(c > \gamma > 0)$

Ha itt $a = -n$, $b = n + \alpha + \beta + 1$, $c = \alpha + 1$ és γ helyett $\gamma + 1$ -et írunk, (0.2) szerint a következő eredményre jutunk:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\gamma+1) \Gamma(\alpha-\gamma)} \int_0^1 v^\gamma (1-v)^{\alpha-\gamma-1} P_n^{(\gamma, \alpha+\beta-\gamma)}[1-v(1-x)] dv, \quad (7.5)$$

$(\alpha > \gamma > -1)$

Most tehát integrál alakban kaptunk oly összefüggést, mely az 5. § a)-ban adott paraméter-változtatási képletekhez hasonló ter-

¹³ Loc. cit.⁸

¹⁴ G. SZEGŐ, loc. cit. §. 4. 8.

¹⁵ A. ERDÉLYI, Quarterly Journ. of Math. vol. 8. 1937. p. 200—213, 267—277. Általánosításokat lásd pl. 3 alatti cikkünkben.

mészetű. Valóban, ha az integrál-jel alatt szereplő JACOBI-polinóm helyébe a (4.1) multiplikációs képletet írjuk és tagonként integrálunk, az (5.14) összefüggést találjuk. Fordítva, az (5.13)-nak megfelelő, (7.5) alakú integrált is felírhatjuk.

Másrészt, ha (7.5)-be a (4.6) multiplikációs képletet helyettesítjük, integrálással a redukált (4.7) alakra jutunk, ami egyértelmű a másutt bebizonyított

$$F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-\sigma)\Gamma(\sigma)} \int_0^1 t^{\sigma-1} (1-t)^{a-\sigma-1} {}_3F_2(a, a, b; \sigma, c; xt) dt$$

($\alpha > \sigma > 0$)

összefüggéssel.¹⁶

Az ultraszférikus polinómokra vonatkozólag ugyancsak a (7.4) egyenlet adja meg a kívánt integrál-képletet, az $a = -n$, $b = n + 2\lambda$, $c = \lambda + \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ helyettesítéssel:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)} \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{\lambda-1} P_{2n}^{(2\lambda)}\left(v\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) dv. \quad (7.6)$$

Ha (7.6)-ba, az integrál-jel alatt szereplő polinóm helyébe a (4.2)-nek megfelelő kifejezést írjuk és tagonként integrálunk, az (5.15)-öt találjuk. Ez az 5. § a)-ban jelzett bizonyítása az ott adott (és nem bizonyított, vagy más módon bizonyított) összefüggéseknek.

De (7.4)-, (illetőleg (7.5))-ből levezethetünk még a kétfajta polinómok között kölcsönös integrál-képleteket is:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+a+1)}{(\alpha+\beta+1)_n \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \cdot \int_0^1 v^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (1-v)^{\frac{\alpha-\beta}{2}-1} P_n^{\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)} [1-v(1-x)] dv, \quad (7.7)$$

¹⁶ C. S. MEIJER, Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. Amsterdam. vol. 42. 1939. p. 355-369.

ahol $\alpha > \beta > -1$; megfordítása:

$$P_n^{(\frac{\alpha+\beta+1}{2})}(x) = \frac{(a+\beta+1)_n \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\Gamma(n+a+1) \Gamma\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} \cdot \int_0^1 v^\alpha (1-v)^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1} P_n^{(\alpha, \beta)} [1-v(1-x)] dv. \quad (7.8)$$

$(\beta > \alpha > -1)$

Az ultraszférikus polinómok JACOBI-polinómmal való kifejezései még a következők is

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+a+1)}{(a+\beta+1)_n \Gamma(a+\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{a-\frac{1}{2}} P_{2n}^{(\alpha+\beta+1)}(v) \sqrt{\frac{1-x}{2}} dv, \quad (7.9)$$

$(\alpha > -\frac{1}{2})$

illetőleg

$$P_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^n (\lambda+1)_n}{\Gamma(n+a+1)} \frac{\lambda x \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)} \cdot \int_0^1 v^\alpha (1-v)^{-a-\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha, \lambda-\alpha)}(1-2vx^2) dv. \quad (7.10)$$

$(\alpha < \frac{1}{2})$

Az itt adott integrál-összefüggések általánosításai és megfordításai KOGNETLIANZ és USPENSKY speciális, a LAGUERRE- és HERMITE-polinómokra vonatkozó hasonló eredményeinek. Erről és más, az említett polinómmal való összefüggésekről fogunk a most következő fejezetben beszélni.

8. §. Összefüggések a Laguerre- és Hermite-polinómmal.

Ismeretes, hogy a LAGUERRE- és HERMITE-polinómmal a JACOBI-, illetőleg ultraszférikus polinómból, a paraméterekre vonatkozó határérték-átmenettel is levezethetők.¹⁷ Így a LAGUERRE-polinómmal:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{2x}{\beta} \right) \quad (8.1)$$

és

$$L_n^{(\beta)}(x) = (-1)^n \lim_{\alpha \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{2x}{\alpha} - 1 \right),$$

¹⁷ Lásd pl. G. SZEGŐ, loc. cit., (5.3.4) és (5.6.3) összefüggés.

az HERMITE-polinómak pedig

$$H_n(x) = n! \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\frac{n}{2}} P_n^{(\lambda)}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (8.2)$$

Ezeknek a képleteknek segítségével az előbbi fejezetekben adott generátor-függvényekből és más összefüggésekből azonnal levezethetjük a LAGUERRE- és HERMITE-polinómkra vonatkozó és nagyrészt már ismert eredményeket. Ezek közül csak azokat említjük meg, amelyekre itt szükségünk lesz. Így a (2.5)-ből, (8.1) segítségével, rögtön az ismert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+a+1)} L_n^{(\alpha)}(x) = e^z (xz)^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{xz}) \quad (8.3)$$

generátor-függvényt kapjuk. Itt J_{α} a BESSEL-függvényt jelenti. Továbbá ugyanez a határátmenet adja (3.7)-ből az ú. n. HILLE—HARDY-féle összefüggést:¹⁸

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+a+1)} z^n L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y) = \\ = \frac{(xyz)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-z} e^{-\frac{z(x+y)}{1-z}} I_{\alpha}\left(\frac{2\sqrt{xyz}}{1-z}\right), \end{aligned} \quad (8.4)$$

($|z| < 1$)

ahol I_{α} az imaginárius argumentumu BESSEL-függvényt jelenti.

Elsősorban azonban a (0.2)-ből levezethető definíciót kell megemlíteni:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(a+1)_n}{n!} {}_1F_1(-n; a+1; x). \quad (8.5)$$

Ami az HERMITE-polinómakat illeti, elég ha megemlítjük azt az ismert tényt, hogy (2.2) a (8.2) alkalmazásával rögtön a $H_n(x)$ generátor függvényét adja.

¹⁸ G. SZEGŐ, loc. cit., (5.1.16) és (5.1.15) összefüggés. A Laguerre-polinómkra vonatkozó eredmények összefoglalását lásd pl. E. FELDHEIM, Développements en série de polynomes d'Hermite et de Laguerre à l'aide des transformations de Gauss et de Hankel. I—II—III. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. Amsterdam. vol. 43. 1940. p. 224—248, 379—386.

Írjuk most már fel a következő integrál-összefüggést:¹⁹

$$F(a, b; c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-u} {}_1F_1(b; c; ux) du \quad (8.6)$$

($Re a > 0, x \neq -1$)

és megfordítását:

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+, x+)} e^u u^{-b} F\left(a, b; c; \frac{x}{u}\right) du, \quad (8.7)$$

($b \neq 0, -1, -2, \dots$)

ahol az integrációt egy a $-\infty$ -ből kiinduló görbe mentén végezzük, mely a 0 és x pontokat pozitív irányban megkerülve a $-\infty$ felé tér vissza.

Ha már most alkalmazzuk a (8.6) és (8.7) integrál-összefüggéseket a (0.2)-re és (8.5)-re, a következő érdekes eredményre jutunk:²⁰

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \int_0^{\infty} u^{n+\alpha+\beta} e^{-u} L_n^{(\alpha)}\left(u \frac{1-x}{2}\right) du \quad (8.8)$$

($n+\alpha+\beta > -1$)

és

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+, x+)} e^u u^{-n-\alpha-\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}\left(1 - \frac{2x}{u}\right) du. \quad (8.9)$$

($n+\alpha+\beta \neq 0, -1, -2, \dots$)

Az alkalmazások szempontjából különösen a (8.8) fontos. Ha ugyanis a LAGUERRE-polinómokra vonatkozó ismert eredményekből indulunk ki, a (8.8) segítségével könnyen bebizonyíthatjuk a JACOBI-polinómokra a megfelelő és már más módon levezetett összefüggéseket.

¹⁹ E. FELDHEIM, loc. cit.,³ ill. a (8.7) összefüggésre, A. ERDÉLYI, loc. cit.¹⁵

²⁰ Ha F -re és ${}_1F_1$ -re alkalmazzuk a (3.13) Euler-transzformációt, (8.6)-ból a Jacobi-polinómok egy másik integrál-kifejezését is levezethetjük:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)n!} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{-\beta} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{n+\alpha} {}_1F_1\left(-n-\beta; \alpha+1; \frac{1-x}{2}v\right) dv.$$

Ez közvetlen általánosítása a Laguerre-polinómok Hankel-transzformációval való alóállításának (lásd pl. loc. cit.¹⁸)

Ily módon a (8.3), (8.4) és (8.8) alkalmazásával egy-egy új bizonyítást adunk itt a (2.5) és (3.16) generátor-függvényekre. A (8.8)-ból

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} z^n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \\ = \int_0^{\infty} u^{\alpha+\beta} e^{-u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zu)^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}\left(u \frac{1-x}{2}\right) du. \end{aligned}$$

Ha most tekintetbe vesszük a (8.3) generátor-függvényt (amelyet itt ismertnek tételezünk fel) és a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-at} t^{\mu-1} J_{\nu}(bt) dt = \\ = \left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu} \left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}-\mu} \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{a^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)} F\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1, \frac{\nu-\mu+1}{2}; \nu+1; -\frac{b^2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

összefüggést,²¹ úgy éppen a (2.5)-öt találjuk. Említsük meg, hogy az összeg- és integrál-jel felcserélésének jogosságát itt nem kell külön bizonyítanunk.

Ugyanigy a (8.8)-ból

$$\begin{aligned} K(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} z^n P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) P_n^{(\alpha, \gamma-n)}(y) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1) \Gamma(\alpha+\gamma+1)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u^{\alpha+\beta} v^{\alpha+\gamma} e^{-u-v} \cdot \\ \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} z^n L_n^{(\alpha)}\left(u \frac{1-x}{2}\right) L_n^{(\alpha)}\left(v \frac{1-y}{2}\right) du dv, \end{aligned}$$

továbbá, az ismeretesnek vett (8.4) alapján, ha $\frac{1-x}{2} = \xi$, $\frac{1-y}{2} = \eta$,

²¹ Lásd pl. G. N. WATSON, loc. cit.⁷

$$K(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \frac{(\xi\eta z)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-z} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\frac{\alpha}{2}+\beta} v^{\frac{\alpha}{2}+\gamma} e^{-u \frac{1-z(1-\xi)}{1-z} - v \frac{1-z(1-\eta)}{1-z}} I_\alpha \left(\frac{2\sqrt{uvz\xi\eta}}{1-z} \right) du dv.$$

Ezt a kettős integrált úgy számítjuk ki, hogy a BESSEL-függvény helyébe explicit alakját írjuk és tagonként integrálunk. Ezáltal csak két egyszerű EULER-féle integrált kell kiszámítanunk, vagyis

$$\begin{aligned} K(z) &\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \frac{(z\xi\eta)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-z} \cdot \\ &\cdot \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{z\xi\eta}}{1-z} \right)^{\alpha+2r} \frac{1}{r!(\alpha+1)_r} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta+r} e^{-u \frac{1-z(1-\xi)}{1-z}} du \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty v^{\alpha+\gamma+r} e^{-v \frac{1-z(1-\eta)}{1-z}} dv = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(1-z)^{\alpha+\beta+\gamma+1}}{[1-z(1-\xi)]^{\alpha+\beta+1} [1-z(1-\eta)]^{\alpha+\gamma+1}} \cdot \\ &\cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+1)_r (\alpha+\gamma+1)_r}{(\alpha+1)_r r!} \left\{ \frac{z\xi\eta}{[1-z(1-\xi)][1-z(1-\eta)]} \right\}^r. \end{aligned}$$

Ez a végtelen összeg a (0.1) szerint F függvény, és ha alkalmazzuk reá az EULER-transzformációt, éppen a (3.16)-ot kapjuk.

Az ultraszférikus és LAGUERRE-polinómak között is fennáll a (8.8)-hoz hasonló integrál-összefüggés:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\Gamma(2\lambda)(\lambda + \frac{1}{2})_n} \int_0^\infty u^{n+2\lambda-1} e^{-u} L_n^{(\lambda-\frac{1}{2})} \left(u \frac{1-x}{2} \right) du. \quad (8.9)$$

($\lambda > -\frac{1}{2}$)

A LEGENDRE-polinómak esetében ez különösen egyszerű alakot ölt, mert csak a 0-paraméterű L_n LAGUERRE-polinómak szerepelnek benne:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty u^n e^{-u} L_n \left(u \frac{1-x}{2} \right) du.$$

A (8.9) alkalmazásaként a BESSEL-függvények elméletéből ismert integrál értékének helyettesítésével könnyen levezethetjük (8.3)-ból és (8.9)-ből a (2.2) generátor-függvényt.

Végül említsük meg a

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{2}{n! \Gamma(\lambda)} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{n+2\lambda-1} H_n(ux) du \quad (8.10)$$

integrál-összefüggést,²² az ultraszférikus és HERMITE-polinóмок között. A (2.2) generátor-függvényt innen még könnyebben levezethetjük, ha a $H_n(x)$ generátor-függvényét ismertnek vesszük.

Bebizonyíthatók még a

$$t^n P_n^{(\lambda)}\left(\frac{y}{t}\right) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (\lambda)_{n-r}}{(n-2r)!} L_r^{(-n-\lambda)}(-t^2) H_{n-2r}(y), \quad (8.11)$$

és ennek határesetete ($t \rightarrow 0$), valamint a

$$(2t)^n = \frac{1}{(\lambda)_n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n(y) P_n^{(\lambda)}(ty) dy \quad (8.12)$$

összefüggések is.

Említsük meg végül, mint a (4.6) és (4.12) határeseteit, a következő összefüggéseket a LAGUERRE- és JACOBI-, valamint az HERMITE- és ultraszférikus polinóмок között:

$$\begin{aligned} & L_n^{(\alpha)}\left(t \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{(2r+\alpha+\beta+1) \Gamma(r+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+r+\alpha+\beta+2) \Gamma(r+\alpha+1)} {}^r I_{n-r}^{(\alpha+\beta+2r+1)}(t) P_r^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned} \quad (8.13)$$

A (8.1) határátmenetek további alkalmazásával levezethetjük innen a LAGUERRE-polinóмок multiplikációs képleteit, továbbá a (8.13) megfordítását is. Hasonló módon

²² APPELL—KAMPÉ DE FÉRIET⁸ alatt idézett műve szerint ez az összefüggés megtalálható N. NIELSEN, Recherches sur les polynomes d'Hermite, Det. Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Math.-fys. Meddelelser, I. 6. 1918. munkájában.

$$H_n(xt) = n! \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{n-2r+\varrho}{n-r+\varrho} \frac{1}{(\varrho)_{n-r}} t^{n-2r} L_r^{(\varrho+n-2r)}(t^2) P_{n-2r}^{(\varrho)}(x), \quad (8.14)$$

aminek több érdekes alkalmazását adhatjuk. Említsük meg, hogy (8.14) egyértelmű USPENSKY integrál-képletének²³ egy általánosításával. Maga az USPENSKY-féle eredmény a (7.9)-ből (8.1) és (8.2) alkalmazásával rögtön felírható. Ugyanígy levezethető (7.5)-ből, (8.1) segítségével, a LAGUERRE-polinómokra vonatkozó és már megemlített KOGBETLIANTZ-féle összefüggés is.²⁴

Természetesen még igen sok összefüggést lehetne megállapítani e négy polinóm-osztály között. Mi megelégszünk itt az ebben a fejezetben adott eredményekkel.

9. §. Általánosítások.

Foglalkozzunk most a már több helyen jelzett általánosított eredményekkel. Az összeg átrendezése által könnyen bebizonyítható, hogy

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (h)_r}{(c)_r r!} z^r F(a+r, b; c+r; xz) = F_1(a, b, h; c; xz, z), \quad (9.1)$$

(|z| < 1)

ahol F_1 az APPELL-féle kétváltozós

$$F_1(a, b, b'; c; x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s} (b)_r (b')_s}{(c)_{r+s} r! s!} x^r y^s \quad (9.2)$$

hipergeometrikus függvényt jelenti. Az összetartás feltétele itt: $|x| < 1$, $|y| < 1$. A (9.1) baloldalának más átrendezése révén a

²³ Lásd pl. G. SZEGŐ loc. cit. (5.6.5) összefüggést.

²⁴ E. KOGBETLIANTZ, Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite. Annales de l'Éc. Norm. Sup. (3), vol. 49. 1932. p. 137—221.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (h)_r}{(c)_r r!} F(-r, b; -h+1-r; x) z^r = \quad (9.3)$$

$$= F_1(a, b, h; c; xz, z)$$

$$(|z| < 1)$$

összefüggést találjuk. Ha itt $h = -\beta$, $b = a + \beta + 1$, (0.2) szerint a következő általánosított generátor-függvényre jutunk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} P_n^{(a, \beta-n)}(x) z^n = \quad (9.4)$$

$$= F_1\left(a, a + \beta + 1, -\beta; c; \frac{1+x}{2} z, z\right),$$

$$(|z| < 1)$$

ami magában foglalja a (2.9), (2.10) és (3.17) képleteket. A két utóbbinak általánosítása a (9.4) következő speciális esete:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(a+1)_n} P_n^{(a, \beta-n)}(x) z^n = \quad (9.5)$$

$$= (1-z)^{-a} F\left(a, a + \beta + 1; a + 1; -\frac{z(1-x)}{2(1-z)}\right).$$

$$(|z| < 1)$$

Könnyen általánosíthatjuk a (4.6) multiplikáció-tételt is. Az ott követett bizonyítási eljárással a következő összefüggést találjuk:

$$F\left(a, b; c; t \frac{1+x}{2}\right) = \quad (9.6)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (b)_r (\gamma + \delta + 1)_r}{(c)_r (\gamma + \delta + 1)_{2r}} t^r {}_3F_2\left(a+r, b+r, \delta+1+r; c+r, \gamma+\delta+2+2r; t\right) P_r^{(\gamma, \delta)}(x).$$

Ha $a = -n$, $b = n + a + \beta + 1$, $c = a + 1$, (9.6) ismét a (4.6) összefüggésre vezet. A redukciós esetek itt: $c = \delta + 1$ és $t = 1$ esetében még $a + b = c + \gamma$ is.

Adjuk most a (9.6) néhány különleges esetét.

a) Ha $b = c$, a JACOBI-polinóмок inverziójának általánosítását kapjuk, amit itt csak $t = 1$ esetében írunk le:

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^a = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+a+1)(2r+\gamma+\delta+1)(-a)_r \Gamma(r+\gamma+\delta+1)}{\Gamma(r+\gamma+1) \Gamma(r+a+\gamma+\delta+2)} P_r^{(\gamma, \delta)}(x). \quad (9.7)$$

($\gamma+a > -1$)

Ha $a=n$, (9.7) azonos (5.16) harmadik képletével.

b) Ha $b=c$, írjunk (9.6)-ban t helyébe $\frac{t}{a}$ -t és legyen $a \rightarrow \infty$:

$$e^{\frac{1+x}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\gamma+\delta+1)_r}{(\gamma+\delta+1)_{2r}} {}_1F_1(\delta+1+r; \gamma+\delta+2+2r; t) P_r^{(\gamma, \delta)}(x). \quad (9.8)$$

Innen a γ és δ megfelelő választásával a BESSEL-függvények elméletébe tartozó összefüggéseket vezethetünk le, többek között SONINE, POISSON és GEGENBAUER ismert tételeit stb.²⁵

c) Írjunk a (9.6)-ban: $\frac{1+x}{2} = \varepsilon y$, $\gamma = \frac{1}{\varepsilon}$, $t = \frac{z}{\varepsilon}$ -t és legyen $\varepsilon \rightarrow 0$. Ekkor a LAGUERRE-polinómmal kapcsolatos

$$F(a, b; c; yz) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(a)_r (b)_r}{(c)_r} z^r {}_3F_1\left(\begin{matrix} a+r, b+r, \delta+1+r \\ c+r \end{matrix}; z\right) L_r^{(\delta)}(y) \quad (9.9)$$

összefüggést találjuk. A paraméterek megfelelő választásával most a LAGUERRE-polinómmal általánosított generátor-függvényeire jutunk, amelyek egyébként a (8.1) segítségével (9.4)-ből is levezethetők. Ezekre itt részletesen nem térünk ki.

Adósok vagyunk még a (3.3) bizonyításával, amit most már könnyűszerrel megadhatunk. Legegyszerűbb lesz a jobboldalon szereplő $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(y)$ szorzat helyébe a WATSON-féle (3.1) kifejezést írni és az F_4 függvényeket (3.2) szerint sorbafejteni. Be kell bizonyítanunk, hogy a két oldalon a megfelelő együtthatók egyenlők, ami egyértelmű a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(a+p)_k (b+p)_k (a+\beta+1+2p)_k}{(a+\beta+1+2p)_{2k} k!} \cdot {}_4F_4(a+p+k, b+p+k; a+\beta+2+2p+2k; t) \equiv 1$$

²⁵ Lásd pl. G. N. WATSON, loc. cit.⁷

azonosság bizonyításával, p minden nem-negatív egész értékére, ha $|t| \leq 1$. Ez azonban a (9.6)-ból rögtön következik, ha ott az $x = -1$ és $c = \delta + 1$ helyettesítéseket eszközöljük. A (3.3) helyessége ezzel igazolást nyert és most már jelezhetjük alkalmazásait is, a 3. §-ban tárgyaltakon kívül.

Ha (3.3)-ban $x = \pm 1$ vagy $y = \pm 1$, a (9.6) összefüggést kapjuk, tehát e két eredmény kölcsönösen levezethető egymásból.

Ha ugyanott, a (3.3)-ban, $a = b = \frac{1}{\varepsilon}$, $t = \varepsilon^2 z$ és $\varepsilon \rightarrow 0$, H. BATEMAN egy fontos eredményét találjuk, melyet a következő alakban szokás írni:²⁶

$$\begin{aligned} z J_\alpha(z \sin \varphi \sin \phi) J_\beta(z \cos \varphi \cos \phi) &= \\ &= 2^{\alpha+\beta+2} \sin^\alpha \varphi \sin^\alpha \phi \cos^\beta \varphi \cos^\beta \phi \cdot \\ &\cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n J_{2n+\alpha+\beta+1}(z) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2\varphi) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2\phi), \end{aligned}$$

ahol $c_n = \frac{1}{h_n^{(\alpha, \beta)}}$ (lásd az (1.3)-at).

10. §. Két- és többváltozós Jacobi-polinóмок.

A JACOBI-polinóмок (0.2) definíciójából kiindulva, P. APPELL kereste a többváltozós JACOBI-polinóмокot is. Megtartva az ő jelöléseit, a kétváltozós polinóмок APPELL-féle kifejezése a következő:²⁷

$$F_{m, n}(\alpha, \gamma, \gamma'; x, y) = (1-x-y)^{m+n}.$$

$$\cdot F_2 \left(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n; -m, -n; \gamma, \gamma'; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1} \right),$$

ahol F_2 a (3.11)-gyel megadott hipergeometrikus függvény. Mint APPELL kimutatta, ezek a polinóмок rendelkeznek az ortogonalitás tulajdonságával és az (1.2)-höz hasonló alakra is hozhatók. Mindamellett könnyen látható, hogy e polinóмок formális tulajdonságai nem mutatják közvetlenül a (0.2) JACOBI-polinóмокokkal

²⁶ loc. cit. 7

²⁷ P. APPELL, Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. Mémoires des Sc. Math., fasc. 3. Paris. 1925.

való rokonságot, azaz például a generátor-függvények, az explicit alak stb., nem lesznek a $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ -re levezetett összefüggésekhez hasonlók. Ezért kerestük a JACOBI-polinómkok egy másik általánosítását, mely ennek a követelménynek megfelelően. Itt csak a formális tulajdonságok ismertetésére szorítkozunk; más, behatóbb vizsgálatokkal esetleg később fogunk foglalkozni. Mindenesetre már itt megjegyezzük, hogy az ortogonalitás fontos kérdése a polinómokra még megoldatlan.

Lássuk tehát a mi általánosításunkat. A kétváltozós Jacobi-polinómkokat a következő módon határozzuk meg:

$$P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \frac{(a+1)_{m+n}}{m!n!} \cdot F_1\left(m+n+a+\beta+1, -m, -n; a+1; \frac{1-x}{2}, \frac{1-y}{2}\right), \quad (10.1)$$

ahol F_1 a (9.2) hipergeometrikus függvény, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Míg APPELL új paramétert vezet be, látjuk, hogy (10.1)-ben csak az egyváltozós polinóm két paramétere fordul elő. A többváltozóra való általánosítás módja világosan látható.

Az általános F_1 függvényekre adott eredményekből²⁸ a $P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ igen sok tulajdonsága azonnal kiolvasható. Itt csak a főbbeket ismertetjük, az egyváltozós esettel való analógia bemutatása végett.

Ha felhasználjuk az F_1 EULER-transzformációját,

$$F_1(a, b, b'; c; x, y) = (1-x)^{-b}(1-y)^{-b'} F_1(c-a, b, b'; c; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}),$$

a következő módosított definícióra jutunk:

$$P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \frac{(a+1)_{m+n}}{m!n!} \left(\frac{1+x}{2}\right)^m \left(\frac{1+y}{2}\right)^n \cdot F_1\left(-m-n-\beta, -m, -n; a+1; \frac{x-1}{x+1}, \frac{y-1}{y+1}\right). \quad (10.2)$$

²⁸ E. FELDHEIM, loc. cit.³

Innen rögtön következik az (1.1)-hez teljesen hasonló explicit alak: az x -ben m és y -ban n -edfokú kétváltozós polinóm:

$$P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n \binom{m+n+\alpha}{m+n-r-s} \binom{m+n+\beta}{r+s} \binom{m+n-r-s}{m-r} \cdot \binom{r+s}{r} \left(\frac{x-1}{2}\right)^r \left(\frac{y-1}{2}\right)^s \left(\frac{x+1}{2}\right)^{m-r} \left(\frac{y+1}{2}\right)^{n-s}. \quad (10.3)$$

Ugyancsak látható az is, hogy

$$P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) = (-1)^{m+n} P_{m,n}^{(\beta,\alpha)}(-x,-y). \quad (10.4)$$

Másrészt, ha tekintetbe vesszük a

$$\begin{aligned} \lambda^{-b} \mu^{-b'} F_1\left(a, b, b'; c; \frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu}\right) &= \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{(b)_r (b')_s}{r! s!} (\lambda-1)^{-b-r} (\mu-1)^{-b'-s} \cdot \\ &\cdot F_1(a, -r, -s; c; x, y) \end{aligned}$$

összefüggést, a (4.1) multiplikációs képlet általánosítását kapjuk:

$$\begin{aligned} \lambda^m \mu^n P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}\left(1 - \frac{1-x}{\lambda}, 1 - \frac{1-y}{\mu}\right) &= \\ = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n \frac{(a+1)_{m+n} (\lambda-1)^r (\mu-1)^s}{(a+1)_{m+n-r-s} r! s!} P_{m-r,n-s}^{(\alpha,\beta+r+s)}(x,y), \end{aligned} \quad (10.5)$$

ahonnan az egyváltozós esethez hasonló következtetéseket vonhatunk le.

A kétváltozós (10.1) JACOBI-polinóm differenciál-egyenletei is teljesen hasonlóak az egyváltozós polinóméhoz. Így (10.3)-ból

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) &= \frac{1}{2}(m+n+\alpha+\beta+1) P_{m-1,n}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x,y), \\ \frac{\partial}{\partial y} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) &= \frac{1}{2}(m+n+\alpha+\beta+1) P_{m,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x,y); \end{aligned} \quad (10.6)$$

az F_1 hipergeometrikus függvények elméletéből pedig, ha $P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) \equiv P$,

$$\begin{aligned}
 & (1-x^2) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + (1+x)(1-y) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \\
 & \quad + [(n+\beta-a)-(n+a+\beta+2)x] \frac{\partial P}{\partial x} + \\
 & \quad + m(1-y) \frac{\partial P}{\partial y} + m(m+n+a+\beta+1)P = 0 \\
 & (1-y^2) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (1-x)(1+y) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \\
 & \quad + [(m+\beta-a)-(m+a+\beta+2)y] \frac{\partial P}{\partial y} + \\
 & \quad + n(1-x) \frac{\partial P}{\partial x} + n(m+n+a+\beta+1)P = 0, \\
 & (y-x) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + n \frac{\partial P}{\partial x} - m \frac{\partial P}{\partial y} = 0.
 \end{aligned} \tag{10.7}$$

Ez is az egyváltozós esettel való teljes analógiára mutat, ami hasonlóképen kitűnik a generátor-függvényekből is.

Kezdjük az ú. n. «homogén-csoport»-képlettel:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) u^m v^n = \sum_{k=0}^{\infty} (u+v)^k P_k^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{ux+vy}{u+v}\right), \tag{10.8}$$

ahol a jobboldalon az egyváltozós (0.2) JACOBI-polinóm szerepel. A (10.8) bizonyítását legegyszerűbb az F_1 integrál-előállításának segítségével²⁹ végezni, amely szerint

$$\begin{aligned}
 P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(1-2x, 1-2y) &= \frac{\Gamma(\alpha+1+m+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+1+m+n) \Gamma(-\beta-m-n) m! n!} \cdot \\
 & \cdot \int_0^1 t^{m+n+\alpha+\beta} (1-t)^{-m-n-\beta-1} (1-tx)^m (1-ty)^n dt = \\
 &= - \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{\sin \beta \pi}{\pi} \frac{(\alpha+1)_{m+n} (\beta+1)_{m+n}}{(\alpha+\beta+1)_{m+n} m! n!} \cdot \\
 & \cdot \int_0^1 \left(\frac{t(tx-1)}{1-t} \right)^m \left(\frac{t(ty-1)}{1-t} \right)^n t^{\alpha+\beta} (1-t)^{-\beta-1} dt.
 \end{aligned}$$

²⁹ P. APPELL, loc. cit.²⁷

Így

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(1-2x, 1-2y) u^m v^n = - \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{\sin \beta \pi}{\pi} \cdot \\
& \cdot \int_0^1 t^{\alpha+\beta} (1-t)^{-\beta-1} F\left(a+1, \beta+1; a+\beta+1; \frac{t[(ux+vy)t-(u+v)]}{1-t}\right) dt = \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{(a+1)_m (-m)_k (a+\beta+m+1)_k}{m! (a+1)_k k!} (u+v)^m \left(\frac{ux+vy}{u+v}\right)^k = \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} (u+v)^m P_m^{(\alpha,\beta)}\left(1-2\frac{ux+vy}{u+v}\right), \text{ q. e. d.}
\end{aligned}$$

A (10.8) és (2.1) segítségével most már azonnal felírhatjuk a kétváltozós JACOBI-polinómak generátor-függvényét is:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x, y) u^m v^n &= 2^{\alpha+\beta} [1-2ux-2vy+(u+v)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\
&\cdot \left\{1-u-v+[1-2ux-2vy+(u+v)^2]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\alpha} \cdot \\
&\cdot \left\{1+u+v+[1-2ux-2vy+(u+v)^2]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\beta}.
\end{aligned} \quad (10.9)$$

(10.8)-ből könnyen levezethetők még a kétváltozós JACOBI-polinómak redukciós képletei is:

$$P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x, x) = \frac{(m+n)!}{m! n!} P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

és

$$P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x, 1) = \frac{(a+1)_{m+n}}{n! (a+1)_m} P_m^{(\alpha,\beta+n)}(x).$$

Az egyszerű generátor-függvény, a (2.9) általánosítása, itt szintén ugyanolyan alakú:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}^{(\alpha,\beta-m-n)}(x, y) u^m v^n = \\
& = (1-u-v)^{\beta} \left(1-u\frac{1+x}{2}-v\frac{1+y}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1}; \\
& \quad (|u|+|v|<1)
\end{aligned} \quad (10.10)$$

a (2.5) általánosítása végett pedig keressük a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}}{m! n!} u^m v^n F_1(a+m+n, -m, -n; c; x, y)$$

összeget. A (9.2) helyettesítése és az összeg átrendezése után ez a következő alakra hozható:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r+2s} (-xu)^r (-yv)^s}{(c)_{r+s} r! s!} \cdot \frac{(a+2r+2s)_{p+q} u^p v^q}{p! q!}.$$

De

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(a+2r+2s)_{p+q} u^p v^q}{p! q!} = (1-u-v)^{-a-2r-2s},$$

($|u+v| < 1$)

és így, a (2.3) értelmében végül is az

$$(1-u-v)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}; c; -\frac{4(xy+vy)}{(1-u-v)^2}\right)$$

kifejezést találjuk. Ha már most $a = \alpha + \beta + 1$, $c = \alpha + 1$, a keresett generátor-függvény:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)_{m+n}}{(\alpha + 1)_{m+n}} u^m v^n P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \quad (10.11)$$

$$= (1-u-v)^{-\alpha-\beta-1} F\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2} + 1; \alpha + 1; -\frac{2u(1-x) + 2v(1-y)}{(1-u-v)^2}\right),$$

(ahol $|u+v| < 1$). Az általánosítás akárhány változó esetére innen közvetlenül felírható.

Másrészt könnyen bebizonyítható a (10.8)-hoz hasonló következő «homogén-csoport» képlet:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)_{m+n}}{(\alpha + 1)_{m+n}} u^m v^n P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}(x, y) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)_r}{(\alpha + 1)_r} (u+v)^r P_r^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{ux+vy}{u+v}\right)$$

is, mely a (2.5) alapján rögtön megadja a kétváltozós (10.11) generátorfüggvényt.

Ha bevezetjük a kétváltozós «ultraszférikus» polinómat, az (1.6) analógiájára:

$$P_{m,n}^{(\lambda)}(x, y) = \frac{(2\lambda)_{m+n}}{(\lambda + \frac{1}{2})_{m+n}} P_{m,n}^{(\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(x, y); \quad (10.12)$$

$(R(\lambda) > -\frac{1}{2})$

az előbbi összefüggésből rögtön levezetjük a (2.2)-höz teljesen hasonló generátor-függvényt:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}^{(\lambda)}(x, y) u^m v^n = [1 - 2ux - 2vy + (u+v)^2]^{-\lambda}. \quad (10.13)$$

Innen levezethetők a következő elemi összefüggések:

$$\left. \begin{aligned} P_{m,n}^{(\lambda)}(-x, -y) &= (-1)^{m+n} P_{m,n}^{(\lambda)}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} P_{m,n}^{(\lambda)}(x, y) &= 2\lambda P_{m-1,n}^{(\lambda+1)}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial y} P_{m,n}^{(\lambda)}(x, y) &= 2\lambda P_{m,n-1}^{(\lambda+1)}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

és az

$$\begin{aligned} &(m+1)[P_{m+1,n}^{(\lambda)}(x, y) - 2yP_{m+1,n-1}^{(\lambda)}(x, y) + P_{m+1,n-2}^{(\lambda)}(x, y)] = \\ &= 2x(m+\lambda)P_{m,n}^{(\lambda)}(x, y) - (m+2\lambda-1)P_{m-1,n}^{(\lambda)}(x, y) - 2(m+\lambda)F_{m,n-1}^{(\lambda)}(x, y) \end{aligned} \quad (10.15)$$

rekurziós képlet, valamint az n -re felírt analóg összefüggés.

A kétváltozós JACOBI-polinómnak ezt az általános jellegű ismertetését és egyúttal dolgozatunkat is a következő két határ-összefüggéssel zárjuk:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}\left(1 - \frac{2x}{\beta}, 1 - \frac{2y}{\beta}\right) = L_{m,n}^{(\alpha)}(x, y),$$

ahol $L_{m,n}^{(\alpha)}(x, y)$ a kétváltozós LAGUERRE-polinómnak definíciója,³⁰ és

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{m!n!}{(m+n)!} (m+n)^{-\alpha} P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}\left(\cos \frac{x}{\sqrt{m(m+n)}}, \cos \frac{y}{\sqrt{m(m+n)}}\right) = \\ = 2^{\alpha} (x^2 + y^2)^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned}$$

ami az egyváltozós JACOBI-polinómnak egy aszimptotikus tételének általánosítása.

Feldheim Ervin.

³⁰ E. FELDHEIM, loc. cit.³

CONTRIBUTIONS À LA THÉORIE DES POLYNOMES DE JACOBI.

Nous donnons dans ce travail une longue série de résultats sur les polynomes de JACOBI à une variable, définis par (0.2) où F désigne la fonction hypergéométrique de GAUSS. Ces résultats que nous croyons presque tous nouveaux forment des cas particuliers de résultats plus généraux établis pour les fonctions hypergéométriques. (Voir E. FELDHEIM, loc. cit. sous³.) La signification des formules données dans le texte hongrois est bien claire, de sorte que nous croyons inutile de les reproduire ici, et nous attirons l'attention particulièrement aux fonctions génératrices (2.5) et (2.9), ainsi qu'à des généralisations de cette dernière. Remarquons que, tandis que la fonction génératrice classique (2.1) ne se réduit pas dans le cas ultrasphérique $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ à la fonction génératrice connue (2.2), notre résultat, ayant l'avantage d'être plus simple que (2.1), redonne immédiatement (2.2). La formule (3.3), qui peut être considérée comme une fonction génératrice de produits de deux polynomes de JACOBI, redonne comme cas particuliers des résultats de W. N. BAILEY et H. BATEMAN. Une autre fonction génératrice de produits de polynomes de JACOBI est donnée par (3.16).

La formule de multiplication (4.6) doit encore être mentionnée, comme résultat le plus général de ce genre. Elle contient le développement du polynome $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ en série de polynomes de JACOBI de paramètres γ, δ : formule (5.1). Indiquons les développements de polynomes de JACOBI en série ultrasphérique (5.3), et son inversion (5.5), ainsi que les cas particuliers importants de ces résultats.

Le § 7. contient des représentations et relations intégrales entre polynomes de JACOBI et ultrasphériques; voir, en particulier, (7.5).

Parmi les relations entre polynomes de JACOBI et de LAGUERRE, indiquons surtout la relation intégrale (8.8). Partant de résultats connus sur les polynomes de LAGUERRE, cette équation (8.8) permet de déduire différentes relations sur $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, autrement déduites dans les paragraphes précédents.

Nous avons donné dans le § 9. des généralisations, par exemple le développement de $\left(\frac{1-x}{2}\right)^a$ en série de polynomes de JACOBI, a étant quelconque. Pour $a = n$, on a l'inversion (5.16) des polynomes de JACOBI.

Enfin, dans le § 10., on s'est occupé d'une généralisation pour le cas de deux variables (formule 10.1), différente de celle d'APPELL. Ici, F_1 désigne une fonction hypergéométrique de deux variables, donnée par (9.2). Les résultats formels donnés dans le § 10. montrent l'analogie avec ceux du cas à une variable. Voir, en particulier, les fonctions génératrices (10.9), (10.10), et (10.11), ainsi que les polynômes ultrasphériques à deux variables (10.12) et (10.13). La question de l'orthogonalité de ces polynômes $P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ reste encore ouverte.

Ervin Feldheim.

VÉGTELEN GRÁFOK JÓLIRÁNYÍTHATÓSÁGÁRÓL.

Egy irányítatlan gráfot *jólirányíthatónak* nevezünk akkor, ha a gráf minden élére bevezethető egy-egy irány úgy, hogy a gráf bármely pontjából el lehet jutni a gráf bármely más pontjába a gráf élein, mindenütt a bevezetett irányítás szerint haladva. Az ilyen módon irányított gráfot *jólirányított*nak fogjuk nevezni.

H. E. ROBBINS¹ bebizonyította a következő tételt:

Véges összefüggő gráf jólirányíthatóságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy minden éle a gráf egy körén feküdjék.

E dolgozat célja kimutatni, hogy ez a tétel végtelen gráfra is érvényes.

Hogy a feltétel szükséges, az kézenfekvő, mert ha a G gráfnak egy AB éle nem fekszen körön, akkor mind A -ból B -be, mind pedig B -ből A -ba csak ezen az élen át lehetne eljutni, tehát például az \overrightarrow{AB} élirányítás esetén B -ből A -ba nem vezetne kellően irányított út.

Az elégségeség bizonyításához lássuk be először a következő két segédtételt.

1. segédtétel. *Ha a Γ_1 és Γ_2 gráf jólirányított és van legalább egy közös pontjuk P_0 , akkor a $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ gráf is jólirányított, ha úgy irányítjuk, hogy a közös éleken a Γ_1 irányítása marad meg, a többin pedig az eredeti élirányítások.*

Itt két irányítatlan gráf, Γ_1 és Γ_2 , összegén, $\Gamma_1 + \Gamma_2$ -n, azt a

¹ H. E. ROBBINS: A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control. *The American Mathematical Monthly*, 46. vol., 281—283 (1939).

gráfot értjük, amely éppen Γ_1 és Γ_2 éleit tartalmazza. (Hasonló értelemben fogjuk a későbbiekben a Σ összegezési jelet is használni.)

A fenti segédétel bizonyításához csak azt kell belátnunk, hogy Γ_1 és Γ_2 bármely P pontjából el lehet jutni az előírt irányok szerint haladva a közös P_0 pontba és viszont. (Ugyanis ekkor a Γ gráf tetszőleges P pontjából el lehet jutni a tetszőleges Q pontba úgy, hogy először elmegyünk a P_0 -ba, és azután a P_0 -ból a Q -ba.)

Ezt pedig így láthatjuk be: ha P a Γ_1 -nek pontja, akkor el lehet jutni innen a P_0 -ba és viszont P_0 -ból a P -be, mert a P_0 közös pont, tehát Γ_1 -nek is pontja, továbbá Γ_1 jólirányított volt és éleinek irányítása a Γ -ban sem változott meg.

Ha P a Γ_2 -nek pontja, akkor Γ_2 régi irányítása segítségével el lehetne jutni egy u irányított úton a P_0 -ba, mert P_0 a Γ_2 -nek is pontja és Γ_2 jólirányított az eredeti irányítás szerint. Ha ez az út nem felelne meg a Γ -ban, az csak úgy lehet, hogy a P -ból a P_0 felé haladva az u útnak van egy első közös pontja a Γ_1 -gyel. Innen azonban már az új irányítás szerint el lehet jutni a P_0 -ba. Hasonlóképen lehet belátni azt is, hogy az új irányítás szerint P_0 -ból is el lehet jutni a Γ_2 tetszőleges P pontjába. Ezzel az első segédételt bebizonyítottuk,

2. segédétel. *Ha a gráfok jólrendezett*

$$G_0, G_1, \dots, G_a, \dots$$

sorozatának minden gráfja jólirányított, és ha $\beta < a$ esetben a G_a mindig tartalmazza a G_β -t, továbbá irányítása a közös éleken megegyezik G_β irányításával, akkor a $G = \sum_a G_a$ gráf jólirányított, ha éleire a $G_0, G_1, \dots, G_a, \dots$ gráfok élein előírt irányításokat írjuk elő.

Ugyanis, ha P és Q két pontja G -nek, akkor P bele kell tartozzék valamelyik G_{α_1} -be, Q valamelyik G_{α_2} -be. Jelöljük az α_1 és α_2 közül a nagyobbikat α -val; akkor feltétel szerint P is, Q is benne van a jólirányított G_α -ban, tehát összeköthető egy

P -ből Q felé vezető irányított úttal a G_α -ban. És ez természetesen G -nek is megfelelően irányított útja.

Most térjünk rá a tulajdonképeni tételünkre. Jelöljük G -vel azt a végtelen gráfot, amelyről be akarjuk bizonyítani, hogy jólirányítható, ha minden éle a gráf egy körén fekszik.

Az elégségeség bizonyításához felhasználjuk a ZERMELO-féle tételt, mely szerint minden halmaz jólrendezhető.

E tétel szerint van egy legkisebb transzfinit rendszám \mathcal{Q} , amelynek számossága megegyezik az adott gráf éleinek a számosságával. A G gráf élei akkor felírhatók \mathcal{Q} -típusú jólrendezett transzfinit sorozatban:

$$l_0, l_1, \dots, l_\alpha, \dots \quad (\alpha < \mathcal{Q}) \quad (I)$$

Definiáljuk most transzfinit indukcióval az irányított gráfoknak egy ugyancsak \mathcal{Q} -típusú jólrendezett

$$G_0, G_1, \dots, G_\alpha, \dots \quad (\alpha < \mathcal{Q})$$

sorozatot a következőképen:

G_0 legyen a G egy olyan köre, amely tartalmazza az l_0 élt. Mivel a gráf minden éle körön fekszik, ilyen kör van. Ezen a körön legyenek az élek egyik vagy másik irányban *folytatólagosan* irányítva.

Tegyük fel továbbá, hogy az irányított G_β gráfok már minden α -nál kisebb β -ra ($\alpha < \mathcal{Q}$) definiálva vannak és a következő két tulajdonsággal rendelkeznek:

1. jólirányítottak;

2. ha $\beta_1 < \beta_2$, akkor G_{β_2} tartalmazza a G_{β_1} gráfot és G_{β_2} irányítása a közös éleken G_{β_1} irányításával egyezik meg.

Definiáljuk a G_α gráfot! Tekintsük e célból a $\Gamma_1 = \sum_{\beta < \alpha} G_\beta$ gráfot. Ez a gráf a 2. segédtétel szerint a G_β -kra megadott élirányítások megtartása mellett jólirányított gráf. Mivel $\alpha < \mathcal{Q}$ és \mathcal{Q} ú. n. kezdőrendszám (Anfangszahl), a gráf élei között vannak olyanok, amelyeket a $\Gamma_1 = \sum_{\beta < \alpha} G_\beta$ nem tartalmaz. A jólrendezettség szerint van ezek között az (I)-ben egy első. Legyen ez az l_{α_0} . Mivel a gráf összefüggő, van egy olyan út, amely összeköti az

l_0 -t az l_{α_0} -val. Az útnak minden éle feltétel szerint a G egy körén fekszik. Ha az út minden éléhez egy-egy ilyen kört hozzáveszünk, kapunk egy véges gráfot, amelynek minden éle egy körön fekszik, tehát ROBBINS tétele szerint jólirányítható. Jelöljük ezt Γ_2 -vel. Irányítsuk a $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ gráfot úgy, hogy a közös éleken a Γ_1 irányítása maradjon meg, a többin Γ_2 -é. Ekkor az első segédétel szerint a Γ gráf jólirányított lesz. Ez a Γ gráf legyen éppen a G_α . A G_α definíciójából következik, hogy a G_α -nak is megvan a G_β -kra feltételezett 1. és 2. tulajdonsága.

Az így definiált

$$G_0, G_1, \dots, G_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

gráfsorozatnak megvan tehát az a tulajdonsága, hogy minden tagja jólirányított és ha $\beta < \alpha$, akkor G_α irányítással együtt tartalmazza a G_β -t. Tehát ez a gráfsorozat eleget tesz a második segédétel feltételeinek, amiből a segédétel szerint következik, hogy a $\sum_\alpha G_\alpha$ gráf jólirányított, ha az egyes éleken a G_α gráfok által előírt irányítást tartjuk meg. Ha tehát be tudjuk bizonyítani, hogy a $\sum_\alpha G_\alpha$ gráf magával a G gráffal azonos, akkor ezzel ROBBINS tételének általánosítását be is bizonyítottuk.

Hogy a $\sum_\alpha G_\alpha$ a G gráffal azonos, ahhoz csak azt kell belátnunk, hogy G minden l_α éle szerepel a $\sum_\alpha G_\alpha$ -ban. Ennek igazolására pedig elég azt kimutatnunk, hogy minden l_α benne van a G_α -ban. Ezt pedig transzfinit indukcióval fogjuk bebizonyítani.

Bizonyítás. Az l_0 benne van a G_0 -ban a G_0 definíciója szerint. Tegyük fel, hogy állításunk teljesül az összes α -nál kisebb β -kra; akkor l_α vagy benne van már a $\Gamma_1 = \sum_{\beta < \alpha} G_\beta$ -ban, amely pedig része a G_α -nak, vagy ha nem, akkor l_α az első olyan él, amely $\Gamma_1 = \sum_{\beta < \alpha} G_\beta$ -ban nem szerepel. (Ugyanis, ha az utóbbi esetben nem l_α volna az első Γ_1 -ben nem szereplő él, hanem $l_{\alpha'}$, akkor $\alpha' < \alpha$ lévén $l_{\alpha'}$ benne kellene legyen a $\Gamma_1 = \sum_{\beta < \alpha} G_\beta$ gráfban, ami ellentmondás.) De ha l_α az első él, amely a Γ_1 -ben nem szerepel, akkor benne van

a fent definiált és a G_α részét alkotó Γ_2 -ben, amely az l_α -t az l_0 -val összekötő útból s az út éleihez tartozó egy-egy körből áll. (L. G_α definícióját.) Tehát l_α mindenképen benne van a G_α -ban.

Ezzel pedig állításunkat igazoltuk.

Egyed László.

ÜBER DIE WOHLGERICHTETEN UNENDLICHEN GRAPHEN.

In dieser Note wird der für endliche Graphen bewiesene Satz von Herrn H. E. ROBBINS¹ auf unendliche Graphen verallgemeinert; d. h. es wird bewiesen, dass jeder unendliche zusammenhängende Graph, dessen jede Kante auf einem Kreis liegt, so gerichtet werden kann, dass man aus jedem Punkt des Graphen jeden anderen Punkt auf den Kanten in den vorgeschriebenen Richtungen erreichen kann.

L. Egyed.

BIZONYOS MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁL- EGYENLETEK SAJÁTÉRTÉKEINEK BECSLÉSE.

1. §. Bevezetés.

A STURM—LIOUVILLE-féle differenciálegyenletek — amelyeknek elmélete körülbelül száz esztendőre tekint vissza — egy évszázad alatt a teoretikus fizikának egyik legfontosabb matematikai segéd-eszközeivé váltak. Míg régebben főleg a rugalmasság elméletében játszottak szerepet ezek a differenciálegyenletek, addig újabban igen fontos alkalmazási területre találtak a quantummechanikai problémák tárgyalásánál is. Ennek megfelelően elméletük kiépítésével nemcsak matematikusok, hanem fizikusok és az alkalmazott mechanika szakemberei is foglalkoztak. Ez utóbbi két tárgykör problémái viszont sok tekintetben irányították is az elmélet kifejlődését. Az egyik ilyen probléma az ú. n. kerületi értékek feladata. Ezt a kérdést először D'ALEMBERT vetette fel 1763-ban a következő, később igen sokat tanulmányozott és bennünket is közelebbről érdeklő speciális esetben. Rezgő hurok vizsgálata az

$$y'' + \lambda q(x)y = 0$$

differenciálegyenletre vezet, amelynek az $y(a) = 0$ és $y(b) = 0$ határfeltételeket kielégítő megoldásai keresendők.

Ebbe a tárgykörbe vágó fontos feladat arra a kérdésre válaszolni, hogy miképpen helyezkednek el a valós sajátértékek a számegyenesen? Ezzel a kérdéssel később LIOUVILLE¹ foglalkozott; majd HOBSON² fejlesztette tovább az ő eredményeit.

¹ Journal de Liouville 2 (1837), 24.

² Proc. Lond. Math. Soc. (2) 6 (1908), 349.

Mindketten a sajátértékek aszimptotikus eloszlását vizsgálták. Az ő formuláik számot adnak a nagy indexű sajátértékek viselkedéséről. Fizikai alkalmazásoknál azonban éppen nem a nagy, hanem a kis indexű sajátértékek a fontosak. (Például a gyakorlatban a húrok rezgéseinél fontosabb az alaphang rezgésszámának ismerete, mint a felhangoké.) Szükségesnek mutatkozott tehát olyan eljárások kidolgozása, amelyek a kis sajátértékeknek a számegyenesen való elhelyezkedéséről számot tudnak adni. Az e tárgyra vonatkozó vizsgálatok részben közelítő értékek megadására szorítkoznak, részben határok közé fogják be a sajátértékeket; végül iterációs eljárásokat is dolgoztak ki a sajátértékek megállapítására.

A legrégebbi ilyen eljárás, a RAYLEIGH-féle ú. n. energiamódszer,³ fizikai megfontolásokból indult ki. RAYLEIGH módszerét e század elején RITZ WALTER fejlesztette tovább.⁴ Ő a sajátértékproblémáknak bizonyos *variációs* problémával való kapcsolatát használta fel és eljárást adott, amellyel a sajátértékeket tetszőleges pontossággal fokozatosan meg lehet közelíteni. RITZ módszerével lényegében megegyezik, de a praktikus számítások szempontjából könnyebben kezelhető az orosz GALERKIN⁵ eljárása. Ugyanebből az időből, az 1910-es évek elejéről származnak még WEYL H.-nak az integrálegyenletek sajátértékeire vonatkozó eredményei.⁶

Nagyobb mértékben azonban csak az 1920-as években kezdtek ezzel a problémakörrel foglalkozni. A sajátértékekre vonatkozó újabb vizsgálódások tekintetében alapvetőek COURANT⁷

³ Theory of sound, 2. kiadás, I. kötet (1894). Több helyen szétszórva, így 111., 284., 287. lapok.

⁴ Journ. f. reine u. angew. Math. 135 (1908), 1—61. Ann. d. Phys. (4) 28 (1909), 737.

⁵ Oroszul 1915-ben. Idézve pl. BIEZENO—GRAMMEL: Techn. Dynamik, (1939), 137.

⁶ Math. Ann. 68 (1910), 220—269; 71 (1912), 441—479. Crelle's Journ. 14 (1912), 1—11.

⁷ Math. Zeitschr. 7 (1920), 1—57. COURANT—HILBERT: Methoden d. math. Physik, 1923.

munkái, akinek először sikerült a különböző sajátértékeket egy mellékfeltételekkel terhelt variációs számítási probléma megoldásai-ként egymástól függetlenül definiálni. COURANT-nak igen termékeny gondolata volt még a *feltételek szigorításának*, illetve *enyhítésének elve*, amely lényegében már WEYL-nél is megtalálható. (Math. Ann. 71, 1912, 441—479.)⁸

Ismét más úton indult el FUNK,⁹ aki az elasztomechanikában ENGESSER—VIANELLO-eljárás néven ismert, voltaképpen a PICARD-féle iterációs eljárással azonos módszerről bizonyította be, hogy alsó és felső korlátot szolgáltat a sajátértékek számára. Ugyanezzel a problémával, a nagyságban n -ik sajátértéknek hibahatárok közé való szorításával az utolsó tíz évben többen is foglalkoztak. Így igen érdekes módszert adott meg WEINSTEIN,¹⁰ amelynek segítségével a $0 < \lambda < \infty$ intervallumban olyan — tetszőleges kicsivé tehető — részintervallumok jelölhetők ki, amelyekbe sajátértékek esnek. Mig WEINSTEIN RITZ nyomán indul el, addig BARTA JÓZSEF¹¹ az előbbiektől teljesen független úton ad módszert az n -ik sajátértéknek korlátok közé való szorítására. Legújabban pedig ERDÉLYI ARTUR két szép dolgozatában^{12, 13} egységes nézőpontból továbbfejlesztette WEINSTEIN és BARTA módszerét. Mindkét eljárásnál ugyanis — az n -ik sajátfüggvény ismeretének hiányában — egy, az n -ik sajátfüggvénnyel több tulajdonságában megegyező függvényből kiindulva kapunk korlátokat az n -ik sajátérték számára. Minél inkább megközelíti a kiindulási függvény az n -ik sajátfüggvényt, annál pontosabb korlátok közé sikerül szorítani az n -ik sajátértékeket. Már most ERDÉLYI az n -ik sajátfüggvényt megközelítő függvénynek a LIOUVILLE-féle aszimptotikus kifejezést

⁸ Ezt az elvet alkalmazzák különböző speciális problémákra pl. SEZAWA, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 12 (1932), 227—229; TAYLOR, u. o. 13 (1933), 147—152; TREFFTZ, u. o. 15 (1935), 339—344.

⁹ Mitteilungen des Hauptvereines deutscher Ingenieure in der Tschechoslovakischen Republik, 1931, 21—22. füzet.

¹⁰ Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 20 (1934), 529—532.

¹¹ Mat. és Természettud. Ért. 55 (1937), 804—809; 57 (1938). 434—439.

¹² Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 18 (1938), 177—185.

¹³ Mat. és Természettud. Ért. 58 (1939), 13—20.

választotta és ennek segítségével olyan korlátokhoz jutott, hogy mind BARTA, mind pedig WEINSTEIN módszerével kiadódott az n -ik sajátértéknek LIOUVILLE-féle aszimptotikus becslése.

LIOUVILLE-nek ez a tétele a sajátértékekről a következőképpen hangzik, abban az általánosságban, amelyben nekünk szükségünk lesz rá:

Legyen $\varrho(x) = \varrho$ olyan függvény, amely az $a \leq x \leq b$ intervallumban pozitív és ugyanebben az intervallumban szakszosan folytonos második deriváltja van. Legyen $y(x) = y$ az

$$y'' + \lambda \varrho(x)y = 0 \quad (1)$$

differenciálegyenlet megoldása. Jelölje továbbá λ_n az első kerületi feladathoz $[y(a) = y(b) = 0]$ tartozó n -ik sajátértéket és λ'_n a második kerületi feladathoz $[y'(a) = y'(b) = 0]$ tartozó n -ik sajátértéket. Ekkor fennáll a következő két aszimptotikus formula:

$$\lambda_n \sim \left(\frac{\pi n}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)} dx} \right)^2 = A_n,$$

$$\lambda'_n \sim \left(\frac{\pi n}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)} dx} \right)^2 = A_n.$$

Célunk bebizonyítani azt, hogy ha $\varrho(x)$ a fentiekén kívül még egy bizonyos feltételnek eleget tesz, akkor a λ_n sajátértékek mindig alatta maradnak az aszimptotikus formulából adódó A_n mennyiségeknek. Ha viszont $\varrho(x)$ egy másik feltételnek tesz eleget, akkor a A_n érték λ'_n -nek szab felső határt. Mindkét esetben a A_{n+1} mennyiség megadja λ_n és λ'_n felső határát. Állításaink a következők:

1. tétel. a) Ha az

$$y'' + \lambda \varrho(x)y = 0$$

differenciálegyenletben $\varrho(x)$ az előző tételben említett kirovásokon kívül az (a, b) intervallumban felülről konvex függvény — vagy általánosabban eleget tesz a

$$\left| \frac{\varrho}{\varrho'} \frac{\varrho'}{\varrho''} \right| < 0 \quad (a \leq x \leq b) \quad (2)$$

feltételnek —, akkor

$$\lambda_n < \left(\frac{\pi n}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)} dx} \right)^2. \quad 14 \quad (2a)$$

b) Ha viszont $\varrho(x)$ a

$$\left| \frac{\varrho}{\varrho'} \frac{\varrho'}{\varrho''} \right| > 0 \quad (3)$$

feltételnek tesz eleget, akkor a második kerületi feladathoz tartozó λ'_n sajátértékekre áll a

$$\lambda'_n < \left(\frac{\pi n}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)} dx} \right)^2 \quad (3a)$$

egyenlőtlenség.¹⁵

A (2a) és (3a) egyenlőtlenségben a π konstans kisebbel nem helyettesíthető, sőt ezek az egyenlőtlenségek olymódon sem javíthatók, hogy a jobboldalon egy pozitív számot levonunk.¹⁶ A becslés javításának e módja még kis n értékekre sem lehetséges. (7. §.)

2. tétel. a) Ha $\varrho(x)$ a (2) feltételnek tesz eleget, akkor

$$\lambda'_n < \left(\frac{\pi(n+1)}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)} dx} \right)^2. \quad (4)$$

¹⁴ Ez állításunk igazolását l. Comp. Math. 6 (1939), 368—374.

¹⁵ n -ik sajátfüggvény alatt azt a függvényt értjük, amely kielégíti a differenciálegyenletet, nem konstans és az (a, b) intervallum belsejében a deriváltja $(n-1)$ -szer tűnik el.

A (2) és (3) feltételek még a következőképpen is kifejezhetők: azt a kirovást tesszük $\varrho(x)$ -re, hogy a logaritmusa az egész (a, b) intervallumban alulról konkáv, illetőleg konvex legyen. U. i. ha $\varrho(x) > 0$, akkor

$$\operatorname{sig} \left| \frac{\varrho}{\varrho'} \frac{\varrho'}{\varrho''} \right| = \operatorname{sig} \frac{d^2}{dx^2} \log \varrho(x),$$

mert

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \varrho(x) = \frac{1}{\varrho^2} \left| \frac{\varrho}{\varrho'} \frac{\varrho'}{\varrho''} \right|.$$

¹⁶ Ez közvetlen folyománya LIOUVILLE fentemlített tételének.

b) Hasonlóan, ha $\varrho(x)$ a (3) feltételnek tesz eleget, akkor

$$\lambda_n < \left(\frac{\pi(n+1)}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)} dx} \right)^2. \quad (5)$$

Említettük már, hogy a (2) feltételnek eleget tevő függvények magukban foglalják az összes (a, b) intervallumban pozitív és alulról konkáv, szakaszosan folytonos második deriválttal rendelkező függvényeket. Sőt, mint látni fogjuk, az összes (a, b) intervallumban konkáv és szakaszosan folytonos második deriválttal rendelkező, de *nem szükségképpen pozitív* $\varrho(x)$ függvényhez tartozó sajátértékekre is alkalmazható a (2a) és (4) becslés. (5. §.)

Végül ezeknek az állításoknak alkalmazásaképpen megmutatjuk, hogy egy speciális STURM—LIOUVILLE-féle egyenlet megoldásainak, a HERMITE-féle polinomoknak gyökei *hogyan szoríthatók korlátok közé*. (10. §.)

2. §. Előzetes megjegyzések.

Mielőtt a bizonyításra térnénk, egy olyan megjegyzést teszünk, amely az előbbi állításokban a lényegeset kidomborítja. Az 1a, illetőleg 1b állítás egyenértékű azzal, hogy az ottani feltételek mellett az y koefficiensének négyzetgyöke az (1) differenciálegyenletben, azaz $\sqrt{-\frac{y''}{y}}$, az (a, b) intervallumban integrálva az $n\pi$ határ alatt marad. Ha tehát

$$J(\lambda) = \int_a^b \sqrt{-\frac{y''}{y}} dx = \int_a^b \sqrt{\lambda \varrho(x)},$$

akkor

$$J(\lambda_n) < n\pi, \quad (6)$$

illetőleg

$$J(\lambda'_n) < n\pi. \quad (7)$$

Hasonlóan a 2a és a 2b állítás szerint a megfelelő feltételek mellett

$$J(\lambda'_n) < (n+1)\pi, \quad (8)$$

illetőleg

$$J(\lambda_n) < (n+1)\pi. \quad (9)$$

Második megjegyzésünk az, hogy a $J(\lambda)$ mennyiség az x változónak bármely lineáris transzformációjával szemben invariáns marad. Mert vezessünk be egy új

$$\xi = \pi \frac{x-a}{b-a} \quad (10)$$

ismeretlent, amely az (a, b) intervallumot egy lineáris transzformáció segítségével a $(0, \pi)$ intervallumra leképezi. Azt állítjuk, hogy ekkor a

$$J(\lambda) = \int_a^b \sqrt{-\frac{y''}{y}} dx \quad (11)$$

integrál ennek a leképezésnek invariánsa. Az (1) egyenletünk ugyanis a transzformáció után a következő alakot veszi fel:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \lambda \cdot \varrho \left(\frac{b-a}{\pi} \xi + a\right) y = 0.$$

Jelöljük most az $\int_0^\pi \sqrt{-\frac{d^2 y}{d\xi^2} \cdot \frac{1}{y}} d\xi$ mennyiséget $J(\lambda)^*$ -gal.

Ezt az integrált a (10) transzformáció segítségével visszavezetjük a (11) integrálra:

$$J(\lambda)^* = \int_a^b \sqrt{-\frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 \cdot \frac{1}{y}} \frac{d\xi}{dx} dx = \int_a^b \sqrt{-\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{1}{y}} dx,$$

tehát $J(\lambda)^* = J(\lambda)$.

Hasonlóképpen invariánsa a (10) transzformációnak a (2)-és a (3) egyenlőtlenség. Könnyű levezetni, hogy

$$\begin{vmatrix} \varrho & \frac{d\varrho}{dx} \\ \frac{d\varrho}{dx} & \frac{d^2 \varrho}{dx^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 \begin{vmatrix} \varrho & \frac{d\varrho}{d\xi} \\ \frac{d\varrho}{d\xi} & \frac{d^2 \varrho}{d\xi^2} \end{vmatrix},$$

tehát mindkét determináns előjele ugyanaz. (Rövidség kedvéért

nem írtuk ki az x , illetőleg $\frac{b-a}{\pi} \xi + a$ argumentumokat.) Ezek szerint elegendő, ha a (6)–(9) egyenlőtlenségeket csak egy intervallumra, például a $(0, \pi)$ intervallumra bizonyítjuk, mert ezzel ezeknek az állításoknak érvényességét bármely véges intervallumban is igazoltuk.

Utolsó megjegyzésünk az, hogy az általánosságot nem korlátozza semmiben, ha a $\varrho(x)$ függvényt normáljuk. U. i. a $\varrho(x)$ függvénynek valamely μ faktorial való szorzása (11) szerint nem változtat $J(\lambda)$ értékén. Megállapodhatunk tehát abban, hogy

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\varrho(x)} dx = \pi. \quad (12)$$

3. §. Az 1a állítás bizonyítása. Első sajátérték.

Ezek előrebocsajtása után a (6) egyenlőtlenséget először az $n = 1$ esetre fogjuk bebizonyítani. A (6) és (12) képleteket egybevetve, azt kell igazolnunk, hogy ebben az esetben az első sajátérték 1-nél kisebb. Ismeretes, hogy ez az állítás így is megfogalmazható: ha $\varrho(x)$ eleget tesz bizonyos feltételeknek (például az 1. tételben kirótt feltételeknek), továbbá, ha $Y(x)$ a $(0, \pi)$ intervallum határain eltűnő olyan folytonos függvény, amelynek első és második deriváltja szakaszosan folytonos, akkor a

$$Q[Y(x)] = \frac{\int_0^{\pi} Y(x)'^2 dx}{\int_0^{\pi} \varrho(x) Y(x)^2 dx} \quad (13)$$

hányados abszolút minimuma 1-nél kisebb.

Most egy olyan $Y_1(x)$ függvényt keresünk, amely az első sajátfüggvényt némileg megközelíti és azt fogjuk vizsgálni, hogy a $Q[Y_1(x)]$ hányados milyen körülmények között lesz 1-nél kisebb? Minthogy az y_1 első sajátfüggvényhez tartozó $Q[y_1]$ hányados nem nagyobb, mint $Q[Y_1(x)]$, állíthatjuk, hogy az első sajátérték

ezekben az esetekben 1-nél kisebb. Azután azokat a körülményeket fogjuk taglalni, amelyek a választható $\varrho(x)$ függvények sokaságát korlátozzák,

Közelítő függvénynek az $Y_1(x) = \sin z$ függvényt választjuk, ahol

$$z = \int_0^x \sqrt{\varrho(x)} dx. \quad (14)$$

$Y_1(x)$ kielégíti a határfeltételeket, mert (12) és (14) szerint $z(0)=0$ és $z(\pi)=\pi$. Könnyen látható, hogy $Y_1(x)$ eleget tesz a többi kirovának is. Megjegyzendő még, hogy $Y_1(x)$ az első sajátfüggvény megközelítésének tekinthető, mert a $(0, \pi)$ intervallum belsejében sehol sem tűnik el.¹⁷

Hogyan kell tehát $\varrho(x)$ -et választani, hogy a $Q[Y_1(x)]$ tört számlálója kisebb legyen a nevezőjénél? Más szavakkal: mikor lesz a

$$K_1 = \int_0^\pi [(\sin z)']^2 dx - \int_0^\pi \varrho(x) (\sin z)^2 dx \quad (15)$$

különbség negatív szám? Hogy ezt megállapíthassuk, a (15)

¹⁷ Az $Y_1(x)$ függvényt a sajátfüggvények megközelítésére egy quantum-mechanikai problémával kapcsolatosan felhasználták WENTZEL (Zeitschr. f. Phys. 38 (1926), 518), BRILLOUIN (Comptes Rendus, 1926. júl.) és KRAMERS (Zeitschr. f. Phys. 39 (1926), 828). Ők a

$$h^2 y'' + \varrho(x) y = 0$$

differenciálegyenletet a $h \frac{y'}{y} = z$ helyettesítéssel a

$$z^2 + h z' + \varrho(x) = 0$$

alakba vitték át. Ezt a RICCATI-féle egyenletet a z függvénynek h szerint való hatványsorba fejtésével próbálták közelítően integrálni. A sorbafejtés első tagja, z_0 , a $z_0^2 + \frac{\varrho(x)}{h} = 0$ egyenletnek tesz eleget. Ebből z első megközelítése $z_0 = \pm i \sqrt{\varrho(x)}$. Az y első megközelítésének pedig az $y_0 = y_1 + y_2$ mennyiséget tekintik, ahol

$$h \frac{y_1'}{y_1} = i \sqrt{\varrho(x)} \quad \text{és} \quad h \frac{y_2'}{y_2} = -i \sqrt{\varrho(x)},$$

tehát

$$y_0 = A \sin \left(\int \frac{1}{h} \sqrt{\varrho(x)} dx \right) + B \cos \left(\int \frac{1}{h} \sqrt{\varrho(x)} dx \right).$$

képletet előbb át kell alakítanunk. A differenciálás elvégzésével (15) a

$$K_1 = \int_0^{\pi} \varrho(x) (\cos^2 z - \sin^2 z) dx = \int_0^{\pi} \varrho(x) \cos 2z dx \quad (16)$$

formára hozható, mert (14) szerint $\frac{dz}{dx} = \sqrt{\varrho(x)}$. Most x helyett új változónak bevezetjük a z mennyiséget. Mivel $\varrho(x)$ -ről feltettük, hogy pozitív függvény, azért z az x -nek monoton növekvő függvénye. A

$$\sqrt{\varrho(x)} = f(z(x)) = f(z)$$

jelölés felhasználásával (16) új alakja

$$K_1 = \int_0^{\pi} f(z) \cos 2z dz.$$

Mivel pedig

$$\cos 2z = -\cos 2\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = -\cos 2\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos 2(\pi - z),$$

azért egyszerű átalakítással írható

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(z) - f\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - f\left(\frac{\pi}{2} + z\right) + f(\pi - z) \right] \cos 2z dz. \quad (17)$$

Ennek a mennyiségnek negatív volta elegendő (de nem szükséges) feltétele annak, hogy az első sajátérték 1-nél kisebb legyen. Ez az eset bekövetkezik, ha például a (17) integrálban a szögletes zárójelben levő függvény az egész $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ intervallumban negatív. Ennek ismét elegendő feltétele az, hogy az $f(z)$ függvény a $(0, \pi)$ intervallumban alulról konkáv legyen. Ha ugyanis

$$f_1 = f(z),$$

$$f_2 = f\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

$$f_3 = f\left(\frac{\pi}{2} + z\right),$$

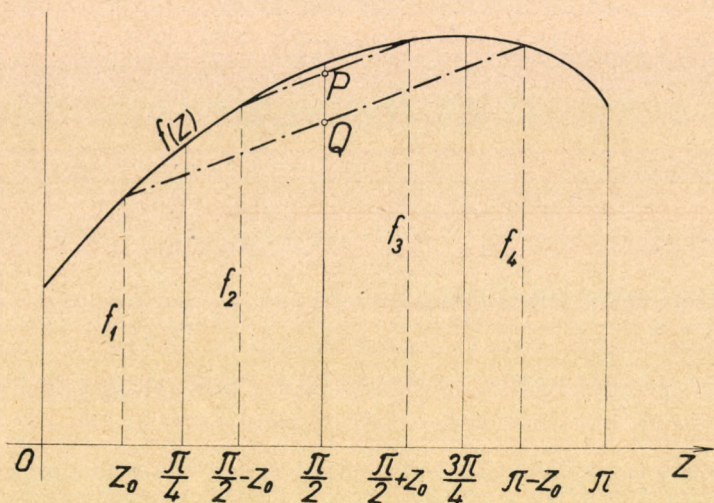
$$f_4 = f(\pi - z),$$

akkor a (17) képletben a szögletes zárójelben levő kifejezés

$$2 \left(\frac{f_1 + f_4}{2} - \frac{f_2 + f_3}{2} \right)$$

-vel egyenlő. Már pedig $\frac{f_1 + f_4}{2}$ és $\frac{f_2 + f_3}{2}$ a Q , illetőleg P pontok ordinátái. (1. ábra.) Azt pedig könnyű belátni, hogy a P pont mindig a Q pont felett van, ha $f(z)$ alulról konkáv.

Állíthatjuk tehát, hogy ha $\frac{d^2 f(z)}{dz^2} < 0$, akkor a $(0, \pi)$ intervallumban az első sajátérték 1-nél kisebb. Mit jelent azonban



1. ábra.

ennek a második differenciálhányadosnak negatív volta? Hogy erre a kérdésre válaszoljunk, ismét bevezetjük a régi, szemléletesebb x koordinátát és a $\varrho(x)$ függvényt. Rövid számolás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{1}{2 \sqrt{\varrho(x)}} \frac{d^2}{dx^2} \log \varrho(x) = \frac{1}{2 [\varrho(x)]^{\frac{5}{2}}} \left| \begin{array}{cc} \varrho & \frac{d\varrho}{dx} \\ \frac{d\varrho}{dx} & \frac{d^2 \varrho}{dx^2} \end{array} \right|,$$

a jobboldalnak tehát negatívnak kell lennie. A jobboldal előjele azonban egyedül a determináns előjelétől függ és így az $\frac{1}{2} [\varrho(x)]^{-\frac{5}{2}}$ mennyiséget elhagyva a (2) képletben kifejezett feltételhez jutunk.

4. §. Folytatás. Magasabb sajátértékek.

Az eddigiekben bebizonyítottuk azt, hogy ha a $\varrho(x)$ függvény egy bizonyos intervallumban pozitív és a (2) feltételnek eleget tesz, továbbá, ha a és b az $y(x)$ függvénynek ebben az intervallumban levő két szomszédos nullahelyét jelöli, akkor

$$\int_a^b \sqrt{\lambda \varrho(x)} dx < \pi. \quad (18)$$

Ebből pedig egyszerre következik az 1a állítás tetszőleges n -ekre. Mert legyen y_n az (a, b) intervallumban az n -ik sajátfüggvény. y_n tehát $(n-1)$ -szer tűnik el az a és b helyek közt. Legyenek ezek a zérushelyek a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . Ezek a pontok az (a, b) intervallumot n részintervallumra bontják. *E részintervallumok mindegyikében y_n az első sajátfüggvény λ_n sajátértékkel.* Tehát mindegyik (a_{i-1}, a_i) részintervallumra külön-külön érvényes a (18) egyenlőtlenség, amiből

$$n\pi < \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \sqrt{\lambda_n \varrho(x)} dx = \int_a^b \sqrt{\lambda_n \varrho(x)} dx = J(\lambda_n),$$

ahol $a_0 = a$ és $a_n = b$. Ezzel a (6) egyenlőtlenséget teljesen bebizonyítottuk.

5. §. A $\varrho(x)$ függvényre kirótt feltételek enyhítése.

Az előbbieken feltettük, hogy a $\varrho(x)$ függvény pozitív. Ezt a megszorítást elhagyhatjuk alulról konkáv $\varrho(x)$ függvényeknél. Az ilyen függvények, ha az (a, b) intervallum közepén pozitívak is, az intervallum két szélén negatívak lehetnek. Ezt az esetet könnyen diszkutálhatjuk a COURANT-féle elvnek, a feltételek enyhítése elvének segítségével. Legyen ugyanis $\varrho(x)$ olyan függvény, amely az (a, b) intervallum (a', b') részintervallumának belsejében pozitív és kielégíti a (2) feltételt. Az (a, a') és (b', b) intervallumokban pedig legyen $\varrho(x) \leq 0$. Ekkor érvényes a következő állítás: az (a', b') intervallumhoz tartozó n -ik sajátérték, λ_n^* , (az $y(a') = y(b') = 0$ határfeltételekkel) nagyobb, mint az (a, b)

intervallumhoz tartozó n -ik sajátérték, λ_n (az $y(a) = y(b) = 0$ határfeltételekkel). De az (a', b') intervallumban érvényes az előbb bizonyított

$$\int_{a'}^{b'} \sqrt{\lambda_n^* \varrho(x)} dx < n\pi$$

egyenlőtlenség,¹⁸ tehát az egész intervallumra áll

$$\Re \int_a^b \sqrt{\lambda_n \varrho(x)} dx = \int_{a'}^{b'} \sqrt{\lambda_n \varrho(x)} dx < n\pi, \quad (18a)$$

ahol az \Re szimbólum az utána következő komplex szám valós részét jelöli.¹⁹

6. §. Az 1b állítás igazolása.

Az 1b állítás bizonyítása az előzőhöz teljesen hasonló módon történik. A (3a) képletet először $n=1$ esetén bizonyítjuk be. Ismét a (13) képletből indulunk ki; a variációs problémát azonban módosítanunk kell. Nem az $Y(x)$ függvényről magáról, hanem az első deriváltjáról kell kikötni azt, hogy az intervallum végpontjaiban zérussá válják. Közelítő megoldásnak most az $Y_2(x) = \cos z$ függvényt választjuk, ahol $z = z(x)$ -et a (14) egyenlet definiálja. $Y_2'(x) = -\sqrt{\varrho(x)} \sin z$ valóban kielégíti az $Y_2'(0) = Y_2'(\pi) = 0$ határfeltételeket. Továbbá, ha $\varrho(x) > 0$ ($0 < x < \pi$), akkor $Y_2(x)$ az első sajátfüggvény megközelítésének tekinthető, mert deriváltja egyszer sem tűnik el a $(0, \pi)$ intervallum belsejében.

Most ismét azt kérdezzük, hogy milyen esetben válhatik a (13) kifejezés számlálójának és nevezőjének különbsége negatív számmá? Ennek elégséges feltétele az, hogy a

¹⁸ A bizonyítás menete megengedi, hogy a $\varrho(x)$ függvény az intervallum végpontjain eltűnjék. A levezetés egyszerűsítése céljából azonban a 3. és 4. §-ban eltekintettünk ettől az esettől.

¹⁹ Ezen állításunk későbbi alkalmazására való tekintettel (10. §.) megemlítjük, hogy a COURANT-féle feltételnyitítás elve megengedi azt is, hogy az a, b mennyiségek egyikének, vagy mindkettőjének abszolút értéke ∞ legyen.

$$K_2 = \int_0^\pi [(\cos z)']^2 dx - \int_0^\pi \rho(x) (\cos z)^2 dx = \\ = \int_0^\pi [\rho(x) \sin^2 z - \rho(x) \cos^2 z] dx = - \int_0^\pi \rho(x) \cos 2z dx$$

különbség negatív szám legyen. Látható, hogy a K_2 kifejezés értéke csak előjelben különbözik a (16) kifejezésben szereplő K_1 mennyiségtől. A 3. §-ban alkalmazott megfontoláshoz hasonlóan levezethető, hogy K_2 negatív, ha $f(z)$ a z -nek *alulról konvex* függvénye, azaz, ha

$$\operatorname{sig} \frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \operatorname{sig} \begin{vmatrix} \rho & \frac{d\rho}{dx} \\ \frac{d\rho}{dx} & \frac{d^2 \rho}{dx^2} \end{vmatrix} = +1.$$

A 4. §-ban alkalmazott megfontolás mintájára most már általánosítani lehet állításunkat az $n > 1$ esetre is.

7. §. Az 1. tétel becslése nem javítható.

Most még igazoljuk azt, hogy az általunk vizsgált $\rho(x)$ függvények osztályában a (6) és (7) képletekkel kifejezett becslés még *kis n -ekre sem javítható*. Ha a $\rho(x) \equiv 1$ határesetet tekintjük, amelyre nézve $\rho\rho'' - \rho'^2 = 0$, akkor minden (a, b) intervallumban $J(\lambda_n) = J(\lambda'_n) = 0$. A $\rho(x) \equiv 1$ függvényt azonban tetszőlegesen megközelíthetjük a $\rho(x) = p(x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon(x - c)^2$ parabolákkal, ahol a c konstans nem esik az (a, b) intervallumba. A $p(x, \varepsilon)$ parabolákra fennáll a

$$\begin{vmatrix} \rho & \rho' \\ \rho' & \rho'' \end{vmatrix} = 2\varepsilon [1 - 2\varepsilon(x - c)^2]$$

egyenlőtlenség. Ennek a kifejezésnek előjele megegyezik ε előjelével akkor, ha ε elég kicsi ($< [2 \max_{a \leq x \leq b} (x - c)^2]^{-1}$). Abban az esetben, ha $\varepsilon < 0$, $p(x, \varepsilon)$ a (2) feltételnek tesz eleget, ha pedig $\varepsilon > 0$, akkor $p(x, \varepsilon)$ a (3) feltételt elégíti ki. Már most a $p(x, \varepsilon)$ függvényekhez tartozó $J(\lambda_n)$, illetőleg $J(\lambda'_n)$ mennyiségek tetszőlegesen megközelítik a $p(x, 0)$ -hoz tartozó megfelelő mennyiségeket, amelyeknek értéke $n\pi$.

8. §. A 2a és a 2b állítás igazolása.

Ezek után áttérünk a 2. tételnek, azaz a (8) és (9) egyenlőtlenségeknek bizonyítására. Először azt igazoljuk, hogy

$$\lambda_n > \lambda'_{n-1} \quad \text{és} \quad \lambda'_n > \lambda_{n-1}. \quad (19)$$

Legyen u. i. y_n az (a, b) intervallumban az első sajátérték-problémához tartozó n -ik sajátfüggvény. A $\frac{dy_n}{dx} = 0$ egyenletnek (a, b) belsejében n megoldása van. Legyen $n > 1$ és legyen ezek között a megoldások között a legkisebb α és a legnagyobb β . y_n -nek a deriváltja $(n-2)$ -szer tűnik el az (α, β) intervallum belsejében. Már pedig a második kerületi feladat $(n-1)$ -ik és csakis $(n-1)$ -ik sajátfüggvényének van meg az a tulajdonsága, hogy a deriváltja az (α, β) intervallum határain kívül $(n-2)$ -szer tűnik el annak belsejében. Tehát y_n az (α, β) intervallumhoz tartozó második kerületi probléma $(n-1)$ -ik sajátfüggvénye a λ_n sajátértékkel. Az (α, β) intervallum azonban része az (a, b) intervallumnak. Az 5. §-ban említett feltételenyhítés elvének alkalmazásával következik, hogy az (a, b) intervallumhoz tartozó második kerületi probléma $(n-1)$ -ik sajátértéke, λ'_{n-1} kisebb λ_n -nél.

Hasonlóan bizonyítjuk (19) második egyenlőtlenségét. Ha y_n az (a, b) intervallumban a második kerületi problémához tartozó n -ik sajátfüggvény λ'_n sajátértékkel, akkor a $\frac{d'y_n}{dx} = 0$ egyenletnek az (a, b) intervallum belsejében $n-1$ megoldása van. Legyen ismét $n > 1$ és jelöljük y_n -nek az (a, b) belsejébe eső gyökei közül a legkisebbet és legnagyobbat α' -vel, illetőleg β' -vel. y_n az (α', β') intervallumhoz tartozó első kerületi feladat egyik megoldása, mert $y_n(\alpha') = 0$ és $y_n(\beta') = 0$. Mivel azonban a $\frac{d'y_n}{dx} = 0$ egyenlet gyökei szétválasztják a $y_n = 0$ egyenlet gyökeit, láthatjuk, hogy y_n -nek az (α', β') intervallum belsejében $n-2$ gyöke van. Ebből viszont következik, hogy y_n az (α', β') intervallumhoz tartozó első kerületi probléma $(n-1)$ -ik megoldása λ'_n saját-

értékkel. Ezek után a feltételenyhités elvének alkalmazásával megállapítható, hogy $\lambda'_n > \lambda_{n-1}$.

A (8) és (9) egyenlőtlenségek most már egyszerre felírhatók:

$$J(\lambda'_n) = \int_a^b \sqrt{\lambda'_n \varrho(x)} dx < \int_a^b \sqrt{\lambda_{n+1} \varrho(x)} dx = J(\lambda_{n+1}) < (n+1)\pi$$

($q\varrho'' - \varrho'^2 < 0$)

és

$$J(\lambda_n) = \int_a^b \sqrt{\lambda_n \varrho(x)} dx < \int_a^b \sqrt{\lambda'_{n+1} \varrho(x)} dx = J(\lambda'_{n+1}) < (n+1)\pi.$$

($q\varrho'' - \varrho'^2 > 0$)

9. §. Általánosabb Sturm—Liouville-féle differenciálegyenletek.

Az 1. és 2. tételhez hasonló állításokat lehet levezetni a

$$\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} y + \lambda \cdot q(x) y = 0 \quad (20)$$

($p(x) > 0$, $q(x) > 0$, ha $a \leq x \leq b$)

differenciálegyenlet sajátértékeit illetően. Ezek az állítások a következők: ha $p(x)$ és $q(x)$ bizonyos folytonossági feltételeknek eleget tesznek és ha

$$\left| \frac{q(x)}{\frac{d}{dx} q(x)} \frac{d}{dx} [p(x) q(x)] \right| < 0,$$

akkor

$$\lambda_n < \left(\int_a^b \sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}} dx \right)^2,$$

továbbá

$$\lambda'_n < \left(\int_a^b \sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}} dx \right)^2.$$

$$\left| \frac{q(x)}{\frac{d}{dx} q(x)} \frac{d}{dx} [p(x) q(x)] \right| > 0,$$

akkor

$$\lambda_n < \left(\int_a^b \sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}} dx \right)^2,$$

továbbá

$$\lambda'_n < \left(\int_a^b \sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}} dx \right)^2$$

Ezeknek az egyenlőtlenségeknek direkt bizonyítása meglehetősen nehézségekkel járna. Sokkal egyszerűbb, ha a (20) egyenletet $p(x)$ -szel végigszorozva és a $\frac{dx}{p(x)} = dX$ transzformációt elvégezve a

$$\left(p(x) \frac{d}{dx}\right)^2 y + \lambda p(x) q(x) y = \frac{d^2}{dX^2} Y + \lambda P(X) Q(X) Y = 0 \quad (21)$$

alakra hozzuk, ahol

$$Y = Y(X) = y(x(X)), P(X) = p(x(X)), Q(X) = q(x(X)). \quad (22)$$

A (21) egyenlet a $P(X) Q(X) = q(X)$ helyettesítés elvégzése után azonos az (1) differenciálegyenlettel. Az új határok legyenek A és B , ahol $a = x(A)$ és $b = x(B)$. Könnyen belátható, hogy az $x \rightarrow X$ transzformáció az első (második) feladat n -ik sajátfüggvényét ugyancsak az első (második) feladat n -ik sajátfüggvényébe viszi át. Mert y (illetőleg y deriváltja) ugyanannyiszor tűnik el az (a, b) intervallum belsejében, mint Y (illetőleg Y deriváltja) az (A, B) intervallum belsejében. Továbbá, ha $y(a) = 0$, akkor (22) szerint $Y(A)$ is eltűnik. Végül, ha $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = 0$, akkor

$$\frac{dY}{dX} \Big|_{X=A} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dX} \Big|_{X=A} = \frac{dy}{dx} p(x) \Big|_{x=a} = 0,$$

és ugyanez áll az intervallum felső határán is.

Eszerint, ha a (21) egyenlet sajátértékeit meg tudjuk becsülni az 1. és 2. tételek alapján, akkor becslést kapunk a (20) egyenlet sajátértékeire is. Hogy ezt a becslést elvégezhesük, megjegyezzük, hogy

$$\begin{aligned} J(\lambda) &= \int_A^B \sqrt{\lambda P(X) Q(X)} dX = \\ &= \int_A^B \sqrt{\lambda \frac{Q(X)}{P(X)}} P(X) dX = \int_a^b \sqrt{\lambda \frac{q(x)}{p(x)}} dx, \end{aligned} \quad (23)$$

továbbá, hogy a $\varrho \frac{d^2 \varrho}{dX^2} - \left(\frac{d\varrho}{dX}\right)^2$ determináns előjele meg-
egyezik a

$$\left| \begin{array}{cc} q(x) & \frac{d}{dx} [p(x)q(x)] \\ \frac{d}{dx} q(x) & \frac{d^2}{dx^2} [p(x)q(x)] \end{array} \right| \quad (24)$$

WROŃSKI-féle determináns előjelével. Így a (6)–(9) egyenlőtlenségek általánosításaképpen kimondható, hogy ezek az egyenlőtlenségek fennállnak akkor is, ha az (1) differenciálegyenlet helyett a (21) egyenletről van szó. (A $p(x)$ -re és $q(x)$ -re vonatkozó bizonyos folytonossági feltételek kikötésével.) Ebben az esetben azonban $J(\lambda)$ alatt a (23) mennyiség jobboldalát kell értenünk és a (2), illetőleg (3) egyenlőtlenségben szereplő determinánst a (24) determinánssal kell helyettesítenünk.

10. §. Példák. Az Hermite-polinómak gyökeinek korlátok közé szorítása.

Befejezésül még két példát tárgyalunk. Az egyiken megmutatjuk, hogy az 1. tétel alkalmazásával *hogyan lehet korlátok közé szorítani bizonyos STURM—LIOUVILLE-függvények gyökeit*. Példának választjuk az HERMITE-féle polinómat, amelyeknek differenciálegyenlete

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0. \quad (25)$$

Az HERMITE-polinómak gyökei azonosak a $\varphi_n = \varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ HERMITE-féle függvények gyökeivel. A gyökök határok közé szorításánál közömbös tehát, hogy a (25) differenciálegyenletből indulunk-e ki, vagy pedig az HERMITE-féle függvények

$$\varphi_n'' + (2n+1-x^2)\varphi_n = 0 \quad (26)$$

differenciálegyenletéből. Legyenek az n -ik HERMITE-féle polinómak nagyság szerint csökkenő sorrendben felírt gyökei

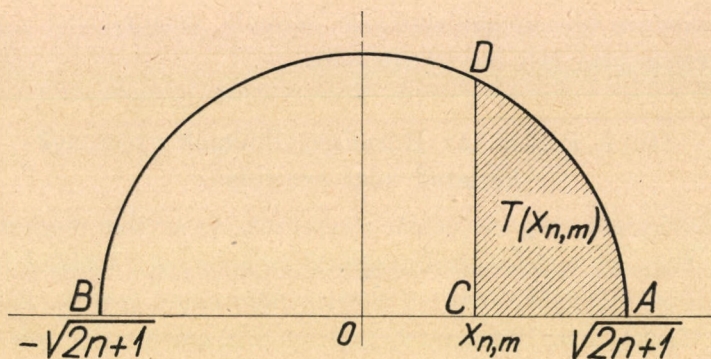
$$x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}.$$

Bebizonyítjuk, hogy a pozitív $x_{n,m}$ gyökök eleget tesznek az

$$(m - \frac{1}{4})\pi < < (n + \frac{1}{2}) \left(\arccos \frac{x_{n,m}}{\sqrt{2n+1}} - \frac{x_{n,m}}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{1 - \frac{x_{n,m}^2}{2n+1}} \right) < m\pi \quad (27)$$

egyenlőtlenségnek, ahol $0 < \arccos \frac{x_{n,m}}{\sqrt{2n+1}} < \frac{\pi}{2}$. Hasonló egyenlőtlenséget írhatunk fel az $x_{n,m} = -x_{n,n-m+1}$ reláció segítségével negatív $x_{n,m}$ -ekre.

Ennek a relációnak szemléletes jelentése a következő. Rajzoljunk az (x, y) koordinátarendszerben félkört az $A(\sqrt{2n+1}, 0)$



2. ábra.

és $B(-\sqrt{2n+1}, 0)$ pontok által meghatározott AB egyenes, mint átmérő fölé. Rajzoljuk meg ezután az $x = x_{n,m}$ ($m \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$) egyenest, amely az x -tengelyt a C pontban, a félkört pedig a D pontban metszi. Ha $T(x_{n,m})$ -mel jelöljük azt a területet, amelyet a CD és CA egyenesek, továbbá az AD körív határolnak, akkor a

$$\begin{aligned} T(x_{n,m}) &= \int_{x_{n,m}}^{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1-x^2} dx = \\ &= (n + \frac{1}{2}) \left(\arccos \frac{x_{n,m}}{\sqrt{2n+1}} - \frac{x_{n,m}}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{1 - \frac{x_{n,m}^2}{2n+1}} \right) \end{aligned}$$

terület az $(m - \frac{1}{4})\pi$ és $m\pi$ határok közé szorítható.

Az HERMITE-féle függvényeknek PLANCHEREL—ROTACH-féle aszimptotikus formulája szerint²⁰

$$\varphi_n(x) \sim \varphi_n^*(x) = C_n \left(1 - \frac{x^2}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\arccos \frac{x}{\sqrt{2n+1}} - \frac{x}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2n+1}} \right) - \frac{3}{4}\pi \right].$$

E $\varphi_n^*(x)$ approximáló függvény $x_{n,m}^*$ gyökhelyei eleget tesznek az

$$(n + \frac{1}{2}) \left[\arccos \frac{x_{n,m}^*}{\sqrt{2n+1}} - \frac{x_{n,m}^*}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{1 - \frac{(x_{n,m}^*)^2}{2n+1}} \right] = (27a) \\ = (m-1)\pi + \frac{3}{4}\pi = (m - \frac{1}{4})\pi$$

egyenletnek. A (27) és (27a) képleteket egybevetve azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az HERMITE-polinómok pozitív gyökei mindig kisebbek azoknál az értékeknél, amelyeket számukra a PLANCHEREL—ROTACH-féle aszimptotikus formula kijelöl.

A (27) egyenlőtlenség bizonyításánál abból az ismert tényből indulunk ki, hogy az n -ik HERMITE-polinóm gyökei a $(-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1})$ intervallum belsejében vannak. Ebben az intervallumban pedig $\varrho(x) = -\varphi_n''$: $\varphi_n = 2n+1-x^2$ eleget tesz a (2) feltételnek. $\varrho(x)$ egyébként alulról konkáv függvény és így az 5. § eredményét is felhasználhatjuk.

Bevezetjük a következő jelöléseket: $x_{n,0} = +\infty$, $x_{n,n+1} = -\infty$; p és q egész számok, amelyek eleget tesznek a $0 \leq q \leq p \leq n+1$ feltételnek. Tekintsük most az $(x_{n,p}, x_{n,q})$ intervallumban az

$$y'' + \lambda(2n+1-x^2)y = 0$$

egyenlet által meghatározott első kerületi probléma $(p-q)$ -ik sajátértékét. Könnyű belátni, hogy ez a sajátérték 1 lesz, a hozzátartozó sajátfüggvény pedig $\varphi_n(x)$. (6), illetőleg (18a) szerint fennáll tehát a

$$\Re \int_{x_{n,p}}^{x_{n,q}} \sqrt{2n+1-x^2} dx < (p-q)\pi \quad (0 \leq p < q \leq n+1) \quad (28)$$

²⁰ L. SZRÉGŐ GÁBOR: Orthogonal polynomials (1939), 195. oldal.

egyenlőtlenség. Ennek speciális esete az

$$\Re \int_{x_{n,m}}^{x_{n,0}} \frac{\sqrt{2n+1}}{x_{n,m}} < m\pi \quad (29)$$

összefüggés. (Rövidség kedvéért itt és a következőkben elhagyjuk az integrandust.) Továbbá, mivel a gyökök a számegyenesen a 0 pont körül szimmetrikusan helyezkednek el, azért $x_{n, \frac{n+1}{2}} = 0$, ha n páratlan szám. Így kapjuk páratlan n esetén a (28) összefüggés másik speciális esetét, az

$$\int_0^{x_{n,m}} < \left(\frac{n+1}{2} - m \right) \pi \quad \left(m < \frac{n+1}{2} \right) \quad (30)$$

egyenlőtlenséget. Ugyanez a reláció fennáll azonban páros n esetén is. Ekkor ugyanis a legkisebb pozitív gyök $x_{n, \frac{n}{2}}$, a legnagyobb negatív gyök pedig $x_{n, \frac{n}{2}+1} = -x_{n, \frac{n}{2}}$. Érvényesek tehát (28) szerint az

$$\frac{1}{2} \int_{x_{n, \frac{n}{2}+1}}^{x_{n, \frac{n}{2}}} = \int_0^{x_{n, \frac{n}{2}}} < \frac{\pi}{2}$$

és

$$\int_{x_{n, \frac{n}{2}}}^{x_{n,m}} < \left(\frac{n}{2} - m \right) \pi$$

egyenlőtlenségek, amelyeknek összeadása adja a (30) képletet. Már most a (29) és (30) formulákból az integrálás elvégzése után az

$$(n+1) \left[-\frac{x_{n,m}}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{1 - \frac{x_{n,m}^2}{2n+1}} + \arccos \frac{x_{n,m}}{\sqrt{2n+1}} \right] < m\pi,$$

illetőleg

$$(n+\frac{1}{2}) \left[\frac{x_{n,m}}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{1 - \frac{x_{n,m}^2}{2n+1}} - \arccos \frac{x_{n,m}}{\sqrt{2n+1}} + \frac{\pi}{2} \right] < \left(\frac{n+1}{2} - m \right) \pi$$

egyenlőtlenségeket kapjuk, amelyek egyenértékűek a (27) állítással.

Második példánkon megmutatjuk, hogy ha $\varrho(x)$ nem tesz eleget a (2) feltételnek, akkor a (6), illetőleg (2a) egyenlőtlenség sem áll mindig fenn. Így az

$$y'' + \frac{\lambda}{x^2} y = 0$$

differenciálegyenletnek az $y(1) = y(e^{m\pi}) = 0$ ($m > 0$) határfeltételek esetén az n -ik sajátfüggvénye

$$y_n = \sqrt{x} \cdot \sin \left(\frac{n}{m} \log x \right),$$

az n -ik sajátértéke pedig $\lambda_n = \frac{n^2}{m^2} + \frac{1}{4}$. Továbbá

$$\int_a^b \sqrt{\varrho(x)} dx = \int_1^{e^{m\pi}} \frac{dx}{x} = m\pi;$$

ebből

$$J(\lambda_n) = \sqrt{\lambda_n} \int_a^b \sqrt{\varrho(x)} dx = \sqrt{n^2 + \frac{m^2}{4}} \cdot \pi > n\pi,$$

azaz $J(\lambda_n)$ nem elégíti ki a (6) egyenlőtlenséget. Sőt m alkalmas megválasztásával $J(\lambda_n)$ bármely N számnál nagyobbá tehető.

Makai Endre.

EINE EIGENWERTABSCHÄTZUNG BEI GEWISSEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

Es seien λ_n bzw. λ'_n die n -ten Eigenwerte des ersten und zweiten Randwertproblems der Differentialgleichung $y'' + \lambda \varrho(x) y = 0$ im Intervalle (a, b) . Ferner sei in diesem Intervall $\varrho(x)$ eine positive Funktion, für welche die Grösse $\varrho \varrho'' - \varrho'^2$ im Intervalle (a, b) 1. durchweg negativ, 2. durchweg positiv ist. Es gelten im Falle 1. bzw. 2. die Ungleichungen (2a) und (4), bzw. (3a) und (5). Die Abschätzung (2a) und (3a) kann für diese Klasse der Funktionen $\varrho(x)$ durch keine bessere ersetzt werden, nicht einmal für kleine Werte der Zahl n . Der Beweis beruht auf den Zusammenhang unserer Differential-

gleichung mit einem Variationsproblem, dessen Minimum den ersten Eigenwert liefert.

Im § 5 werden die von unten aus konkave Funktionen $\varrho(x)$, die alle dem Fall 1. gehören, näher untersucht.

Im § 9 werden die Eigenwerte der allgemeineren Differentialgleichung (20) abgeschätzt. Es stellt sich heraus, dass, falls die Determinante

$$\begin{vmatrix} q(x) & \frac{d}{dx} [p(x) q(x)] \\ \frac{d}{dx} q(x) & \frac{d^2}{dx^2} [p(x) q(x)] \end{vmatrix}$$

durchweg negativ, bzw. positiv ist, die Ungleichungen (2a) und (4), bzw. (3a) und (5) gültig bleiben, wenn $\varrho(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ gesetzt wird.

Als Anwendung wird im § 10 eine Abschätzung der Nullstellen der HERMITE'schen Polynome gegeben. Wenn $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$ die in monoton abnehmende Folge geordneten Nullstellen des n -ten HERMITE'schen Polynoms bedeuten, so erfüllen die positiven Wurzeln die Ungleichung (27).

E. Makai.

AZ ELLIPSZIS EGY SZÉLSŐÉRTÉKTULAJDONSÁGÁRÓL.

A jelen dolgozat első részében be fogjuk bizonyítani FEJES LÁSZLÓ következő sejtését: Bármely zárt konvex görbébe, mely nem ellipszis, mindig írható egy olyan n -szög, mely nagyobb területű, mint egy, a görbével egyenlő területű ellipszisbe írt tetszőlegesen adott n -szög.¹ Dolgozatunk második részében pedig egy olyan görbeosztállyal fogunk foglalkozni, amelyre a fenti tétel bizonyításánál alkalmazott konstrukció révén jutunk.

I.

Ismeretes, hogy a T területű ellipszisekbe írható maximális területű n -szögek egyenlő területűek, és pedig területük:

$$T \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Említett tételünk igazolására e szerint tehát azt kell bebizonyítanunk, hogy bármely T területű zárt konvex görbébe, mely nem ellipszis, írható olyan n -szög, amelynek területe nagyobb mint:

$$T \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Először állítsuk elő a zárt konvex görbéket analitikailag a következőképen: Felveszünk egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy az x -tengely a görbe egy olyan húrjával essék egybe, amelyre a húr végpontjaihoz tartozó érintők merőlegesek (illetőleg merőleges támaszegyenesek húzhatók); ilyen például a görbe leg-hosszabb húrja.

¹ L. SAS E., Compositio Mathematica 1939, 6. köt., 468. o.

Az y -tengely pedig legyen a húr felező pontjában emelt merőleges. Válasszuk egyszerűség kedvéért ezen húr félhosszát egységnek. Ekkor egy tetszésszerű zárt konvex görbét a következő paraméteres alakban állíthatunk elő:

$$x = \cos t, \quad y = \varphi(t) \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

ahol $\varphi(t)$ a $(0, 2\pi)$ intervallumban a $0, \pi$ helyek kivételével egyértékű, folytonos, pozitív, korlátos változású és 2π szerint periodikus függvény.

A 0 és π helyeken csak azt kötvük ki, hogy

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

legyen.

E helyeken $\varphi(t)$ lehet végtelen is, de csak oly módon, hogy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\varphi(h) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{h \rightarrow 0} h\varphi(\pi - h) = 0$$

fennálljon.

Írjuk most fel a zárt konvex görbébe beírt tetszésszerű n -szög területét, t_1, t_2, \dots, t_n -nel jelölve a szögpontokhoz tartozó parameterértékeket:

$$T_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \varphi(t_v) \sin t_v [\cos t_{v-1} - \cos t_{v+1}],$$

ahol

$$t_0 = t_n \quad \text{és} \quad t_{n+1} = t_1.$$

Ha

$$t_1 = t, \quad t_2 = t + \frac{2\pi}{n}, \dots, \quad t_n = t + (n-1) \frac{2\pi}{n},$$

akkor az ezen értékekhez tartozó n -szög területe:

$$\begin{aligned} T_n\left(t, t + \frac{2\pi}{n}, \dots, t + (n-1) \frac{2\pi}{n}\right) &= T_n(t) = \\ &= \sin \frac{2\pi}{n} \sum_{v=0}^{n-1} \varphi\left(t + v \frac{2\pi}{n}\right) \sin^2\left(t + v \frac{2\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Mivel az $x = \cos t, y = \varphi(t) \sin t$ görbe területe:

$$T = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin^2 t \, dt$$

és a feltétel szerint a $\varphi(t)$ függvény 2π szerint periodikus:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) dt = \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin^2 t dt = \frac{n}{2\pi} T \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Ebből látható, hogy mindig létezik olyan t , amelynél:

$$T_n(t) \geq T \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

És pedig, ha $T_n(t) \neq \text{const}$, akkor nyilvánvaló, hogy mindig van olyan t , amelynél

$$T_n(t) > \frac{2\pi}{n} T \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Ha azonban $T_n(t) = \text{const}$, akkor a fentiekből következik, hogy t minden értékére:

$$T_n(t) = T \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Hogy az ilyen n -szögek csak akkor azonosak a beírt maximális területű n -szögekkel, ha a görbe ellipszis, azt FEJES LÁSZLÓ így bizonyítja:

Tegyük fel, hogy a görbébe írható $T_n(t) = \text{const}$. területű n -szögnél minden más n -szög kisebb területű. Ez esetben minden egyes ilyen $T_n(t)$ területű n -szög bármely csúcspontján át húzható egy olyan támaszegyenes (érintő), amely két szomszédos csúcsponton átfektetett szelővel párhuzamos.²

Ebből következik, hogy a görbének majdnem mindenütt folytonos változású érintője van, és fennáll, hogy:

$$y'(t) = \frac{y\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) - y\left(t - \frac{2\pi}{n}\right)}{2 \sin \frac{2\pi}{n}}.$$

Vagyis $y(t)$ differenciálhányadosa is folytonos és korlátos változású.

² L. STEINER, Gesammelte Werke, II. köt., 212. o.

Fejtsük most $y(t)$ -t Fourier-sorba:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Mivel a fentiek szerint $y'(t)$ is korlátos változású,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kt - a_k \sin kt) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \frac{2\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n}} (b_k \cos kt - a_k \sin kt).$$

Ezen egyenlőség t minden értékeire csak úgy állhat fenn, ha $k \geq 2$ -re $a_k = b_k = 0$, tehát:

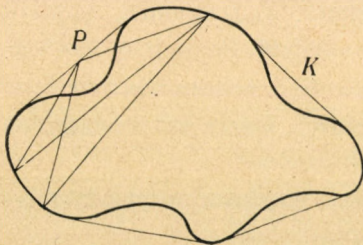
$$y(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t.$$

Az $y(0) = y(\pi) = 0$ feltétel azonban csak úgy teljesülhet, ha

$$a_0 = a_1 = 0,$$

vagyis, ha a görbe ellipszis.

Eredményeinket most a következőképen foglalhatjuk össze: Ha a görbe leghosszabb húrja, mint átmérő fölé kört rajzolunk, ezen körbe beírjuk a maximális területű, azaz a szabályos n -szöget és ennek csúcspontjait a leghosszabb húrra merőlegesen a görbére vetítjük, akkor egy, a görbére beírt n -szöget nyerünk.



1. ábra.

Tételünk értelmében e körbeírt szabályos n -szögnek mindig van olyan helyzete, amelyben a görbére beírt megfelelő n -szög területe nagyobb, mint a görbével egyenlő területű ellipszisbe írt maximális területű n -szögé.

Tételünket kiterjeszthetjük tetszőleges zárt Jordan-görbére. Tekintsünk ugyanis egy tetszőszerinti zárt Jordan-görbét és a görbe ezen pontjait, amelyeken át közös érintő húzható; kössük össze e pontpárokat egyenesdarabokkal, vagyis szerkesszük meg a görbét magában foglaló legkisebb konvex tartományt (1. ábra). E tartományt határoló K konvex görbére tételünk érvényes.

Írjunk tehát a K -ba egy olyan n -szöget, amely nagyobb területű, mint a K -val egyenlő területű ellipszisbe írható maximális területű n -szög.

Most két eset lehetséges: a K -ba beírt n -szög valamely csúcsa vagy az eredeti görbére, vagy a kiegészítő egyenesdarabok egyikére esik. Tekintsünk egy olyan P csúcspontot, amely valamely kiegészítő egyenesdarabra esik. Ekkor két eset lehetséges:

I. Ezen kiegészítő egyenesdarab párhuzamos a két szomszédos csúcsponton át fektetett egyenessel. Ez esetben a P csúcspont a görbére helyezhető úgy, hogy a beírt n -szög területe nem változik.

II. A kiegészítő egyenesdarab nem párhuzamos a két szomszédos csúcsponton átmenő egyenessel. Ez esetben a P csúcspont úgy mozdítható a görbére, hogy a beírt n -szög területe nagyobbodik.

Ezekből következik, hogy minden zárt Jordan-görbén kijelölhetünk n pontot oly módon, hogy ezen n pont által meghatározott n -szög területe nagyobb legyen, mint a görbét magába foglaló legkisebb konvex tartománnyal egyenlő területű ellipszisbe írható maximális területű n -szögé.

Tételünk felhasználásával adhatunk egy becslést a zárt konvex görbékbe írható n -szögek *kerületére* nézve is. És pedig kimutathatjuk, hogy bármely zárt konvex görbébe, mely nem kör, írható nagyobb kerületű n -szög, mint a görbével egyenlő területű körbe írt tetszőleges n -szög.

Ezt úgy mutathatjuk ki, hogy tételünkön kívül figyelembe vesszük még a következő ismert tételeket:

I. Az egyenlő területű n -szögek közül a szabályos n -szög kerülete a legkisebb.³

II. A körbe írható n -szögek közül a szabályos n -szög kerülete és területe a legnagyobb.

³ L. STEINER, Gesammelte Werke, II, köt., 200. o.

II.

Az első rész elején említett tételt először olyan görbékre bizonyítottuk be, amelyekre

$$T_n(t) \neq \text{const.},$$

azután olyan görbékre is közzöltünk egy bizonyítást, amelyekre

$$T_n(t) = \text{const.}$$

Ilyen tulajdonságú görbe például az ellipszis.

A következőkben elő fogunk állítani az ellipszisen kívül még más olyan zárt konvex görbéket, melyekre (bizonyos n értékeket kivéve)

$$T_n(t) = \text{const.}$$

Legyen pl. $\varphi(t) = \cos^2 t$, ez esetben:

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \sin \frac{2\pi}{n} \sum_0^{n-1} \varphi\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) \sin^2\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) = \\ &= \sin \frac{2\pi}{n} \sum_0^{n-1} \frac{1}{4} \sin^2\left(2t + \nu \frac{4\pi}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{n} \sum_0^{n-1} \frac{1 - \cos\left(4t + \nu \frac{8\pi}{n}\right)}{2} = \frac{n}{8} \sin \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

$n = 4$ kivételével, minden $n \geq 3$ esetére.

Ugyanis $n = 4$ kivételével fennáll, hogy:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos \nu \frac{8\pi}{n} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin \nu \frac{8\pi}{n} = 0.$$

Tehát az $x = \cos t$, $y = \cos^2 t \sin t$ vagy, DESCARTES-féle koordinátákkal kifejezve, az $y = x^2 \sqrt{1-x^2}$ görbe, a fent említett tulajdonsággal bír.

Legyen most $\varphi(t) = \sin^2 t$; ez esetben

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \sin \frac{2\pi}{n} \sum_0^{n-1} \sin^4 \left(t + \nu \frac{2\pi}{n} \right) = \\ &= \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} - \sum_0^{n-1} \frac{1}{4} \sin^2 \left(2t + \nu \frac{4\pi}{n} \right) \sin \frac{2\pi}{n} = \\ &= \frac{3}{8} n \sin \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

$n=4$ kivételével ($n \geq 3$).

Tehát az $x = \cos t$, $y = \sin^3 t$ vagy, DESCARTES-féle koordinátákkal kifejezve, az $y = (\sqrt{1-x^2})^3$ görbe szintén olyan tulajdonságú, hogy $n=4$ kivételével $T_n(t) = \text{const.}$

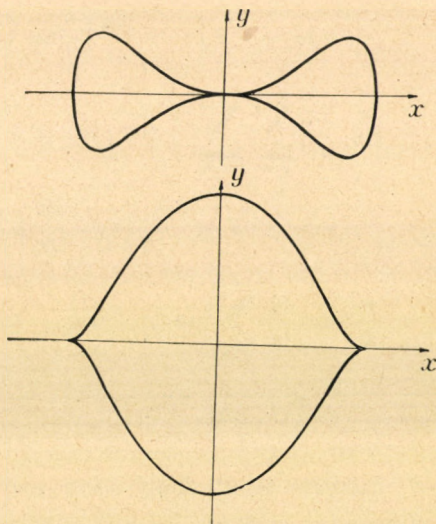
Ezen két görbe azonban nem konvex (l. 2. ábra). Feltesszük tehát a kérdést, hogy az ellipszisen kívül létezik-e még olyan zárt konvex görbe, hogy a $t, t + \frac{2\pi}{n}, \dots, t + (n-1) \frac{2\pi}{n}$ parameterértékekhez tartozó, beírt n -szögek területe t minden értékére ugyanakkora. Ilyen tulajdonságú zárt konvex görbék léteznek és most ilyeneket fogunk előállítani.

E célból képezzük a következő görbe-sereget:

$$y = (c+x^2) \sqrt{1-x^2}$$

és tekintsük az $y' = 0$ egyenletet. Ebből $x^2 = \frac{2-c}{3}$, tehát ha $c > 2$ és ha $c < -1$, akkor szélső érték csak az $x=0$ helyen van; képezzük most az $y'' = 0$ egyenletet; ebből:

$$x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 24(2-c)}}{12}.$$



2. ábra.

Tehát a $c < -\frac{11}{8}$ és $c > 2$ értékekhez tartozó görbéknek nincs inflexiós pontjuk, vagyis a $[-\frac{11}{8}, 2]$ intervallumon kívül fekvő c értékekhez tartozó görbék konvexek.

Most még megmutatjuk, hogy az ellipszis az egyedüli olyan tulajdonságú görbe, amelyre nézve minden n -re ($n \geq 3$) fennáll, hogy

$$T_n\left(t, t + \frac{2\pi}{n}, \dots, t + (n-1) \frac{2\pi}{n}\right)$$

t minden értékére ugyanakkora. Láttuk ugyanis, hogy

$$\begin{aligned} T_n\left(t, t + \frac{2\pi}{n}, \dots, t + (n-1) \frac{2\pi}{n}\right) &= \\ &= T_n(t) = \sum_0^{n-1} \varphi\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) \sin^2\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n}; \end{aligned}$$

behelyettesítve az $y(t)$ FOURIER-féle sorát nyerjük, hogy:

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \sin \frac{2\pi}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos k\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) + \right. \\ &\quad \left. + b_k \sin k\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) \right] \sin\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) = \\ &= \sin \frac{2\pi}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ a_k \left[\sin(k+1)\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) - \sin(k-1)\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + b_k \left[\cos(k-1)\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) - \cos(k+1)\left(t + \nu \frac{2\pi}{n}\right) \right] \right\} = \\ &= \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \sum_{l=1}^{\infty} \left[(a_{ln-1} - a_{ln+1}) \sin lnt + (b_{ln+1} - b_{ln-1}) \cos lnt \right] + \\ &\quad + \frac{n}{2} b_1 \sin \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Látható tehát, hogy adott n -re $T_n(t)$ csak akkor ugyanakkora t minden értékére, ha $y(t)$ Fourier-sorában bizonyos együtthatók egymással egyenlők.

Tehát, ha a görbe olyan, hogy az összes szabályos n -szögekre nézve fennáll a $T_n(t) = \text{const}$ feltétel, akkor:

$$a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{2n} = \dots = A_1,$$

$$a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2n+1} = \dots = A_2,$$

$$b_2 = b_4 = b_6 = \dots = b_{2n} = \dots = B_1,$$

$$b_3 = b_5 = b_7 = \dots = b_{2n+1} = \dots = B_2.$$

Mivel a_n és $b_n (n=1, 2, \dots)$ az $y(t)$ Fourier-féle együtthatói (a feltétel szerint ugyanis $y(t)$ Fourier-sorba fejthető), azért a_n és $b_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, amiből következik, hogy:

$$A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0,$$

tehát a fenti követelményeknek megfelelő görbe esetén:

$$y(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t.$$

Ha még figyelembe vesszük, hogy $y(0) = y(\pi) = 0$, akkor látható, hogy a görbe ellipszis.

Befejezésül példaképen állítsuk elő azt a zárt konvex görbét, amely olyan tulajdonságú, hogy $n=4$ kivételével bármely szabályos n -szögek megfelelőinek területe ugyanakkora. Ez esetben a fentiek és az $y(0) = y(\pi) = 0$ feltétel figyelembevételével nyerjük, hogy

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{2n} = \dots = 0,$$

$$a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0$$

$$b_1 \neq 0, b_3 \neq 0, b_2 = b_4 = \dots = b_{2n} = \dots = 0,$$

$$b_5 = b_7 = \dots = b_{2n+1} = \dots = 0.$$

Tehát a követelményünknek megfelelő görbére:

$$y(t) = b_1 \sin t + b_3 \sin 3t = (b_1 + 3 - 4b_3 \sin^2 t) \sin t$$

vagyis, DESCARTES-féle koordinátákkal kifejezve, a görbe:

$$y = (a + bx^2) \sqrt{1 - x^2}.$$

E görbék között, amint fenn már megmutattuk, vannak konvexek is.

Sas Ernő.

ON A CERTAIN EXTREMUM-PROPERTY OF THE ELLIPSE.

In the first part of the above paper the following suggestion of Mr. L. FEJES is proved : In a closed convex curve which is not an ellipse, it is always possible to draw a polygon of n sides which has a larger area than any arbitrarily given polygon of n sides drawn in an ellipse which has an area equal to that of the given curve.

In the second part a class of curves is treated which was obtained by a construction applied in the demonstration of the above theorem.

E. Sas.

GOETHE ÉS NEWTON SZÍNELMÉLETE A MODERN FIZIKA MEGVILÁGÍTÁSÁBAN.¹

Aki a tudományt előre akarja vinni — együtt működve, vagy vetélkedve másokkal — az megelégedhet azzal, hogy egész erejét egy szűk munkakörre fordítja. Aki azonban e haladást a maga egészében akarja áttekinteni, az helyesen teszi, ha újból és újból összehasonlítja egy-egy régebbi időszak tudományos feladatait, és figyelemmel kíséri ama különös átalakulást, amelynek évtizedek vagy évszázadok során egy nagy probléma ki van téve. Egy termékeny kérdés, ha már találtak is rá egyszer világos feleletet, későbbi idők folyamán újabb megvilágításban ismét felmerülhet.

A mai természettudománynak az a folytonos átalakulása, amelylyel exakt, az eleven szemlélettől elvonatkoztatott természetleírás felé halad, magától felidézi annak a nagy költőnek az emlékét, aki több mint száz évvel ezelőtt a színelméletben egy elevenebb természettudományért való harcra vállalkozott. Ez a küzdelem lezárult, minden részletkérdésben is eldöntötték, hogy mi «helyes» és mi «hamis». A GOETHE-féle színelmélet a művészetben, az élettanban és az esztétikában igen termékeny volt. A győzelem azonban, a következő évszázad kutatásaira való befolyás, a NEWTON-féle színelméleté maradt. Azon rendkívüli fejlődés következtében, amelyen a NEWTON-féle fizika ama idők óta — főként az utolsó évtizedekben — átesett, ennek a kutatási iránynak a következményei is most világosabban állnak előttünk, mint valaha. Az elképzelések idegenszerű elvontsága, amely — pl. a modern atomfizikában — megengedi, hogy a természetet uralkodjunk, minden-

¹ A Szellemi Együttműködés Magyar Egyesületében Budapesten 1941. ápr. 28-án tartott előadás. Megjelent németül a «Geist der Zeit» c. folyóirat 1941. májusi számában.

nél világosabb fényt vet a színelmélet körüli híres harc háttérére. A következőkben elsősorban erről a háttérrel beszéljünk.

Ismeretes, hogy GOETHE a természettel való beható foglalkozásra olaszországi utazása indította. Az ország geológiai felépítése, a délszaki ég alatt tenyésző növények sokféle alakja, az olasz táj ragyogó színei utazása során újból és újból megragadták figyelmét és útinaplójának élénk leírásaiból ismét megelevenednek előttünk. Feljegyzéseiből azt is megláthatjuk, hogy ezek a benyomások — szinte maguktól — miként állottak össze tudományos rendbe, és a közvetlen természeti élményekből miként fejlődtek ki azok az elképzelések, amelyek később a GOETHE-féle természet-szemlélet alapjaivá lettek. Weimarba való visszatérése után kezdte meg GOETHE a nyert tapasztalatok kidolgozását : ennek a munkának első termékeként jelent meg 1790-ben a *«Metamorphose der Pflanzen»*. A színek elméleti vizsgálata, melyhez GOETHE már Olaszországban hozzákezdett, s amely színelmélethez írt vallomásai szerint a koloritok kérdéséből indult ki, ebben az időben háttérbe szorult. Egy prizma, melyet hazatérte után BÜTTNER udvari tanácsostól Jenában kapott kölesön, hogy azon a fénytörésnél létrejövő színjelenségeket tanulmányozza, kicsomagolatlanul hevert az asztalán. Csak — mintegy 1791 tavaszán — amikor a tulajdonos a prizmát visszakérte, és egy szolgát küldött érte, akkor használta ki GOETHE az alkalmat, hogy a prizmán átnézzon és a várt jelenséget megfigyelje. Ekkor, legnagyobb meglepetésére, azt tapasztalta, hogy nagy fehér felületek nem lesznek színesek, mint ahogyan a NEWTON-féle színelmélet tanulmányozása alapján várta, hanem fehérek maradnak, és hasonló a helyzet nagy kiterjedésű sötét felületek esetén is. Csak világos és sötét területek között jelenik meg színes szegély. GOETHE ebből azt következteti, hogy «színek létrejöttéhez egy határvonalra van szükség». Ez a felfedezés, melyről GOETHE azt hitte, hogy NEWTON színelméletével ellenkezik, ösztönözte arra, hogy a színek fénytöréskor való keletkezésével foglalkozzék. A színek — GOETHE szerint — világosság és sötétség egyesülésekor keletkeznek és nemcsak fényből, amint NEWTON tanítja. Ezt a következtetést sok más jelenség is igazolja. A Nap,

mely nappal fehér fénnel sugárzik, sárgának és vörösnek látszik, ha fényét valami közbeeső páráréteg elhomályosítja. A kéményből felszálló füst napfényben kékesen fénylik. Sok más tapasztalat által tovább meggyőzve, végre GOETHE a színeknek fényből és sötétségből való keletkezésében, a homálynak a világossághoz való keveredésében vélte az ősjelenséget («Urphänomen») megtalálni. Ez az alapfolyamat, vagy ősjelenség — vezéreszméül nem az értelmet, hanem a tapasztalatot véve — egységes rendbe foglalja össze az érzékvilágunk különböző színjelenségeit. Az a rend, amelyet GOETHE színelméletében harmonikusan és a legapróbb részletekig eleven tartalommal kitöltve épít fel előttünk, az összes objektív és szubjektív jelenségeket magában foglalja. Éppen a színeket, melyeket csak magában a szemben lejátszódó folyamatok határoznak meg, s ezért voltaképpen «érzéki csalódás»-on alapulnak, GOETHE különös gondnal tárgyalja. És hogy GOETHE a színek keletkezésének alapjelenségéről a «West-östliche Diwan» egyik legszebb költeményében beszél, abból érezhetjük, hogy magának GOETHE-nek mit jelentett ez a felfedezés.

GOETHE úgy érezte, hogy színelmélete a NEWTON-félével áthidalhatatlan ellentétben áll. Ezért most a NEWTON-féle elmélet-ről kell beszélnünk. Ez az elmélet, mely még ma is mindenféle fizikai optika alapja, azt tanítja, hogy a fehér fény több más színű fény összetétele, hasonlóképpen a tenger messziről hallatszó morajlásához, mely érzéklésünkben mint valami sajátos és egyéni jelenik meg, s egyes hullámcsapások hangjából tevődik össze. A fehér fényből külső beavatkozással színeket lehet kiválasztani. Mint-hogy ehhez a kiválasztáshoz mindig anyagra van szükség, amely fényt nyel el, és így hasonló ahhoz, amit GOETHE homálynak, vagy sötétségnek nevez, a NEWTON-féle elmélet szerint is jól érthető, hogy fehér fényből a színek csak a homállyal való kölcsönhatás révén keletkezhetnek. Ennek ellenére a jelenségek rendje a két elméletben egészen más. NEWTON elmélete szerint a legegyszerűbb jelenség az a keskeny egyszínű fénysugár, melyet bonyolult berendezésekkel más színű és irányú fénytől megtisztítottunk. GOETHE tanítása szerint a legegyszerűbb fogalom a világos, körülöttünk

szétáradó napfény. A NEWTON-féle elméletnek a mi szemléletünk-től olyan messze eső alapjelensége a mérések és a matematikai számítások számára nyitja meg az összes optikai jelenséghez vezető utat. A fény terjedésének mikéntjét mérésekkel meg lehet határozni, matematikailag meg lehet fogalmazni, és a színekhez is lehet egy-egy számot — mai tudásunk szerint a fény hullámhosszát — hozzárendelni. Így az optika azzá lesz, amit általában exakt tudománynak neveznek, és mint ilyen, helyesnek bizonyul, mivel megtanít optikai műszerek készítésére, melyek a világ oly területeihez visznek közelebb, amelyek érzékeink számára közvetlenül hozzáférhetetlenek. Másrészt az is érthető, hogy ez az elmélet, mely a fényjelenségek fölött bizonyos uralmat ad, és őket gyakorlati célokra alkalmassá teszi, egyáltalán nem segít abban, hogy a körülöttünk levő színes világot elevenebben érzékeljük.

Ebből az összehasonlításból kiderül, hogy a két tannak, a GOETHE- és a NEWTON-félének hogyan kellett egymáson kritikát gyakorolnia. NEWTON elméletének kiindulópontja GOETHE előtt idegenszerűnek és természetellenesnek látszik. A fehéret, tehát voltaképpen a legtisztább fajta fényt kell összetettnek tekintenie és a fizikusok a réseken, lencséken és prizmákon, bonyolult berendezéseken átmenő fényt tekintik alapjelenségnek. Megértjük, hogy GOETHE a csalódását a következő szavakkal ki is fejezte: «Épp így lesz a fizikus úrrá a jelenségeken, tapasztalatokat gyűjt, azokat mesterkélt kísérletekkel ácsolja-csavarozza össze... de arra a merész állításra, hogy még ez is természet, csak halkan mosolygunk, s csendben csóváljuk a fejünket. Hiszen az építészeknek sem jut az eszükbe, hogy palotáikat hegyi tábornak, vagy erdőségnek nevezzék.» GOETHE általában helyteleníti a fizikusoknak azt a törekvését, hogy a jelenségek világa mögött az okokig akarnak eljutni. «Ha találnánk is egy ilyen alapjelenséget, akkor is megmarad az a baj, hogy azt, mint olyat még mindig nem akarjuk elfogadni, hogy a mögött és azonfelül még mindig keresünk valamit, bár itt már tudomásul kellene vennünk a látás határait. A természettudós hagyja meg az alapjelenségeket a maguk örök nyugalmaiban és pompájában.»

Megfordítva, viszont a fizikus azt az ellenvetést teheti GOETHE színelméletével szemben, hogy nem lehet olyan exakt tudománnyá kiépíteni, amelynek segítségével az optikai jelenségeken valóban uralkodni lehetne. Még nem észlelt színtüneményeket a GOETHE-féle elmélet alapján alig lehet pontosan megjósolni, míg a NEWTON-féle elmélet ezzel az igénnyel igenis felléphet. A GOETHE-féle elméletben továbbá olyan elemek vannak összeszöve, amelyek elválasztására a fizikusnak mindig gondosan kell ügyelnie: a fizikus számára minden kutatás első feltétele a szubjektív és objektív elemek különválasztása. A fizikus ismereteit a GOETHE-féle színelmélet tehát egyes különálló területeken gazdagíthatja: tanulhat belőle a szemnek a színhatásokra való reakciójáról, kémiai vegyületek színéről, elhajlási jelenségekről, azonban az ő szempontjából a GOETHE-féle elméletből éppen az egység hiányzik. Ugyanis a szem reakciójának a magyarázatát a recehártya és a látóidegek (melyek a színhatásokat az agyba viszik) finomabb biológiai szerkezetében kell keresni, a kémiai vegyületek színét a vegyületek atomi szerkezetéből kell megmagyarázni tudni, végül az elhajlási jelenségek matematikailag a tovaterjedő hullámok tulajdonságaiból következnek . . . E három jelenség közvetlen összefüggése ezen az alapon tehát érthetetlen. A természetnek itt egy általánosabb jellemvonása nyilvánul meg: érzékeink szerint rokon és összetartozó jelenségek gyakran elvesztik az összefüggésüket, ha az okaikat kutatjuk.

Mindazok előtt, akik újabban a GOETHE- és a NEWTON-féle színelmélettel foglalkoztak, világos volt, hogy annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy mi helyes és mi helytelen a két elméletben, nem sokra vezet. Lehet ugyan döntení minden konkrét kérdésben, és NEWTON természettudományos módszere ama néhány esetben, amikor az elméletek között valódi ellenmondás van, majdnem mindig legyőzi GOETHE intuitív erejét. Azonban tulajdonképpen a két elmélet alapján különböző dolgokkal foglalkozik, és már az a kérdés tisztázatlanul marad, hogy a szín fogalmával miként lehetnek összefüggésben ennyire különböző dolgok.

E kérdéssel kapcsolatban rámutattak arra, hogy GOETHE és NEWTON két teljesen különböző módszert követett. Míg NEWTON

egész világosan arra törekszik, hogy a színeket exakt mérések számára megfoghatóvá tegye, a színek világát matematikailag rendezze, amint a mechanikában már sikerült neki, addig GOETHE-nél matematikai megfontolásokat egyáltalán nem találunk. Ellenkezőleg, GOETHE határozottan lemondott a matematikával való kapcsolatokról, mindössze azt hangsúlyozta, hogy «mérőművészek» segítsége itt-ott szükségesnek látszik. — Közelebbről vizsgálva a dolgot, ez a különbség mindenesetre kevésbé fontos, mint első pillanatban látszik. Amiről GOETHE lemond, az nem maga a matematika, hanem a matematikai apparátus. Ha a legtisztább alakjában megjelenő matematikára gondolunk, mint amilyen a szimmetria-elmélet,¹ vagy az egész számok elmélete, akkor könnyen belátjuk, hogy GOETHE színelméletében nem is kis részben van matematika. Pl. «a színek érzéki és erkölcsi hatásáról» szóló fejezetben beszél a poláris viszonyuk szerinti szimmetrikus rendjükéről. GOETHE a hat alapszín egy szabályos hatszögön, vagy egy hat részre osztott körön állítja elénk, ahol a színek sorrendje a következő: vörös, ibolya, kék, zöld, sárga, narancssárga. E körben minden szín a komplementer színével van szemközt, tehát a zöld a vörössel, a kék a narancssárgával. Ez a szimmetrikus elrendezés a színek sokféle egymásközi kapcsolatának a tanulmányozására alkalmas. Szemközt levő színek — mint GOETHE mondja — tiszta harmonikus, egyedül belőlük származó összetételt adnak, mellyel mindig teljesség jár. A körön levő két olyan szín összetételét, melyet csak egy közbülső választ el, GOETHE jellegzetesnek nevezi, mert — mint mondja — «együttesükben van valami különösség, amely egy bizonyos kifejezéssel feltolakszik, de nem nyugtat meg, amennyiben minden jellegzetesség onnan ered, hogy mint annak az egésznek egy része emelkedik ki, amellyel egy bizonyos viszonyban van, a nélkül, hogy abban feloldódna». Végül a körön levő szomszédos színek összetételét «jelleg nélküli összetétel»-nek nevezi. A színek közti kapcsolatnak a színekör segítségével való

¹ Lásd pl. az ornamentumok csoportelméleti tárgyalását. SPEISER. A.: Theorie der Gruppen. — Szerkesztő megjegyzése.

tárgyalása nyomban arra a matematikai szimmetriára emlékeztet, amely egy művészi ornamentumban található, vagy amit egy kaleidoszkop legegyszerűbb alakzatai tárnak szemünk elé. — Hasonló szimmetrikus rendszereket találhatunk az egész mű felépítésében.

GOETHE és NEWTON színelmélete közötti különbségről valamivel világosabb képet kaphatunk, ha a két színelmélet célját vizsgáljuk. Nem szabad azt gondolni, hogy egy tudományos elmélet mindig egy bizonyos célra készül, és csupán ezt a célt igyekszik elérni. Azonban minden tudományos elméletnek van valami szellemi háttere, amely valamilyen módon elképzeléseket tartalmaz a felől, hogy az elméletet majd miként lehet alkalmazni. Ezt a hátteret gyakran az illető tudomány történeti fejlődése szabja meg, s az elmélet szerzője talán csak homályosan ismeri. Ha ilyen értelemben beszélünk az elmélet céljáról, akkor nem lehet kétség a felől, hogy a GOETHE-féle színelmélet művészeknek, elsősorban festőknek szól. GOETHE maga is határozottan megmondja, mennyire hiányzik neki egy művészi színelmélet, s miként tűnt fel neki, hogy «az élő művészek csupán bizonytalan hagyományok, s bizonyos impulzus alapján jártak el, hogy félhomály, kolorit, színek harmóniája, mindig egy csodálatos körben forogtak.» GOETHE színelmélete egészen bizonyosan abból a kívánságból született meg, hogy a művészetnek e hiányzó elméletet nyújtsa. E kívánságon túl ott áll még általánosabb háttérként egy másik óhaj is, melyet GOETHE azon az első helyen, ahol az «Olaszországi utazás»-ban a színelmélet terveiről ír, a következő mondatban fejez ki: «Látom, hogy némi gyakorlattal és huzamosabb elmélkedéssel a földkerekségnek ezt a gyönyörűségét is magamévá tehetném.»

A NEWTON-féle színelmélet keletkezésének a háttere egészen más. GALILEI és KEPLER óta a természettudományi tapasztalat azt mutatta, hogy a mechanika matematikai törvényekbe foglalható, és így megérthető. NEWTON volt az első kutató, aki felismerte, hogy ilyen módon milyen óriási mértékben lehet a természetbe behatolni. Az optikában is volt egy sereg kutatás, mely azt mutatta, hogy e területnek nagy része szintén matematikailag megfogalmazható

törvényeknek engedelmeskedik és ezért nyomban megértjük, hogy NEWTON törekvése arra irányult, hogy a színelmélet ilyen matematikai átértése irányában tegyen lépéseket. Hogy e kívánság már akkor mennyire függött össze azzal a felismeréssel, hogy a fizikai törvények pontos ismerete a természet feletti technikai uralomra vezethet, azt nagyon nehéz megmondani. Az a tény azonban, hogy maga NEWTON hosszasan és behatóan foglalkozott a látcsövek tökéletesítésével, arra mutat, hogy ő az exakt természettudomány eme részében is jártas volt.

A későbbi fejlődés azt mutatta, hogy mindkét elmélet elérte a kitűzött célját. A mai távcsövek és mikroszkópok sohasem születtek volna meg a fény e matematikai elmélete nélkül. GOETHE színelmélete pedig sok festőnek jelentett útbaigazítást és gyarapodást.

Gyakran hangoztatják azt is, hogy GOETHE és NEWTON céljának különböző volta mögött az egész világszemléletük közötti mélyebb különbség mutatkozik meg, hogy a költőnek és a matematikusnak a világgal szembeni különböző beállítottsága vezetett a színnek ilyen különböző elméletéhez. A színelmélet körüli vitának ez bizonyára fontos pontjára mutat rá. Mégis helytelen lenne ebből arra következtetni, hogy a természettudós számára a világ minden más, költői oldalának idegennek kell lennie. Csak KEPLERRE kell gondolkunk, aki részt vett a matematikai természettudomány legfontosabb alapjainak lerakásában. KEPLER bonyolult szám-spekulációiban is mindig ott érzi a szférák harmóniáját és aki észrevette azt a lelkesedést, amellyel a bolygópályák közötti harmonikus összefüggésre vonatkozó új felfedezését ünnepelte, az kénytelen KEPLERT határozottan költői léleknek tartani. NEWTON életének nagy részét fordította filozófiai és vallási tanulmányokra, és helytállóbb az a vélemény, hogy minden nagy természettudós jártas volt a költészet szférájában is. Legalábbis célja volt a fizikusoknak, hogy a természeti jelenségek harmóniáját kiderítsék. Fordítva is tévedés volna azt gondolni, hogy a költő GOETHE nagyobb súlyt helyezett a világról való eleven benyomások gyűjtésére, mint valódi megismerések szerzésére. Már minden igazi nagy költői mű a világ egyébként nehezen megérthető területeibe nyújt valódi bepillan-

tást, és épp azért egy olyan műnek, mint a «Farbenlehre», feladata új ismeretek közvetítése és egy ilyen mű a tudományos pontosság követelményeinek megfelelően készült.

A GOETHE- és a NEWTON-féle színelmélet közötti különbséget talán a leghelyesebben így határozhatjuk meg: a két elmélet a valóságok két különböző rétegével foglalkozik. Itt most arra kell gondolnunk, hogy nyelvünk minden szava a valóságok különböző területeire vonatkozhatik, és sokszor csak a nagyobb összefüggésekből, gyakran csak a hagyomány és a megszokás alapján derül ki, hogy melyik területről is van szó. Az újabb idők természettudománya lassan elkezdte a valóságot két részre, egy szubjektív és egy objektív részre választani. Míg a szubjektív valóság nem minden ember számára szükségszerűen ugyanaz, addig az objektív valóság az emberre mindig ugyanúgy kívülről kényszeríti rá magát és ezért a természettudomány kezdettől fogva ezt tette kutatása tárgyává. Ez a természettudomány bizonyos tekintetben kísérlet arra, hogy a világot úgy írjuk le, hogy abban magunktól, a mi gondolkodásunktól és tevékenységunktől eltekintsünk. Az érzékek itt mint olyan többé-kevésbé tökéletes segédeszközök szerepelnek, amelyekkel az objektív világról tudomást szerzünk, és csak természetes és következetes, hogy a fizikus igyekszik érzékei finomságát mesterséges eszközökkel fokozni, amíg csak be nem hatol az objektív valóság végső, legtávolabbi területeibe, melyek közvetlenül nem észlelhetők. Ekkor támad az a csalfa remény, hogy a megfigyelési módszerek finomításával végül az egész világot sikerül megismerni.

Ezzel az objektív valósággal szemben, mely szigorú törvényei szerint folyik le, és ott is köt bennünket, ahol érthetetlen véletlennek látszik, szemben áll a másik valóság, amelyik fontos, számunkra jelent valamit. Ebben a másik valóságban azt ami történik, nem számlálják, hanem értékelik, és az eseményeket nem magyarázzák, hanem értelmezik. Amikor itt észszerű összefüggésekről beszélünk, akkor az emberi lélekben meglévő összetartozásokról van szó. Ilyen valóságba tartozik a GOETHE-féle színelmélet, mely bár szubjektív, de egy cseppet sem gyengébb a másiknál.

Mindenféle művészet ebbe a valóságba tartozik és mindenféle jelentős műalkotás ezen a területen gazdagítja ismereteinket.

Soká úgy látszott, mintha e kétféle valóságnak mindig áthidalhatatlan ellentétben kellene állnia egymással. Ez esetben GOETHE-nek a NEWTON-féle színelmélettel folytatott harca csak ennek az elsimíthatatlan ellentétnek egyik kifejezője lenne. Azonban a természettudományok fejlődése az utolsó évtizedekben azt mutatta, hogy a világnak illetén módon két tartományra való bontása nem jelenti a tudomány utolsó szavát. Beszéljünk ezért most a modern fizika ezen fejlődéséről.

Ama elgondolás következtében, hogy érzékeink a modern világ megismerésére csak meglehetősen tökéletlen segédeszközök, a természettudomány a közvetlen érzékvilágtól egyre jobban elszakadt. A kifinomult észlelési technika a természet olyan új oldalaira vetett fényt, amelyek szemléletünk előtt rejtve maradtak. Ugyanilyen mértékben azon fogalmak is, amelyekkel a természettudomány dolgozik, egyre elvontabbak, kevésbé szemléletesek lettek. Már az egyszínű fénysugár is, mely NEWTON optikájának egyik alapfogalma, szemléletünknek idegenszerű. Egész világosan tűnik ki a természettudománynak az érzékvilágtól való elszakadása az elektromosságtanban. A múlt század első felében megpróbálták az elektromosságtant az erő fogalma révén a mechanikával összekötni. FARADAY és MAXWELL felfedezései nyomán azonban kiderült, hogy az elektromos és mágneses jelenségeket akkor lehet a legegyszerűbben rendezni, ha az elektromos tér fogalmából indulunk ki. Eme erőter fogalmát rugalmas testek rezgéseivel való összehasonlítás közelebb viszi ugyan a szemlélethez, de itt nyilvánvalóan csak egy szemléletes segéd-elképzelésről van szó, amely alkalmas a matematikai összefüggések világosabbá tételére. Ahhoz, amit érzékeink útján az elektromossággal kapcsolatban észlelünk, ennek semmi köze sincs. Ugyanis, ha beszélünk is éterről, melynek rugalmas rezgései elektromos hatást gyakorolnak, ez az éter maga nem érzékelhető. — Ugyanekkor az elvontabbá váló természettudománynak különös ereje nyilvánult meg abban, hogy fel tudja ismerni különböző jelenségek összefüggéseit, és közös alapra tudja

helyezni őket. Az objektív világ kutatása azáltal kapta meg legmélyebb igazolását, hogy nem is sejtett távoli összefüggésekhez vezetett, és hogy az így keletkező világkép minden részletében való bonyolultsága mellett is e nagy összefüggések terén egyre egyszerűbbé lett. MAXWELL felfedezése révén a fényt elektromágneses jelenségnek ismerték el, és ezzel érzékvilágunk egészen különböző területeit: az elektromos és mágneses jelenségeket, a fényt, a láthatatlan ultravörös és ultraibolya sugarakat, a hősugarakat, ugyanazon fizikai tartomány különböző oldalainak tekintették. Ez a fejlődés végül következetes módon fejeződik be a modern atomfizikában. Az atomfizika az anyagnak érzékeink, vagy kísérleteink segítségével megállapítható tulajdonságainak a magyarázatával foglalkozik, azaz visszavezeti őket az atomok sajátságaira, melyek egyszerű matematikai törvényekkel írhatók le. A jelenségek végtelen sokfélesége így bizonyos fokig egy egyszerű matematikai axiómarendszer végtelenül sokféle következményében tükröződik. Valóban, a mai atomfizika a szilárd testek tulajdonságait, a kémiai törvényszerűségeket, a hő hatásait, és amit még csak az anyagon észlelünk, az atom tulajdonságaiból meg tudja magyarázni. E magyarázatot minden esetre eddig még csak aránylag kevés esetben sikerült a szükséges végleges matematikai pontossággal keresztülvinni, de az elmélet minden ilyen esetben kiállotta a legszigorúbb próbát is. Azonban az anyag érzékelhető tulajdonságainak az atomok viselkedése alapján való magyarázatakor az derül ki, hogy az anyag végső alkotórészeinek általában nem tulajdoníthatunk egyszerűen érzékelhető sajátságokat. Az atomot, a kísérleti technika rendkívüli fejlettsége folytán, hatásaiban meg lehet figyelni, de ekkor az atom már nem közvetlen szemlélődésünk tárgya. A természettudósoknak tehát le kell mondania arról, hogy azokat az alapfogalmakat, melyekre tudományát építi, közvetlenül az érzékvilághoz kapcsolja. Hogy az alapfogalmak helyesek, azt az az egységes, törvényszerű rend igazolja, amely e fogalmak bevezetésével az érzékvilág jelenségeinek végtelen sokasága között kialakul, s azokat érthetővé teszi. Hogy pedig itt valóságos rendről van szó, azt a technika bizonyítja, amely ebből a rendből fejlődött ki, és meg-

engedte az embernek, hogy a természet erőit a saját céljaira felhasználja.

E fejlődés során a természettudomány objektív világa minden esetre különös módon átalakult. Az a kívánság, hogy úgy írjuk le a világot, amint a saját gondolatainktól és beavatkozásainktól eltekintve lehetséges, abból a szándékból fakadt, hogy a tévedéseket, melyek érzéki csalódásokból, vagy az észlelések pontatlanságából támadhatnak, kiküszöböljük. A világról lehetőség szerint pontos képet kellett alkotni. Most kiderül, hogy ez az egyre pontosabbá váló kép az eleven természettől egyre messzebb kerül. A természettudomány most már nem a közvetlenül előttünk álló világgal foglalkozik, hanem ennek a világnak egy sötét hátterével, amelyre kísérleteinkkel derítünk fényt. Tehát ez az objektív világ egy bizonyos fokig csak a mi aktív beavatkozásunk, az észlelési technikánk finomodása révén kerül felszínre, és ennyiben itt is elérkezünk az emberi ismeretek átléphetetlen határához.

Ebből a fejlődésből látható, hogy GOETHE-nek a fizikai színelmélet elleni harca egy kiszélesedett arcvonalon még ma is döntésre vár. Ha HELMHOLTZ azt mondja GOETHE-ről, hogy «színelméletét olyan próbálkozásnak kell tekintenünk, amely az érzéki benyomás valóságát igyekszik a tudomány támadásától megmenteni», akkor ez a feladat ma fontosabb számunkra, mint bármikor máskor, mert az egész világ átalakul természettudományi ismereteink kiszélesedése és a technikai lehetőségek gazdagsága következtében, amelyet, mint minden gazdagságot, részben áldás, részben átokként kapunk. Az utolsó évtizedek folyamán ezért hangzott fel ismételten az az intő hang, amely visszatérést ajánlott. Arra utalnak, hogy az érzéki világtól való elkanyarodás és ezzel kapcsolatban a világnak különböző tartományokra való osztása máris nagy szétforgácsolódást okoz a szellemi életben és, hogy az eleven természettől való eltávolodás következtében mintegy légüres térbe megyünk, ahol már többé nincs élet. Ahol ezek a figyelmeztetők nem csak általánosságban azt tanácsolják, hogy az eddigi természettudományt és technikát adjuk fel, ott arra biztatnak, hogy a természettudomány fejlődése során tartsunk szoros kapcsolatot a szemléletes tapaszt-

találással. Nem elegendő felismerni azokat a törvényeket, amelyeknek az objektív világ eseményei engedelmeskednek, hanem e törvények összes következményeit érzékvilágunk számára minden pillanatban számon kell tartani. A természettudósnak kísérletei során a természettel való állandó érintkezésben annyira meg kell barátkoznia a megfigyelt jelenségekkel, hogy a törvények csak a tapasztalatok szükségszerű összefoglalásának lássanak. Azáltal tehát, hogy kísérleteink világa éppoly szemléletessé és elevenné válik, mint a környező természet, el kellene kerülni a kétféle valóság teljes elválasztásának a veszedelmét. Mármost az eleve világos, hogy csak az ismerheti fel a természet összefüggéseit, aki azokat a fizika illető területén jól ismeri. Sok kísérleti eredmény igen pontos ismerete nélkül a természetismeret még egy lépéssel sem jutott előbbre. Ezzel azonban a mai természettudomány veszedelmét még nem küzdöttük le, ugyanis bonyolult kísérleteinkben nem maga a természet jelenik meg, hanem a megismerést célzó tevékenységünk következtében megváltozott és átalakult természet. Aki ezen változtatni akarna, annak az egész mai technikáról és a vele kapcsolatos természettudományról le kellene mondania. Akárhogy vélekedünk is, annyi bizonyos, hogy a visszatérés lehetetlen; a mi korunknak az a feladata, hogy a megkezdett úton végig menjen.

Midőn az Újkor kezdetén a tengerhajózás felvirágzása és az első világkörüli hajósok merész tettei révén megnyílt annak a lehetősége, hogy távoli földeket meghódítsanak, és onnan mérhetetlen kincseket hozzanak haza, talán akkor is kétségbe lehetett vonni, hogy vajjon az új gazdagságban a szerencse és a szerencsétlenség egyformán esik-e latba. Talán akkor is hallatszottak intő szavak, melyek a régi korok nyugodtabb és igénytelenebb életkörülményeihez való visszatérést óhajtották. Ilyenkor azonban az intő hangok meghallgatás nélkül szállnak el. Az idegen országok és kincsek utáni vándorlásnak csak akkor lehet természetes vége, amikor már minden földet felkutattak és kincseit szétosztották. Akkor a tekintet ismét szabad lesz a talán fontosabb feladatok számára, melyek szűkebb körben állnak előttünk. Hasonlóképpen

fog a mi időnkben a természettudomány és a technika fejlődni. Amint semmiféle határkő nem akadályozhatta meg az idegen országokba való vándorlást, éppúgy semmiféle külső akadály nem tartóztathatja fel a technika haladását sem. Csak maga a természet tud az igen távoli területeibe való tevékeny behatolásnak véget vetni azáltal, hogy megmutatja, hogy a meghódítandó terület itt sem végtelen. A modern fizikának talán épp az a legfontosabb vonása hogy tisztázza a természettel szembeni aktív magatartásunk határait.

Az atomfizika abból a természetesnek látszó feltevésből indult ki, hogy a megfigyelési eszközök javításával az atomokról való ismereteket is egyre tökéletesebbé lehet tenni. Az atomok, bár az anyag legvégső oszthatatlan alkatrészei, mégis csak egy darab közönséges anyag kicsinyített másának látszottak, úgyhogy az atom, legalábbis a mi elképzelésünk szerint, az anyag mindazon tulajdonságaival rendelkezik, amelyet az anyagon nagyban észlelhetünk. Csak idők folyamán jöttek rá arra, hogy a legelemibb alkatrészeknek, pl. az elektronoknak, ha az anyag nagyban észlelhető sajátságait segítségükkel meg lehet magyarázni, akkor maguknak nem lehetnek meg ezek az érzékelhető tulajdonságai, hiszen különben az illető tulajdonságok alapja iránti kérdés csak eltolódna, de nem lenne megoldva. Ha pl. egy meleg test egy hideg testtől a belsejében levő atomok hevesebb mozgásában különbözik, akkor egy-egy atom maga nem lehet meleg, vagy hideg. Így fosztották meg lassanként az atomot minden érzékelhető tulajdonságától. Hosszú időn át úgy látszott, hogy az atomok egyedül a geometriai sajátságait tarthatják meg: azt, hogy teret foglalnak el, határozott helyük és mozgásuk van. A modern atomfizika fejlődése azonban az anyag végső alkatrészeit bizonyos értelemben ezektől a tulajdonságoktól is megfosztotta. Megmutatta ugyanis, hogy ilyen geometriai fogalmak alkalmazhatóságának a mértéke a legparányibb anyagi részecskék esetén azoktól a kísérletektől függ, amelyeket e részecskéken végzünk. Ha aránylag csak kis pontossággal beérjük, akkor lehet az elektronok helyéről és sebességéről beszélni, és a pontosság a mindennapi tapasztalataink körébe eső

tárgyakon végzett mérésekhez képest igen nagy. Atomi méretekhez képest azonban kicsi a pontosság, és egy erre a mikro-világra jellemző törvény akadályozza meg azt, hogy egy részecske helyét és sebességét elegendő pontossággal megismerjük. Lehet ugyan olyan kísérletet végezni, amely lehetővé teszi egy részecske helyének legnagyobb pontossággal való meghatározását, de ennél a mérésnél a részecskét oly erős külső hatásnak kell kitenünk, hogy ez a sebességben idéz elő nagy bizonytalanságot. A természet tehát kivonja magát a szemléletes fogalmakkal való pontos leírás alól ama elkerülhetetlen zavaró hatások miatt, amelyek minden megfigyeléssel együttjárnak. Míg tehát minden természetvizsgálat eredeti célja az volt, hogy a természetet úgy írják le, amilyen az önmagában véve, vagyis amilyen a mi beavatkozásunk, a mi megfigyelésünk nélkül lenne, addig most rájövünk arra, hogy éppen ezt a célt nem lehet elérni. Az atomfizikában semmikép sem lehet azoktól a változásoktól eltekinteni, amelyet minden észlelés az észlelt jelenségen előidéz. Csak a megfigyelés módja fogja eldönteni, hogy a természet milyen vonásait határozzuk meg, és melyek mosódnak el megfigyelésünk következtében. Ezek a sajátságok választják el az anyag legkisebb alkatrészeit a szemléletes fogalmaink területétől. Csak ez a körülmény igazolja azt a feltevést is, hogy az elektronok, protonok és neutronok, melyekből a mai fizika szerint az anyag felépül, valóban az anyag végső, oszthatatlan alkatrészei, vagyis, hogy nincsen értelme ezen elemi részek további felbontására, vagy térbeli szerkezetére gondolni.

E tényállásból kétféleképpen következik, hogy az a terület, amelyet a természettudomány és a technika segítségével fel lehet kutatni, csak véges lehet. Egyrészt az a tény, hogy az atomfizikában eljutottunk az anyag végső alkatrészeihez, lehetővé teszi a természetben levő kihasználható erők és a technika még nyitva álló lehetőségei tökéletes áttekintését. Másrészt az a mód, ahogyan az atomi jelenségek a mindennapi jelenségektől elkülönülnek, fontos példa arra, hogy a természetkutatásban már a kérdés felvetésének a mikéntje és a kutatás módszere egy véges, lezárt részt választ ki a jelenségek összességéből. Hajdan úgy látszott, hogy

az exakt természettudományoknak az a feladata, hogy a testek mozgását a maga szabályos lefolyásában megértse és leírja. Most rájövünk arra, hogy ilyen problémát az atomi jelenségek területén fel sem vethetünk. Amikor a természetnek egy atomi rendszer belsejében levő helyre, vagy folyamatra vonatkozólag szegezünk neki egy kérdést, akkor a kísérletnél szükséges tevékenységgel bizonyos, a mikro-világra jellemző összefüggéseket zavarunk meg.

Közelfekvő, hogy ezeket a gondolatokat általánosítsuk, s most ismét eszünkbe jut az a kifogás, amelyet GOETHE a NEWTON-féle fizikával kapcsolatban emelt. Ha GOETHE azt mondja, hogy amit a fizikus a maga műszereivel észlel, az már nem a természet, akkor azt is gondolja, hogy vannak a természetnek további, elevenebb területei, amelyek a természettudomány eme módszerei számára hozzáférhetetlenek. Nagyon is elhisszük, hogy ahol a természettudomány nem élettelen, hanem élő anyaggal áll szemben, ott mindig óvatosabban kell eljárni a természet megismerése céljából. Minél messzebbre megyünk a magasabbrendű, akár a szellemi élet megismerése terén, annál inkább meg kell elégednünk az egyszerűen felfogó, szemlélődő kutatással. Ebből a szempontból a világnak szubjektív és objektív részre való osztása a valóság túlságos leegyszerűsítésének látszik. Helyesebb lenne inkább sok egymásba kapcsolódó részre való osztásra gondolni, amely részeket a természetnek feladott kérdések és az észlelés közben megengedett beavatkozások különbözősége választ el egymástól. Midőn egyszerű fogalmakkal egy ilyen beosztást próbálunk csinálni, olyanféle rendszerre gondolunk, mint amelyet GOETHE színelméletének függelékében találhatunk. GOETHE hangsúlyozza, hogy minden hatás, melyet tapasztalataink során észreveszünk, a legfolytonosabb módon függ össze, s hogy mégis elkerülhetetlen, hogy azokat egymástól elválasszuk. E hatásokat GOETHE alulról felfelé haladó rangsorba osztja: véletlen, mechanikai, fizikai, kémiai, organikus, pszichikai, etikai, vallásos és genialis. A modern természettudomány szempontjából az első területeket talán egy kicsit másképpen választhatnók el egymástól: mechanikai helyett mindama jelen-

ségeket egybefoglalnánk, melyek a klasszikus fizika számára hozzáférhetők, melyeket tehát szigorúan kauzális alapon a tér-időben le lehet írni. A kémia területe magába foglalná az atomi folyamatokat, és törvényszerű felépítését a modern atomfizika tisztázná. Külön fizikai területet, melyet egy bizonyos értelemben a két megelőző már magába foglal, nem vezetnénk be. A véletlen számára sem hagynánk külön területet. Annál nagyobb — a természeti törvények által pontosan előírt — szerepet játszik a véletlen a felsőbb területeken. Tehát a GOETHE-féle rendszer négy legelső tartományának szabályos felépítése, a köztük levő összefüggések és kölcsönös elhatárolásuk világosan átlátható. A következő, az organikus terület belső szerkezetét és határait a modern biológia — ha csak homályosan is — ismerni véli. A mégfelsőbb területek pontos körülírására ma még senki sem vállalkozhatik.

Ha ilyen módon a valóságot különböző területekre osztjuk, akkor a GOETHE és NEWTON színelmélete közti ellentmondás magától megoldódik. A két elmélet a tudomány ama előbbi nagy épületében két különböző helyen áll. Persze, a modern fizika elismerése sem akadályozhatja meg a természettudóst abban, hogy a természetszemlélet GOETHE-féle útján is járjon, és azon előbbre is menjen. Az a remény azonban, hogy a természettel kapcsolatban elevenebb és egységesebb álláspontra térhetnénk vissza, nyilván még korai. A mi időnknek, úgy látszik, az a feladata, hogy a természet alacsonyabb rangú területeit kísérletileg megismerje, és technikailag meghódítsa. Az exakt természettudományok területén való emelkedésnél tehát egyelőre sokszor le kell mondanunk a természettel való eleven kapcsolatokról, amit GOETHE a mélyebb természetismeret előfeltételének látott. Ezt a lemondást azért vállaljuk magunkra, mert ennek fejében megismerhetünk, és matematikai tisztaságban áttekinthetünk olyan egészen távoli összefüggéseket, melyek a magasabb rangú területek teljesen világos megértésének határozott előfeltételei. Akinek az eleven területek elhagyása túlságosan nagy áldozatnak tetszik, az egyelőre nem követheti az exakt természettudomány útját. Csak majd amikor

ez a tudomány az eddigi kutatási módjának legszélső határán maga fedezi fel az élethez való viszonyát, akkor lesz számukra az értelme felfogható.

Talán szabad azt a természettudóst, aki a nagy összefüggések megismerése végett elhagyja az eleven szemléletet, ahhoz a turistához hasonlítani, aki egy hatalmas hegység legmagasabb csúcsára akar eljutni, hogy onnan az alatta fekvő tájat a maga összefüggésében áttekinthesse. A turistának is el kell hagynia az emberlakta termékeny völgyeket. Mennél magasabbra megy, annál szélesebbre tágul tekintete előtt a táj, de annál gyéresebb lesz körülötte az élet. Végül eljut egy jégből, hóból álló, vakítóan csillogó vidékre, ahol minden kihalt, ahol maga is csak nagy nehezen tud lélekezni. Csak ezen a tájon át lehet a csúcsra eljutni. Azonban ott fent olyan perceket tölt, amelyekben az alatta elterülő egész vidék a legtökéletesebb tisztaságban ragyog szeme előtt, s talán még sincs olyan nagyon messze az élő területtől. Megértjük, hogy egykor minden élettelen vidéket siralmas pusztaságnak érezték, hogy odamenni annyit tett, mint megsérteni a felsőbb hatalmakat, akik valószínűleg bosszút is állnak a túlon túl közelükbe merészkedőn. GOETHE is a sértő vonást látta a természettudomány haladásában. Bizonyosak lehetünk azonban afelől, hogy ama tiszta és végső világosság, amelyre ez a tudomány törekszik, a költő GOETHE előtt is ismeretes volt.

Werner Heisenberg.

(Fordította : *Faragó Péter.*)

DIE NEWTON'SCHE UND GOETHE'SCHE FARBENLEHRE.

(Vorgetragen im Ungarischen Kulturbund in Budapest am 28. April 1941.)

Der Vortrag kommt von einem Vergleich der Grundlagen der Goethe'schen und der Newton'schen Farbenlehre zu einem Vergleich der Wirklichkeitsbereiche, denen die beiden Farbenlehren gelten. Es wird darauf hingewiesen, dass schon die moderne Atomphysik den

Wirklichkeitsbereich der Newton'schen Physik überschreitet, dass also auch die konsequente Verfolgung des von Galilei und Newton eingeschlagenen Weges schliesslich in Gebiete führt, die sich von denen der klassischen Physik grundsätzlich unterscheiden. Aus diesem Umstand kann die Hoffnung geschöpft werden, dass sich in nicht allzuferner Zeit auch ein Verständnis für die Verbindung zwischen den naturwissenschaftlichen und den geisteswissenschaftlichen Bereichen anbahnen wird.

W. Heisenberg.

KITŰZÖTT FELADATOK.

(A megoldásokat a következő címre kérjük: DR. EGERVÁRY JENŐ, Budapest, IV., Kecskeméti utca 4.)

6. Bebizonyítandó, hogy egy determináns oszlopai közül mindig kiválaszthatók bizonyosak (legalább egy) úgy, hogy minden sornak a kiválasztott oszlopokban levő elemei közt vagy csak páros vagy csak páratlan sok 0 szerepel.

(Hajós György)

7. Bebizonyítandó, hogy az ortocentrikus¹ tetraéder négy magasságán átmenő minden másodrendű kúpra derékszögű triéderek helyezhetők el.

(Klug Lipót)

8. Bebizonyítandó, hogy bármely két ortocentrikus¹ tetraéder csúcspontjain és magasságpontjain át másodrendű felület fektethető.

(Egerváry Jenő)

¹ Ortocentrikus az olyan tetraéder, melynek magasságai egy ponton (a tetraéder magasságpontján) mennek át.

MEGOLDOTT FELADATOK.

1. Bebizonyítandó, hogy ha a nem azonosan eltűnő

$$c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

polinóm együtthatóira fennállanak a

$$c_r - 3c_{r+1} + 3c_{r+2} - c_{r+3} \geq 0 \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

egyenlőtlenségek, ahol $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = 0$, akkor a polinóm deriváltjának zérushelyei az egységkörön kívül vannak.

(Egerváry)

Az 1. feladat megoldása.

Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy a

$$P(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

polinom legalább másodfokú, azaz $n \geq 2$ és $c_n \neq 0$. A feladat feltételeiből következik, hogy a c_1, c_2, \dots, c_n sorozat pozitív, fogyó és konvex. Minthogy pedig

$$\begin{aligned} c_r - 3c_{r+1}\varrho + 3c_{r+2}\varrho^2 - c_{r+3}\varrho^3 &= c_r - 3c_{r+1} + 3c_{r+2} - c_{r+3} \\ &+ 3(c_{r+1} - 2c_{r+2} + c_{r+3})(1-\varrho) \\ &+ 3(c_{r+2} - c_{r+3})(1-\varrho)^2 \\ &+ c_{r+3}(1-\varrho)^3, \end{aligned}$$

azért $0 < \varrho \leq 1$ esetén a $c_1, c_2 \varrho, \dots, c_n \varrho^{n-1}$ sorozat is kielégíti a feladat feltételeit.

Valós, nem negatív z esetén $P'(z)$ nyilván pozitív; állításunk igazolására elegendő tehát kimutatni, hogy

$$I \left\{ e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot P'(\varrho e^{i\theta}) \right\} > 0, \quad \text{ha } 0 < \varrho \leq 1 \text{ és } 0 < \theta < 2\pi.$$

Azonban

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\theta}{2}} P'(\varrho e^{i\theta}) &= c_1 \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} + c_2 \cdot \varrho \cdot 2e^{3i\frac{\theta}{2}} + \dots + c_n \varrho^{n-1} \cdot n e^{(2n-1)i\frac{\theta}{2}}, \\ I \left\{ e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot P'(\varrho e^{i\theta}) \right\} &= \\ &= \frac{1}{2} \left[c_1 \sin \frac{\theta}{2} + c_2 \varrho \cdot 3 \sin 3 \frac{\theta}{2} + \dots + c_n \varrho^{n-1} \cdot (2n-1) \sin (2n-1) \frac{\theta}{2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[c_1 \sin \frac{\theta}{2} + c_2 \varrho \cdot \sin 3 \frac{\theta}{2} + \dots + c_n \varrho^{n-1} \cdot \sin (2n-1) \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned}$$

Az első, illetőleg második összeget a c, ϱ^{v-1} együtthatók harmadik, illetőleg első differenciái szerint átrendezve¹ nyerjük, hogy

$$I\{e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot P'(\varrho e^{i\theta})\} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \varrho^{v-1} (c_v - 3c_{v+1}\varrho + 3c_{v+2}\varrho^2 - c_{v+3}\varrho^3) S_v^{(2)}(\theta) + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \varrho^{v-1} (c_v - c_{v+1}\varrho) S_v^{(0)}(\theta), \quad (1)$$

ahol

$$S_v^{(2)}(\theta) = \binom{\nu+1}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \binom{\nu}{2} 3 \sin 3 \frac{\theta}{2} + \dots + \binom{2}{2} (2\nu-1) \sin (2\nu-1) \frac{\theta}{2}$$

és

$$S_v^{(0)}(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} + \sin 3 \frac{\theta}{2} + \dots + \sin (2\nu-1) \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \nu \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

FEJÉR egyik tétele szerint² $S_v^{(2)}(\theta) \geq 0$, ha $0 < \theta < 2\pi$; tehát az (1) alatti összegek tagjai a feladat feltételeinek következtében $0 < \varrho \leq 1$ és $0 < \theta < 2\pi$ esetén nem negatívak. Továbbá a második összeg első tagja: $(c_1 - \varrho c_2) \sin \frac{\theta}{2} > 0$, ha $0 < \varrho \leq 1$ és $0 < \theta < 2\pi$, mert ekkor $c_1 - \varrho c_2 \geq c_1 - c_2 \geq c_n > 0$.

E szerint $I\{e^{i\frac{\theta}{2}} P'(\varrho e^{i\theta})\} > 0$, ha $0 < \varrho \leq 1$ és $0 < \theta < 2\pi$, továbbá $P'(\varrho) > 0$, ha $\varrho \geq 0$, vagyis $P'(z) \neq 0$, ha $|z| \leq 1$. Q. e. d.

(Egerváry Jenő)

★

2. Bebizonyítandó, hogy ha a $z_1, z_2, z_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ számok a

$$2(\zeta_i z_i + z_k z_l) = (\zeta_i + z_i)(z_k + z_l) \quad (1)$$

($i, k, l = 1, 2, 3$)

egyenleteknek eleget tesznek és z_1, z_2, z_3 különbözők, akkor a

$$2(z_i \zeta_i + \zeta_k \zeta_l) = (z_i + \zeta_i)(\zeta_k + \zeta_l) \quad (2)$$

($i, k, l = 1, 2, 3$)

egyenletek is ki vannak elégítve.

(Egerváry)

¹ A polinómnak itt alkalmazott többszörös Abel-féle átrendezését illetőleg l. pl. FEJÉR L.: Hatványsorok többszörösen monoton együtthatósorozattal, Math. és Természettud. Értesítő, LV. köt. (1936).

² L. FEJÉR, Neue Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen, Journ. of the London Math. Soc. VIII. köt. (1933).

A 2. feladat első megoldása.

Az (1) egyenletek abban az esetben, mikor z_1, z_2, z_3 páronként különbözők, aequivalensek a

$$(\zeta_i z_i z_k z_l) \equiv \frac{\zeta_i - z_k}{\zeta_i - z_l} : \frac{z_i - z_k}{z_i - z_l} = -1 \quad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

egyenletekkel. Ezekből, felhasználva a kettőviszonynak elemei permutálásánál felvett értékei közt fennálló ismert összefüggéseket, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} (\zeta_1 z_1 z_2 z_3) &= -1, \\ (\zeta_2 z_1 z_2 z_3) &= 1 - (\zeta_2 z_2 z_3 z_1) = 2, \\ (\zeta_3 z_1 z_2 z_3) &= \frac{1}{1 - (\zeta_3 z_3 z_1 z_2)} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

továbbá nyilván

$$(z_1 z_1 z_2 z_3) = 1.$$

Ezen értékek figyelembevételével az

$$(a, b, c, d) \equiv ((apqr)(bpqr)(cpqr)(dpqr))$$

identitás³ alapján közvetlenül adódik

$$(z_1 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3) \equiv ((z_1 z_1 z_2 z_3)(\zeta_1 z_1 z_2 z_3)(\zeta_2 z_1 z_2 z_3)(\zeta_3 z_1 z_2 z_3)) = (1, -1, 2, \frac{1}{2}) = -1,$$

tehát átrendezéssel a (2) alatti első egyenlet. A másik kettő hasonlóan adódik.

(Surányi János)

A 2. feladat második megoldása.

Legyen

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= u_1, \quad z_2 - z_3 = u_2, \quad z_3 - z_1 = u_3, \\ \zeta_1 - \zeta_2 &= v_1, \quad \zeta_2 - \zeta_3 = v_2, \quad \zeta_3 - \zeta_1 = v_3. \end{aligned}$$

Az (1) egyenlet egyenértékű az

$$\frac{1}{\zeta_i - z_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_k - z_j} + \frac{1}{z_l - z_i} \right) \quad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

egyenlettel. Innen pedig

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{3u_1 u_2 u_3}{(u_3 - u_1)(u_1 - u_2)}, \quad v_2 = \frac{3u_1 u_2 u_3}{(u_1 - u_2)(u_2 - u_3)}, \\ v_3 &= \frac{3u_1 u_2 u_3}{(u_2 - u_3)(u_3 - u_1)}. \end{aligned}$$

³ Ez az ismeretes identitás egyik analitikus kifejezése a projektív geometria alaptételének, mely szerint két egymérettű alapalakzat közti projektivitás három homológ elempár megadásával egyértelműen meg van határozva.

és így

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_1} \right) &= \frac{u_3 - u_1}{2 \cdot 3u_1u_2u_3} (2u_2 - u_1 - u_3) = \\ &= \frac{u_3 - u_1}{2u_1u_3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_1} \right) = \frac{1}{z_1 - \zeta_1} \end{aligned}$$

stb. E szerint

$$\frac{1}{z_i - \zeta_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta_k - \zeta_i} + \frac{1}{\zeta_l - \zeta_i} \right),$$

(i, k, l = 1, 2, 3)

Ezek az egyenletek pedig egyenértékűek (2)-vel.

(Feldheim Ervin)

A 2. feladat harmadik megoldása.

Az általában komplex $P_i(z_i)$, $P_k(z_k)$ alappontokhoz harmonikus fekvésű $P_l(z_l)$, $\Pi_l(\zeta_l)$ pontokra nézve

$$(\zeta_i z_i z_k z_l) = \frac{\zeta_i - z_k}{\zeta_i - z_l} : \frac{z_i - z_k}{z_i - z_l} = -1, \quad (I)$$

(i, k, l = 1, 2, 3)

vagyis

$$2(z_i \zeta_i + z_k z_l) = (\zeta_i + z_i)(z_k z_l),$$

(i, k, l = 1, 2, 3)

Ennélfogva a bebizonyítandó tétel azt állítja, hogy a $(\zeta_i z_i z_k z_l) = -1$ (i, k, l = 1, 2, 3) összefüggésekből a $(z_i \zeta_i \zeta_k \zeta_l) = -1$ (i, k, l = 1, 2, 3) összefüggések következnek. Ezt igazoljuk be. Jelölések:

$$\lambda_1 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}, \quad \lambda_2 = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \quad \lambda_3 = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Az (I) alatti három egyenletből nyerjük, hogy

$$\zeta_1 = \frac{z_2 + \lambda_1 z_3}{1 + \lambda_1}, \quad \zeta_2 = \frac{z_3 + \lambda_2 z_1}{1 + \lambda_2}, \quad \zeta_3 = \frac{z_1 + \lambda_3 z_2}{1 + \lambda_3};$$

képezzük most ezek segítségével például a

$$(z_1 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3) = \frac{z_1 - \zeta_2}{z_1 - \zeta_3} : \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_3}$$

anharmonikus arányt. Nyerjük, hogy

$$\frac{z_1 - \zeta_2}{z_1 - \zeta_3} = \frac{1 + \lambda_3}{1 + \lambda_2} \cdot \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3} \quad \text{és} \quad \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_3} = \frac{1 + \lambda_3}{1 + \lambda_2} \lambda_2,$$

tehát, hogy $(z_1 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$. A λ -kat értelmező egyenletekből következik, hogy $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$; azért $(z_1 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3) = -1$, q. e. d. — A másik két összefüggés az indexek ciklikus permutációjával adódik, minthogy a kiindulási egyenletek is így keletkeztethetők.

(Csada Imre)

A 2. feladat negyedik megoldása.

A feladatot a következő általánosított alakban tárgyaljuk.

A z_1, z_2, z_3 számok legyenek különbözők és $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ elégítsék ki az

$$a(z_1 z_3 + \zeta_1 z_2) + b(z_1 z_2 + \zeta_1 z_3) - (a+b)(z_1 \zeta_1 + z_2 z_3) = 0,$$

$$a(z_2 z_1 + \zeta_2 z_3) + b(z_2 z_3 + \zeta_2 z_1) - (a+b)(z_2 \zeta_2 + z_3 z_1) = 0,$$

$$a(z_3 z_2 + \zeta_3 z_1) + b(z_3 z_1 + \zeta_3 z_2) - (a+b)(z_3 \zeta_3 + z_1 z_2) = 0$$

egyenleteket, ahol $a, b \neq 0, 0$. Bebonyítandó, hogy fennáll az a három egyenlet is, mely az adottakból úgy származik, hogy az

$$a, z_1, z_2, z_3 \text{ és } b, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$$

számcsoportokat felcseréljük. (Az eredeti feladat arra az esetre vonatkozik, midőn $a=b$).

Bizonyítás. Az adott egyenletek tartalma az, hogy a

$$(\zeta_1 z_1 z_2 z_3), (\zeta_2 z_2 z_3 z_1), (\zeta_3 z_3 z_1 z_2)$$

kettős viszonyok közös értéke $-\frac{a}{b}$, állításunké pedig az, hogy a

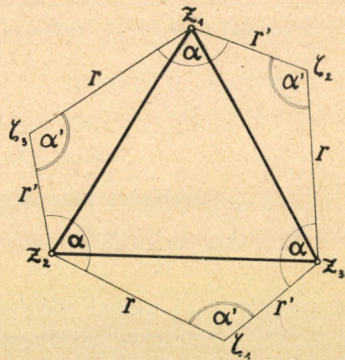
$$(z_1 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3), (z_2 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_1), (z_3 \zeta_3 \zeta_1 \zeta_2)$$

kettős viszonyok közös értéke ennek reciprokja: $-\frac{b}{a}$.

Mint ahogy tört-lineáris

$$\left(z, \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$$

transzformáció a kettős viszonyokat változatlanul hagyja és mivel ilyen transzformációval a z_1, z_2, z_3 számokat három tetszőszerinti számba vihetjük át, szabad feltennünk, hogy a z_1, z_2, z_3 számokat ábrázoló pontok egyenlő oldalú háromszögnek csúcsait alkotják. Ilyenkor megszerkesztvén a ζ_1 pontot, belőle ζ_2 -t és ζ_3 -at úgy kapjuk, hogy az ábrát a $z_1 z_2 z_3$ háromszög súlypontja körül a $z_1 z_2 z_3$ körüljárási



értelemben (melyről feltehetjük, hogy pozitív) $\frac{2\pi}{3}$, illetőleg $\frac{4\pi}{3}$ szöggel elforgatjuk. A keletkező $z_1 \zeta_3 z_2 \zeta_1 z_3 \zeta_2$ hatszög oldalai és szögei közül minden második egyenlő. Legyen

a	$z_1\zeta_3, z_2\zeta_1, z_3\zeta_2$	távolságok közös értéke	$r,$
a	$z_1\zeta_2, z_2\zeta_3, z_3\zeta_1$	" " "	$r',$
a	$\zeta_3z_1\zeta_2, \zeta_1z_2\zeta_3, \zeta_2z_3\zeta_1$	szögek	$\alpha,$
a	$z_3\zeta_1z_2, z_1\zeta_2z_3, z_2\zeta_3z_1$	" " "	$\alpha';$

akkor

$$(\zeta_1 z_1 z_2 z_3) = \frac{z_2 - \zeta_1}{z_3 - \zeta_1} : \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{r}{r'} e^{i(a' + \frac{\pi}{3})}$$

és

$$(z_1 \zeta_1' z_2 \zeta_3) = \frac{r'}{r} e^{i(\alpha + \frac{\pi}{3})}.$$

A két kettős viszony szorzata tehát

$$e^{i(a + a' + \frac{2\pi}{3})}.$$

Azonban $a + a'$ egyenlő a hatszög szögösszegének harmadával és így a kérdéses szorzat értéke

$$e^{i(\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = e^{2\pi i} = 1.$$

Ez volt bebizonyítandó.

(Szűcs Adolf)

A 2. feladat ötödik megoldása.

A következő általánosabb tételt bizonyítjuk be.

Ha a ζ_a, z_a ($a, a=1, 2, 3$) számok eleget tesznek a

$$A_a \equiv k_{a1}(\zeta_a z_1 + z_2 z_3) + k_{a2}(\zeta_a z_2 + z_3 z_1) + k_{a3}(\zeta_a z_3 + z_1 z_2) = 0 \quad (1^*)$$

$(a=1, 2, 3)$

egyenleteknek, melyekben

$$\begin{aligned} k_{a1} + k_{a2} + k_{a3} &= 0, & (a=1, 2, 3) \\ k_{1a} + k_{2a} + k_{3a} &= 0 & (a=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (*)$$

és z_1, z_2, z_3 páronként különbözők, akkor a

$$L_a \equiv k_{1a}(z_a \zeta_1 + \zeta_2 z_3) + k_{2a}(z_a \zeta_2 + \zeta_3 z_1) + k_{3a}(z_a \zeta_3 + \zeta_1 z_2) = 0 \quad (2^*)$$

$(a=1, 2, 3)$

egyenletek is ki vannak elégítve.

A (*) egyenletek következtében ugyanis a A_a és L_a formák közt fennállnak a

$$\begin{aligned} \Sigma A_a &\equiv \Sigma \Sigma k_{aa} \zeta_a z_a &\equiv \Sigma L_a, \\ \Sigma (\zeta_\beta + \zeta_\gamma) A_a &\equiv \Sigma \Sigma k_{aa} (\zeta_a z_\beta z_\gamma + z_a \zeta_\beta \zeta_\gamma) &\equiv \Sigma (z_\beta + z_\gamma) L_a, \\ \Sigma \zeta_\beta \zeta_\gamma A_a &\equiv \Sigma \Sigma k_{aa} \zeta_\beta \zeta_\gamma z_\beta z_\gamma &\equiv \Sigma z_\beta z_\gamma L_a \end{aligned}$$

identitások.

Továbbá, ha z_1, z_2, z_3 páronként különbözők, akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 + z_3 & z_3 + z_1 & z_1 + z_2 \\ z_2 z_3 & z_3 z_1 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \equiv (z_3 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_1) \neq 0;$$

tehát ekkor $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ -ból következik $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, q. e. d.

A $\|k_{aa}\|$ koeficiens-matrixnak speciális esetei:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \text{ illetve } \begin{vmatrix} -(a+b) & a & b \\ b & -(a+b) & a \\ a & b & -(a+b) \end{vmatrix},$$

tehát az itt bizonyított tétel a feladatban kimondott állítást, illetőleg annak a fenti negyedik (Szűcs-féle) megoldásban adott általánosítását, mint speciális esetet tartalmazza.

(Egerváry Jenő)

★

3. Egy konvex oktaéder lapsúlypontjai paralelepipedont határoznak meg; továbbá az oktaéder átlóinak végpontjain átmenő és a másik két átlóval párhuzamos síkok szintén paralelepipedont alkotnak. Behizonyítandó, hogy a nevezett két paralelepipedon hasonló, hasonló helyzetű és belső hasonlósági pontjuk az oktaéder testsúlypontja.

(Egerváry)

A 3. feladat megoldása.

A helyzetvektorok O kezdőpontjául az oktaéder egy belső pontját választjuk. A testátlók felezőpontjainak helyzetvektorai ⁴ $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. A félátlók szolgáltatott vektorok $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$, ezek alkossanak jobbrendezett s így vegyes szorzatuk $\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 > 0$. A csúcspontok tehát $\mathbf{f}_i \pm \mathbf{d}_i$ ($i=1, 2, 3$).

A lapsúlypontok az $\mathbf{f} = \frac{1}{3}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3)$ jelöléssel

$$\frac{1}{3}[(\mathbf{f}_1 + \varepsilon_1 \mathbf{d}_1) + (\mathbf{f}_2 + \varepsilon_2 \mathbf{d}_2) + (\mathbf{f}_3 + \varepsilon_3 \mathbf{d}_3)] = \mathbf{f} + \varepsilon_1 \frac{\mathbf{d}_1}{3} + \varepsilon_2 \frac{\mathbf{d}_2}{3} + \varepsilon_3 \frac{\mathbf{d}_3}{3},$$

ahol $\varepsilon_i = \pm 1$. E súlypontok tehát egy paralelepipedont adnak, melynek középpontja \mathbf{f} , élvektorai pedig $\frac{2}{3}\mathbf{d}_1, \frac{2}{3}\mathbf{d}_2, \frac{2}{3}\mathbf{d}_3$.

A körülírt paralelepipedon élvektorai a testátlókat adó $2\mathbf{d}_1, 2\mathbf{d}_2, 2\mathbf{d}_3$ vektorok. E paralelepipedon tehát az előbbihez hasonló, hasonló helyzetű és lineárisan annak háromszorosa. Középpontjának helyzetvektora

⁴ Ha egy pont helyzetvektora \mathbf{a} , akkor egyszerűség kedvéért magát a pontot is \mathbf{a} -val jelöljük.

legyen \mathbf{d} . Csúcspontjai tehát $\mathbf{d} + \varepsilon_1 \mathbf{d}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{d}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{d}_3$ ($\varepsilon_i = \pm 1$). Állítjuk, hogy \mathbf{d} -t a következő egyenlet szolgáltatja:

$$\mathbf{d} (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3) = \mathbf{d}_1 (\mathbf{f}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3) + \mathbf{d}_2 (\mathbf{d}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{d}_3) + \mathbf{d}_3 (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{f}_3). \quad (1)$$

Szimmetria-okokból elegendő például annak bizonyítása, hogy az (1) által értelmezett \mathbf{d} -re nézve a $(\mathbf{d} + \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3)$ és $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{d}_1)$ pontok összekötő vektora, azaz $(\mathbf{d} - \mathbf{f}_1 + \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_3)$, a \mathbf{d}_2 és \mathbf{d}_3 vektorok síkjába esik. Tehát $\mathbf{g} = \mathbf{d} - \mathbf{f}_1$, \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 komplanaritását kell igazolnunk. Az (1)

egyenletet skalárisan szorozva \mathbf{d}_2 és \mathbf{d}_3 vektoriális szorzatával

$$(\mathbf{d} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3) (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3) = (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3) (\mathbf{f}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3),$$

vagyis

$$(\mathbf{g} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3) (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3) = 0.$$

Tehát $\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 \neq 0$ miatt $\mathbf{g} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 = 0$.
Q. e. d.

Az oktaéder köbtartalma a körülírt paralelepipedonénak hatoda, vagyis

$$K = \frac{1}{3} \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3, \quad (2)$$

amint ez az oktaédert alkotó nyolc tetraéder köbtartalmának összegezésével is igazolható. A sűrűséget 1-nek választva, K egyben a tömeget

is adja. Az s súlypont meghatározása céljából a nyolc tetraéder mindegyikénél a tömeget négy egyenlő részre osztva a négy csúcspontra helyezzük. Így például az $\mathbf{a} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{d}_1$ pontba helyezett tömeget az O , \mathbf{a} , $\mathbf{f}_2 + \mathbf{d}_2$, $\mathbf{f}_3 + \mathbf{d}_3$ pontok meghatározták az oktaéder köbtartalmának negyede adja. Tehát az \mathbf{a} és $\mathbf{b} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{d}_1$ pontokba helyezett tömegek elsőrendű nyomatékai

$$\mathbf{a} \frac{\mathbf{a} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3}{6} + \mathbf{b} \frac{\mathbf{b} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3}{6} = \frac{1}{3} [\mathbf{d}_1 (\mathbf{f}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3) + \mathbf{f}_1 (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3)].$$

A teljes nyomaték tehát (1) felhasználásával

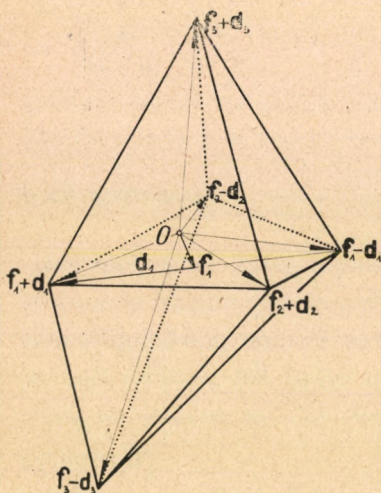
$$sK = \frac{1}{3} \mathbf{d} (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3) + \mathbf{f} (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3)$$

és így (2) alapján

$$\mathbf{s} = \frac{1}{4} (\mathbf{d} + 3\mathbf{f}).$$

Az s súlypont tehát belső hasonlósági pontja a \mathbf{d} középpontú és az \mathbf{f} középpontú s harmadakkora paralelepipedonnak.

(Hajós György)



TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1941. évi XLV. matematikai tanulóversenyről.

E versennyel kapcsolatban mindenekelőtt örömmel kell megállapítanunk, hogy az idén, 23 évi szünet után először, a versenyt Kolozsvárott is meg lehetett tartani. Ily módon versenyünket egyidejűleg Budapesten, Kolozsvárott és Szegeden rendeztük meg 1941. okt. 18-án. Budapesten 55 versenyző jelentkezett és beadott 43 dolgozat, Kolozsvárott és Szegeden egyaránt 8—8 versenyző jelentkezett, akik közül 5—5 adott be dolgozatot. Összesen tehát 53 dolgozatot kellett megbírálni.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Behizonyítandó, hogy

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots(1+x^{2^{k-1}}) = \\ = 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^{2^k-1}.$$

II. Valamely derékszögű sík-koordinátarendszerre vonatkozólag rács-pontoknak nevezzük a sík azon pontjait, melyeknek mindkét koordinátája egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely paralelogrammának szögpontjai rácsponatok és belsejében vagy határán van még más rácsponat is, akkor területe *nagyobb* 1-nél.

III. Egy körbeírt $ABCDEF$ hatszög AB , CD és EF oldalai egyenlők a kör sugarával. Behizonyítandó, hogy a többi három oldal felező-pontjai szabályos háromszöget határoznak meg.

A kiküldött bírálóbizottság tagjai voltak: FEJÉR LIPÓT elnökle alatt EGERVÁRY JENŐ, FARAGÓ ANDOR, KERÉKJÁRTÓ BÉLA, KÖNIG DÉNES, STACHÓ TIBOR, SZÜCS ADOLF és HAJÓS GYÖRGY előadó. (Kimentette magát: VERESS PÁL.) E bizottság 1941. okt. 31-én tartott ülésén HAJÓS GYÖRGY előadó előterjesztése alapján a következő egyhangú javaslatban állapodott meg.

«A verseny eredménye nem teljesen kielégítő: a III. feladatot egy versenyző sem oldotta meg és szabatoság tekintetében még a legjobb

dolgozatok ellen is merülnek fel kifogások. Ezért a Bizottság az első jutalom kiadását nem javasolja és azt indítványozza, hogy az első két feladat helyes és matematikai érzéket tanúsító megoldásáért IVANCSÓ IMRE és SCHWEITZER MIKLÓS egy-egy második Eötvös-jutalommal tüntetessék ki. IVANCSÓ IMRE a kassai premontrei gimnáziumban dr. Kassai Ernő tanárnak, SCHWEITZER MIKLÓS pedig a budapesti Mátyás király gimnáziumban Radványi László tanárnak tanítványa volt. Dícséretet érdemel SEMLYÉN ÁDÁM, aki a kolozsvári versenyen vett részt, valamint MENDELSON JÁNOS.

A bizottság e javaslatát a Választmány 1941. nov. 13-án tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadó-ülésen POGÁNY BÉLA alelnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Ivancsó Imre jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Első megoldás. A jobboldalon lévő mértani haladvány összege $S_n = \frac{1-x^{2^k}}{1-x}$, tehát a bebizonyítandó egyenlőség így írható:

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{k-1}}) = 1-x^{2^k}.$$

Ha sorban elvégezzük a baloldali szorzásokat, ez az egyenlőség rendre a következő alakokat veszi fel:

$$(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{k-1}}) = 1-x^{2^k},$$

$$(1-x^4)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{k-1}}) = 1-x^{2^k},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$1-(x^{2^{k-1}})^2 = 1-x^{2^k},$$

$$1-x^{2^k} = 1-x^{2^k}.$$

Az utóbbi pedig identitás.

Második megoldás. A tétel teljes indukcióval is bizonyítható; $k=1$ esetén a tétel nyilvánvalóan igaz: $1+x=1+x$. Tegyük fel, hogy igaz $k=n$ esetén és bizonyítsuk be, hogy akkor igaz lesz $k=n+1$ esetében is. Feltesszük tehát, hogy

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}}) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2^n-1}$$

és bebizonyítandó, hogy

$$\begin{aligned} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) &= \\ &= 1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőség

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}}) \cdot 1 + (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots \\ \dots(1+x^{2^{n-1}}) \cdot x^{2^n} = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2^{n+1}-1},$$

vagyis

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}})x^{2^n} = \\ = x^{2^n} + x^{2^n+1} + x^{2^n+2} + \dots + x^{2^n+2^n+1}$$

alakban írható; azaz x^{2^n} -nel egyszerűsítve az

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}}) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2^n-1}$$

egyenletet nyerjük, ami nem más, mint feltételünk. Mivelhogy a tétel $k=1$ esetén érvényes, így teljes indukcióval bebizonyítottuk, hogy tetszőleges k esetén is érvényes.

II. tétel. Transzformációval mindig elérhetjük, hogy az egyik szög-pont az O kezdőpont legyen. Legyen a két szomszédos szög-pont $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$. E parallelogramma területe $x_1y_2 - x_2y_1$. Ennek a területnek minimuma 1, minthogy a koordináták egész számok és nulla nem jöhet tekintetbe. Egy ily minimális parallelogramma *kerületén* nem lehet egy (a, b) rácspont, mert akkor $a:b = x_1:y_1$ (vagy $x_2:y_2$), vagyis x_1 és y_1 nem relatív prímek s így természetesen x_1 és y_1 legnagyobb közös osztója osztója lenne a terület mértékszámának is. De egy minimális parallelogramma *területén* sem fekszik egy rácspont, mert ha $P(a, b)$ ilyen rácspont volna, akkor ezt összekötve az O kezdőponttal és a P_1, P_2 pontokkal, találnánk egy OP_1P vagy OP_2P háromszöget, melynek területe kisebb lenne a minimális parallelogramma felénél, vagyis szerkeszthetnénk egy OPP_1X vagy OPP_2X parallelogrammát, melynek területe a minimális parallelogramma területénél kisebb lenne. Tehát ellentmondásra jutottunk, s így nyilvánvalóan a bizonyítandó tétel érvényes.

Schweitzer Miklós jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Első megoldás. Az $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{k-1}})$ szorzat kifejtett alakjában x legkisebb hatványkitevője 0, legnagyobb kitevője: $1+2+4+\dots+2^{k-1}=2^k-1$. Tehát

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{k-1}}) = \\ = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots + a_{2^k-1}x^{2^k-1}.$$

Itt $a_0=1$ és a_n jelenti, hogy hányféleképp lehet felírni n -et, mint 2 hatványainak összegét, ha a 2 minden hatványa legfeljebb egyszer szerepelhet és a sorrendet nem vesszük figyelembe. Nem csinálunk

tehát mást, mint n -et előállítjuk a kettes számrendszerben. De ismeretes, hogy a kettes számrendszerben minden szám egy- és csakis egyféleképp állítható elő. Tehát

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{2k-1} = 1, \text{ q. e. d.}$$

Második megoldás. A tétel $k=1$ -re igaz, ugyanis $1+x=1+x$. Tegyük fel, hogy igaz $k-1$ -re, azaz

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{k-2}}) = 1+x+x^2+\dots+x^{2^{k-1}-1}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $1+x^{2^{k-1}}$ -nel:

$$\begin{aligned} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{k-2}})(1+x^{2^{k-1}}) &= \\ &= (1+x^{2^{k-1}})(1+x+x^2+\dots+x^{2^{k-1}-1}). \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned} (1+x^{2^{k-1}})(1+x+x^2+\dots+x^{2^{k-1}}) &= \\ &= 1+x+x^2+\dots+x^{2^{k-1}-1}+x^{2^{k-1}}+\dots+x^{2^k-1}. \end{aligned}$$

Tehát a tétel k -ra is igaz. A tételt így teljes indukcióval igazoltuk.

II. tétel. A parallelogrammát az egyik átlóval két egyenlő területű háromszögre bontjuk. Ezek közül legalább egyiknek kerületén vagy belsejében van egy rácspon. Legyen ez a háromszög $P_1P_2P_3$. Ha a csúcspontokat összekötjük e rácsponnal, legalább két olyan háromszöget kapunk, melyeknek koordinátái egész számok. Ezek mind-egyikének területe legalább $\frac{1}{2}$. Ugyanis a háromszög ismert területi képlete szerint

$$t = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

hol most $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ egész számok. Ezért $2t$ feltétlenül szintén egész szám, tehát abszolút értéke legalább 1; így a terület legalább $\frac{1}{2}$. A $P_1P_2P_3$ háromszög területe tehát legalább 1 és a parallelogramma területe, mely ennek kétszerese, legalább 2, q. e. d.

Jelentés az 1941. évi XXII. «Károly Irén» fizikai tanulmányversenyéről.

Ezt a versenyt Társulatunk 1941. október 25-én tartotta Budapesten, Szegeden és Kolozsvárott egyidejűleg. Budapesten 16 versenyző jelentkezett, Szegeden 2 és Kolozsvárott 6. Budapesten 12 dolgozatot adtak be, Szegeden 2-t; Kolozsvárott 6-ot, tehát összesen 20-at.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. A földmágnesség adatait egy helyen meghatároztuk és azt találtuk, hogy a deklináció $12^\circ 30'$ nyugatra, az inklináció $64^\circ 20'$ s a

vízszintes térerősség 0.19 gauss. Később kiderült, hogy a mérések alkalmával egy mágnes volt a közelben, amit nem vettünk észre és amelytől a mérés helyén 0.04 gaussnyi vízszintes térerősség származott kelet felé. Számítsuk ki a földmágnesség adatainak helyes értékeit.

2. Galilei a következő kísérletet végezte: Az egyensúlyban lévő mérleg egyik karján két hengeres edény lógott egymás alatt; a felső edény vízzel telve, az alsó üresen. Galilei a felső edény fenekén lévő kis nyílást megnyitotta. Mit észlelt, miközben a víz átfolyt az alsó edénybe?

3. Lejtőn lefolyó folyadék (pl. folyám) felszínén valamilyen tárgy úszik. Minden esetben ugyanaz-e a tárgy sebessége, mint a vele egy sívóban folyó folyadéké?

A dolgozatokat elbíráló Bizottság, melynek elnöke POGÁNY BÉLA, tagjai BAY ZOLTÁN, HOFFMANN ERNŐ, MIKOLA SÁNDOR, ORTVAY RUDOLF, RYBÁR ISTVÁN, SARKADI KÁROLY és SZABÓ GÁBOR, mint előadó voltak, 1941. évi november 6-án tartott ülésén a következő javaslatban állapodott meg:

«Az 1. feladatot 7 versenyző oldotta meg. A 2. és 3. feladatot teljesen azonban senki sem. Ezért a Bizottság egyik Károly Irén-díj kiadását sem javasolja.

Azok közül, akik az 1. feladatot megfejtették, négyen a 2. és 3. feladat megoldására nézve is tettek néhány jó megjegyzést. Ezek dolgozatait a Bizottság dícséretre méltóknak tartja. Tisztelettel javasolja, hogy e dolgozatok szerzői: RAJZ MIKLÓS, aki a békéscsabai ev. Rudolf gimnáziumban végzett, FISCHMANN HERTA, aki a budapesti V. ker. közs. Ráskai Lea leánygimnáziumban, SEMLYÉN ÁDÁM, aki a kolozsvári ref. gimnáziumban, és HACKER JÁNOS, aki a budapesti V. ker. áll. Berzsenyi gimnáziumban végzett, dícséretben részesíttessenek.»

A Választmány a Bizottság e javaslatát 1941. nov. 13-án tartott ülésén elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadó-ülésen a Társulat alelnöke kihirdette a verseny eredményét.

Kimutatás

az 1941. évi június 1-től 1941. évi szeptember 30-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

1928-ra: Walek Károly (2).

1929-re: Walek Károly (4).

1933-ra: Fröhlich Pál (6).

1934-re: Fröhlich Pál (6).

1935-re: Fröhlich Pál (6).

1936-ra: Fröhlich Pál (2).

1938-ra: Alexits György (2), Kövesligethy Radó (8), Lajta Ernő (2), Veress Pál (1).

1939-re: Fraknóy József (8), Kövesligethy Radó (8), Tóth Géza (3), Turán Pál (8), Veress Pál (6).

1940-re: Albert Anna (8), Beke Manó (8), Bertram Brunó (6), Boros János (6), Bródy Imre (8), Cholnoky Jenő (6), Czukor Károly (8), Girsik Géza (6), Kövesligethy Radó (7.5), Szőkefalvi Nagy Béla (6), Patai László (4), Rédei László (8), Runtágné Perényi Gizella (6), Seres Iván (8), Szász Pál (8), Theiszné Vajk Magda (4), Vámos Sándor (6), Zányi László (6), Zigány Ferenc (3).

1941-re: Anderlik Előd (8), Balyi Károly (6), Bertram Brunó (6), Boérné Léber Margit (4), Budó Ágoston (6), Cservény Albin (6), Endrédy Vendel (2), Erőd János (6), Fejes László (6), Fenyő István (8), Grünwald Géza (8), Halmágyi László (8), Hárs János (8), Jákó József (8), Kovács István (8), Kovács János (8), Lassovszky Károly (8), Márton Sámuel (6), Nyáry Béla (8), Sass Gábor (6), Surányi János (6), Szabó Gábor (8), Szabó György (6), Szép Jenő (8), Tihanyi Miklós (6), Tóth Ferenc (6), Zányi László (4).

1942-re: Bauer Mihály (8), Endrédy Vendel (6), Fejes László (2).

2. Előfizetés.

1940-re: Debreceni Ref. Kollégium (6), Műegyetem I. Mat. (8).

1941-re: Bernardinum (8), Budapest Székesfőváros (152), Csillagvizsgáló (8), Műegyetem I. Mat. (8), Szegedi Bárány Eötvös Loránd Kollégium (6).

3. Adomány.

M. T. Akadémia 1941. II. (500), Franklin-Társulat (500).

Budapest, 1941. okt. 13.

Jelítai József,
pénztáros.

AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT TAGJAI AZ 1941. ÉV VÉGÉN.

Rövidítések: *Bp.* = Budapest, *vál. t.* = választmányi tag, *tiszt. t.* = tiszteleti tag, * = tagdíjfizetési kötelezettsége alól magát egy összegben felmentette.

- Albert Anna dr., áll. leánygimn. tanár, *Bp.*, XIV. Ajtósi Dürer-sor 37.
 Alexits György dr., főv. gimn. tanár, *Bp.*, XII. Győri-út 12.
 Anderlik Előd dr., műegyetemi ny. r. tanár, *Bp.*, XI. Bertalan Lajos-u. 4—6.
 Arany Dániel, ny. tanár, *Bp.*, XIV. Korong-u. 6.
 Aujeszký László dr.,* osztálymeteorológus, egyet. m. tanár, *Bp.*, II. Bogár-u. 6.
 Bacsó Vilmos, prem. gimn. tanár, *Gödöllő*.
 Bacsoni Jenő, a Nemzeti Bank ellenőre, *Bp.*, II. Riadó-u. 8a.
 Baintner Géza dr., áll. gimn. tanár, *Bp.*, II. Ilona-u. 4.
 Bakos Tibor, áll. gimn. tanár, *Szeged*, Baross-gimn.
 Balyi Ferenc, prem. gimn. tanár, *Gödöllő*.
 Bán Lajos, tanár, *Baja*, Batthyány-u. 23.
 Barnóthy Jenőné Forró Magda dr., egyetemi tanársegéd, *Bp.*, IV. Szép-u. 3.
 Barta József dr., műegyetemi m. tanár, *Bp.*, XI. Zenta-u. 5.
 Bauer Mihály, műegy. c. ny. rk. tanár, *Bp.*, VIII. Tisza Kálmán-tér 11., *vál. t.*
 Bay Zoltán dr., műegy. ny. r. tanár, *Újpest*, Egyesült Izzó kutató intézete, *vál. t.*
 Beke Manó dr., ny. egyet. ny. r. tanár, *Bp.*, II. Ady Endre-u. 26.
 Bertram Brunó, prem. tanár, rendi főszámvevő, *Jászóvár*.
 Bischitz László, áll. ipari középisk. tanár, *Bp.*, XIV. Szent Domonkos-u. 8.
 Bite Pál, áll. tanár, *Szeged*, Hétvezér-u. 39.
 Blau Ármin, ny. áll. tanár, *Szeged*, Párizsikörút 28.
 Blau Györgyné Bálint Emma dr., tanár, *Bp.*, V. Markó-u. 7.
 Boérné Léber Margit, tanár, *Székelgyudvarhely*, Ref. Tanítónőképző.
 Boharsik Pál dr., kegyesrendi tanár, *Vác*, Kegyesrendi gimn.
 Bor Pál, egyet. gyakornok, *Szeged*, Eötvös-kollégium.
 Bolla Györgyné dr., tanár, *Bp.*, XI. Buda-foki-út 10a.
 Bori István, áll. gimn. tanár, *Szenc*, Pázmány Péter-u. 53.
 Boros János dr., egyet. tanársegéd, *Debrecen*, Magoss György-tér 18a.
 Breuer József, mérnök, *Hajfa*, P. O. B. 969.
 Bródy Imre dr., tanár, *Újpest*, Dessewffy-utca 20.
 Budó Ágoston dr., főisk. tanár, egyet. m. tanár, *Szeged*, Boldogasszony-sugárút 6.
 Bukovszky Ferenc, gimn. tanár, *Kőszeg*, Ev. Leánygimn.
 Cholnoky Jenő dr., ny. egyetemi ny. r. tanár, *Bp.*, VIII. Rákóczi-út 29.
 Csada Imre dr., áll. tanítóképzőintézeti c. igazgató, *Bp.*, XII. Ferry Oszkár-u. 84.
 Csaplár Konrád, tanár, *Baja*, Ciszt. gimn.
 Császár Elemér dr., egyet. ny. r. tanár, *Pécs*, Rákóczi-út 80.
 Özv. Cseh Elekné Tillinger Stefánia dr., tanár, *Bp.*, XII. Böszörményi-út 13—15.
 Cseke Vilmos, tanár, *Kolozsvár*, Kat. gimn.
 Cservény Albin, kegyesrendi tanár, *Kolozsvár*, Egyetem-u. 7.
 Csízhelyi Lajos, tanár, *Kolozsvár*, Eötvös-utca 18.
 Czukor Károly, tanár, *Bp.*, II. Keleti Károly-u. 29.
 Darkó Béla dr., tanár, *Miskolc*, Papszer-utca 10.
 Darvas Jenő, áll. gimn. tanár, *Eger*.
 Dér Zoltán, áll. gimn. tanár, *Sopron*, Malom-u. 5.
 Detre László, obszervátor, *Bp.*, XII. Csillagvizsgáló.
 Dezső Lóránt dr., asszisztens, *Kolozsvár*, Majális-u. 69., Csillagv. intézet.
 Dombi József, egyet. gyakornok, *Szeged*, Eötvös-kollégium.

- Dózsa Márton, egyet. tanársegéd, *Bp.*, VIII. Horánszky-u. 6.
- Egerváry Jenő dr., müegy. ny. r. tanár, *Bp.*, IV. Kecskeméti-u. 4., *vál. t.*
- Egyed László dr., egyet. tanársegéd, *Bp.*, VII. Üllői-út 101.
- F. Ehrenhaft dr., egyet. tanár, *Wien*, IX. Boltzmanngasse 5., *tiszt. t.*
- Endrédy Vendel, zirci apát, *Zirc*.
- Erdős Pál dr., *Philadelphia* (Pa. USA), University of Pennsylvania, Mathematical Department.
- Eröd János, *Gyöngyös*, Pap Melchisedek-utca 7.
- Falábú Jenő, tanár, *Szeged*, Mérei-u. 7.
- Faragó Andor, áll. gimn. c. igazgató, *Bp.*, XI., Horthy Miklós-út 36., *vál. t.*
- Faragó Tibor dr., ref. leánygimn. tanár, *Miskolc*, Bizony Ákos-u. 13.
- Farkas Dénes dr., tanár, *Kecskemét*, Kegyesrendi gimn.
- Fejér Lipót dr., egyet. ny. r. tanár, *Bp.*, I. Krisztina-körút 165., *alelnök.*
- Fejes László dr., egyet. gyakornok, *Kolozsvár*, Farkas-u. 1.
- Fejes Zsigmond, tanügyi főtanácsos, gimn. igazgató, *Pápa*, Ref. gimn.
- Fekete Jenő dr., m. kir. főbányatanácsos, *Bp.*, XI. Fadrusz-u. 6.
- Feldheim Ervin dr., tanár, *Bp.*, VI. Gróf Zichy Jenő-u. 47.
- Fenyő István, *Bp.*, II. Keleti Károly-u. 11b.
- Ferenczy Zoltán dr., gimn. igazgató, *Bp.*, IV. Piarista-u.
- Festetics Sándor gr., földbirtokos, *Dég* (Veszprém m.)
- vitész Fraknóy József, tanker. főigazgató, *Bp.*, VIII. Sándor-u. 26.
- Frank János, ny. főisk. tanár, *Bp.*, I. Attila-u. 11.
- Fraunhoffer Lajos, meteor. int. igazgató, *Bp.*, II. Margit-rakpart 50.
- Fröhlich Pál dr., egyet. ny. r. tanár, *Szeged*, Egyetem.
- Gausz József, *Szeged*, Zákány-u. 15.
- Gergely Jenő dr., keresk. középisk. tanár, *Kolozsvár*, Marianum.
- Girsik Géza dr., áll. gimn. c. igazgató, *Bp.*, II. Szász Károly-u. 5.
- Goldziher Károly dr., müegy. c. ny. rk. tanár, *Bp.*, I. Mészáros-u. 12.
- Gombás Pál dr., egyet. ny. r. tanár, *Kolozsvár*, Farkas-u. 1.
- Görbe Imre, tanár, *Makó*, Batthyány-utca 37.
- Gróh Gyula dr., egyet. ny. r. tanár, *Bp.*, VIII. Eszterházy-u. 11—13.
- Grünwald Géza dr., tanár, *Bp.*, VI. Szondy-utca 95.
- Gyulai Zoltán dr., egyet. ny. r. tanár, *Kolozsvár*, Farkas-u. 1.
- Hajós Géza, tanár, *Debrecen*, Vilmos császár-körút 26.
- Hajós György dr., müegy. adjunktus, *Bp.*, II. Margit-körút 36.
- Halász Ernő, ny. mäv. műszaki főtanácsos, *Bp.*, II. Fillér-u. 81a.
- Halmágyi László dr., tanár, *Bp.*, II. Zsigmond király-útja 24.
- Hárs János dr., főv. keresk. középisk. tanár, *Bp.*, VIII. Déry-u. 15.
- Hausbrunner Vilmos, tanár, *Bp.*, V. Bálvány-u. 4.
- Heuer Ede tanár, *Bp.*, VIII. József-krt 15.
- Hoffmann Ernő dr., áll. gimn. tanár, *Bp.*, I. Logodi-u. 33., *jegyző.*
- Holenda Barnabás dr., főisk. tanár, *Győr*.
- Hoór Tempis Moric dr., müegy. c. ny. rk. tanár, *Bp.*, I. Attila-u. 77.
- Horvay Béla, gyakorló gimn. tanár, *Bp.*, VIII. Trefort-u. 8.
- Huhn Péter, *Szeged*, Eötvös-kollégium.
- Ispanovits Alajos dr., gimn. tanár, *Pécs*, Cisz. rendház.
- Jakab Györgyné Magyar Márta, főv. keresk. középisk. tanár, *Bp.*, XIV. Szt. Domonkos-utca 17.
- Jáky József dr., müegyetemi ny. r. tanár, *Bp.*, XI. Verpeléti-út 12.
- Jelitai József dr., egyet. magántanár, *Bp.*, II. Bimbó-u. 5., *pénztáros.*
- Jendrassik György, a Ganz-gyár h. vezérigazgatója, *Bp.*, X. Kőbányai-út 31.
- Jordan Károly dr.,* egyet. c. ny. r. tanár, *Bp.*, VIII. József-körút 65., *vál. t.*
- Jurányi Henrik, *Bp.*, IV. Váci-u. 40.
- Kalmár László dr., egyet. m. tanár, *Szeged*, Baross-u. 2.
- Kárteszi Ferenc dr., áll. gimn. tanár, *Bp.*, XI. Verpeléti-út 4b.
- Kedves Miklós tanár, *Szeged*, Szivárvány-utca 1b.
- Kelemen Szulpic dr., O. S. B., főisk. tanár, *Pannonhalma*, Apátság.
- Kerékjártó Béla dr., egyet. ny. r. tanár, *Bp.*, I. Ráth György-u. 24., *vál. t.*
- Kilczér Gyula, ev. gimn. tanár, *Bp.*, VII. Vilma királyné-út 19.
- Klug Lipót dr., ny. egyet. ny. r. tanár, *Bp.*, VII. Nagyatádi Szabó-u. 38., *tiszt. t.*
- Kolbenheyer Tibor, tanárjelölt, *Bp.*, Sváb-hegy, Csillagvizsg. intézet.
- Komjáthy Aladár dr., min. oszt.-tanácsos, *Bp.*, II. Ilona-u. 6.

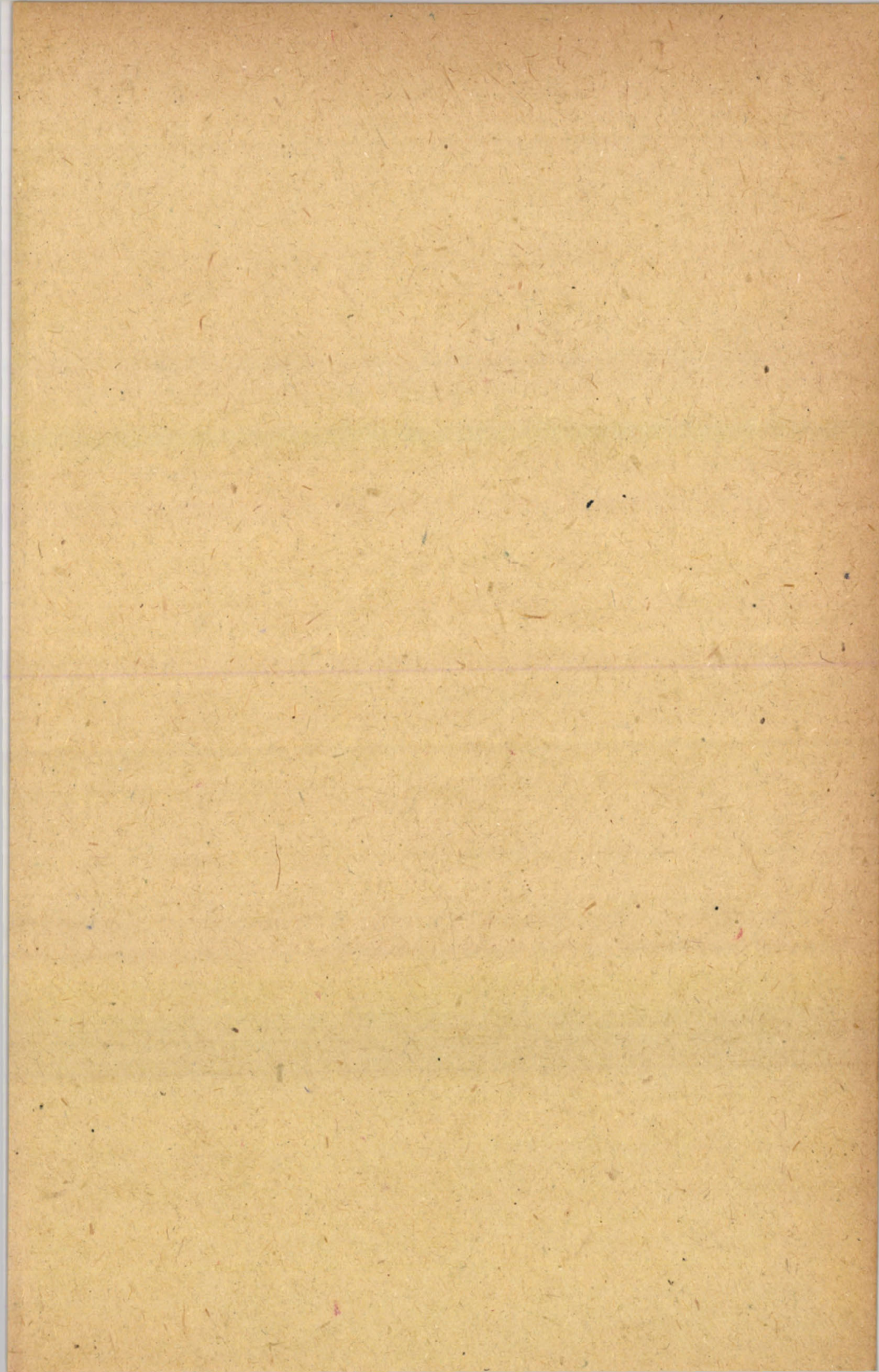
- Kónya Albert, egyet. tanársegéd, *Kolozsvár*, Farkas-u. 1.
- Kovács István dr., *Bp.*, VII. Damjanich-utca 32.
- Kovács János dr., főisk. igazgató, *Bp.*, XII. Ferry Oszkár-u. 47.
- König Dénes dr., műgyet. c. ny. rk. tanár, *Bp.*, XI. Horthy Miklós-út 28., *titkár*.
- Kövesligethy Radó dr., *Hoboken* (Belgium), 51. Kioskplace.
- Kövessi Ferenc dr., műgyet. ny. r. tanár, *Bp.*, VIII. Vas-u. 5.
- Kresznerics Károly dr.,* áll. gimn. tanár, *Bp.*, Margit-körút 64a.
- Kronberger Ede, c. tanügyi főtanácsos, *Bp.*, Trefort-u. 8.
- Kuzaila Péter, ny. tanítóképzőint. igazgató, *Nyíregyháza*, Zrínyi Ilona-u. 7.
- Kulin György dr., asszisztens, *Bp.*, Svábhegy, Csillagv. intézet.
- Lajta Ernő dr., keresk. középisk. tanár, *Bp.*, VI. Hegedűs Sándor-u. 31.
- Lassovszky Károly dr., a svábhegyi csillagvizsgáló int. igazgatója, *Bp.*, XII. Konkoly Thege-út, *vál. t.*
- Lázár Dezső, középisk. tanár, *Kolozsvár*, Thököly-u. 13.
- Lipka István dr., egyet. m.-tanár, *Szeged*, Baross Gábor-u. 2.
- Lóky Béla dr., ny. főigazgató, *Tata*, Kegyesrendi ház, *vál. t.*
- Luckhaub Gyula dr., egyet. ny. r. tanár, *Kolozsvár*, Bástya-u. 13.
- Magi Ferenc,* áll. gimn. tanár, *Hajdúnánás*, Széchenyi-körút 3.
- Marcell György, ny. meteor. int. igazgató, *Bp.*, II. Nagyajtai-u. 4a.
- Maróthi Ferenc, c. áll. gimn. igazgató, *Bp.*, XI. Fehérvári-út 13.
- Márton Sámuel, tanár, *Kolozsvár*, Unitárius gimn.
- Mátrai Lászlóné Zemplén Jolán dr., műgy. tanársegéd, *Bp.*, XI. Takács Menyhért-u. 4.
- Megyesi István dr., áll. gimn. tanár, *Bp.*, VII., Dembinszky-u. 30.
- Mikola Sándor,* c. főigazgató, *Bp.*, VII. Vilma királyné-út 33., *vál. és tiszt. t.*
- Milakovszky László tanár, *Esztergom*, Bottyán-u. 11.
- Misángyi Vilmos dr., műgyet. ny. r. tanár, *Bp.*, XI. Műgyetem.
- Mischung Ilona, egyet. tanársegéd, *Szeged*, Fizikai intézet.
- Mitnyán László, áll. gimn. tanár, *Székesfehérvár*, Basa-u. 1.
- szőkefalvi Nagy Béla dr., főisk. r., egyet. m. tanár, *Szeged*, Boldogasszony-sugár-út 6.
- Nagy Ferenc, tanügyi tanácsos, *Bp.*, IX. Bakáts-u. 5.
- szőkefalvi Nagy Gyula dr., egyet. ny. r. tanár, *Kolozsvár*, Farkas-u. 1.
- Nagy L. József,* kegyesrendi tanár, *Magyaróvár*, *vál. t.*
- Nagy István, gimn. tanár, *Marosvásárhely*, Bethlen Gábor-u. 34.
- Náray-Szabó István dr., műgyet. ny. r. tanár, *Bp.*, XI. Műgyetem.
- Nemes Béla, egyet. gyakornok, *Szászfenes* (Kolozs m.)
- Neográdyné Haich Sarolta, a Nemzeti Bank tisztviselője, *Bp.*, II. Lorántffy Zsuzsanna-út 2.
- Neubauer Konstantin dr., c. tanügyi főtanácsos, *Bp.*, I. Csalán-út 31.
- Neumann Erzsébet, tanár, *Bp.*, V. Szent István-körút 4.
- Neumann János dr., egyet. tanár, *Princeton* (USA), Intitute for Advanced Study, *tiszt. t.*
- Novobátszky Károly, c. áll. gimn. igazgató, *Bp.*, VI., Munkácsy-utca 26., *vál. t.*
- Nyáry Béla, ny. ref. gimn. tanár, *Bp.*, XI., Fadrusz-u. 4.
- Oltay Károly, műgyet. ny. r. tanár, *Bp.*, Horthy Miklós-út 79.
- Orbán György dr., egyet. m.-tanár, *Pécs*, Fizikai intézet.
- Ortvay Rudolf dr., egyet. ny. r. tanár, *Bp.*, II. Gábor Áron-u. 18., *titkár*.
- Pancratz Edit, *Szeged*, Vitéz-u. 1.
- Pápai Nárcisz, bencés tanár, *Győr*, Széchenyi-tér 9.
- Papp Margit, ref. leánylíceumi tanár, *Bp.*, II. Lorántffy Zsuzsanna-út 3.
- Patai Imre dr., gyárigazgató, *Bp.*, V. Szent István-körút 17., *vál. t.*
- Patai László, biztosító matematikus, *Bp.*, V. József-tér 12.
- Pekár Dezső dr.,* miniszt. tanácsos, *Bp.*, VIII. Eszterházy-u. 7.
- Péter Gyula dr., egyet. tanársegéd, *Bp.*, IV. Kossuth Lajos-u. 1.
- Péter Rózsa dr., tanár, *Bp.*, VI. Vilmos császár-ut 19c.
- Pogány Béla dr., műgyet. ny. r. tanár, *Bp.*, XI. Műgyetem, *alelnök*.
- Pólya György dr.,* egyet. tanár, *Providence* (USA), Brown University.
- Radó Simon, ny. áll. gimn. tanár, *Bp.*, V. Visegrádi-u. 64.

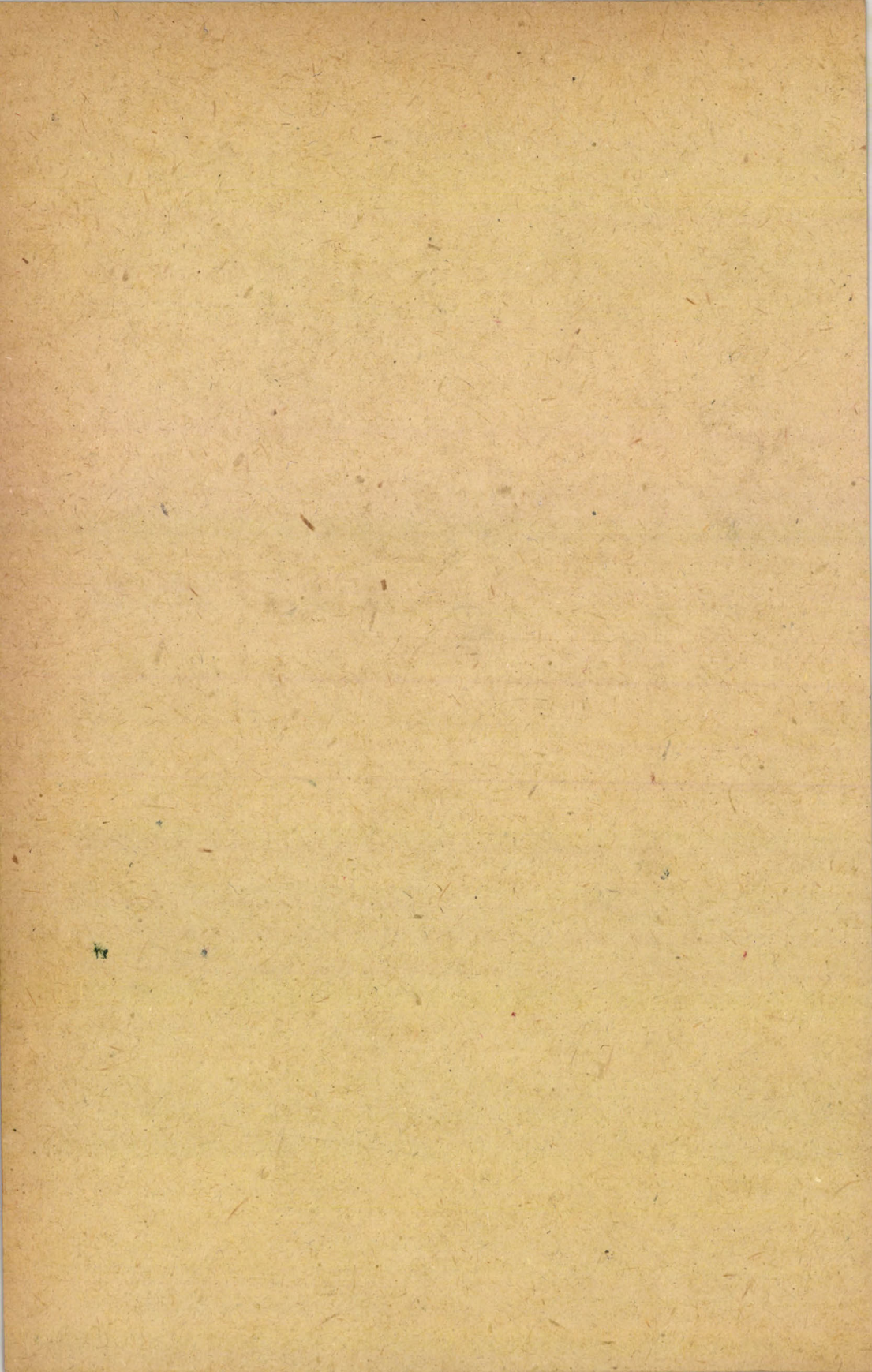
- Radó Tibor dr., egyet. tanár, *Columbus* (Ohio, USA), State University.
- Rados Gusztáv dr., ny. műegyet. ny. r. tanár, *Bp.*, XII. Budakeszi-út 34b, *elnök*.
- Rados Ignác, ny. c. áll. gimn. igazgató, *Bp.*, XII. Kuruclesi-út 12.
- Rédei László dr., egyet. ny. r. tanár, *Szeged*, Tisza Lajos-körút 37.
- Renner János dr., c. gimn. igazgató, *Bp.*, X. Héderváry-u. 42.
- Reuss Endre dr., a főv. gázművek tisztviselője, *Bp.*, II. Gyorskocsi-u. 30.
- Riesz Frigyes dr., egyet. ny. r. tanár, *Szeged*, Baross-u. 2., *vál. t.*
- Riesz Marcell dr., egyet. tanár, *Lund* (Svédország).
- Romsauer Lajos dr., műegyet. ny. r. tanár, *Bp.*, XI. Sasadi-út 21.
- Róna Erzsébet dr., *Bp.*, VI. Vilmos császár-út 61.
- Róth Antal S. J., *Szeged*, Löw-u. 20.
- Rucsinszki Lajos, ny. tanár, *Bp.*, V. Vécsey-u. 5.
- Runtagné Perényi Gizella, leányliceumi tanár, *Székesfehérvár*, Távirdu-u. 25.
- Rybár István dr., egyet. ny. r. tanár, *Bp.*, III. Áldás-u. 5., *vál. t.*
- Sarkadi Károly, ny. áll. gimn. tanár, *Bp.*, II. Eszter-u. 12b, *vál. t.*
- Sárközy Pál dr., * egyet. c. ny. rk. tanár, apát, *Bakonybél*.
- Sas Ernő, tanár, *Újpest*, István-u. 4.
- Sass Gábor, gazd. akad. r. tanár, *Moson-magyaróvár*.
- Sasvári Géza dr., * műegyet. c. ny. rkív. tanár, *Bp.*, VII. Stefánia-út 49.
- Schaller Mátyás, bencés gimn. tanár, *Sopron*, Templom-u. 1.
- Schay Géza dr., egyet. c. ny. rk. tanár, *Bp.*, XII. Ugocsa-u. 8a.
- Schimanek Emil dr., műegyet. ny. r. tanár, *Bp.*, Kossuth Lajos-tér 14—15.
- Sebők Emánuel, gimn. tanár, *Debrecen*, Rákosi Jenő-u. 5.
- Seres Iván, *Bp.*, X. Belső Jászberényi-út 36.
- Skopál István, ny. áll. gimn. c. igazgató, *Bp.*, II. Donáti-u. 44.
- A. Sommerfeld dr., egyet. tanár, *München*, *tiszt. t.*
- Sólyi Antal dr., tanár, *Ujpest*, 4.
- Somogyi Antal, műsz. tanácsos, *Bp.* VI. Hajós-u. 15.
- Strommer György, gépészmérnökjelölt, *Bp.*, Svábhegy, Csillagv. intézet.
- Sós Ernő dr., tanár, *Bp.*, VII. Vilma királynő-út 23.
- Stachó Lajos, *Szeged*, Munkácsy-u. 10.
- Stachó Tibor dr., * műegyet. ny. r. tanár, *Bp.*, Horthy Miklós-út 15b, *vál. t.*
- Steiner Lajos dr., egyet. m. tanár, meteor. int. ny. igazgató, *Budatétény*, Jókai Mór-út.
- Surányi János, *Kál* (Heves m.).
- Szabó Gábor, ny. főisk. tanár, *Bp.*, XI. Verpeléti-út 7., *vál. és tiszt. t.*
- Szabó Gusztáv dr., műegyet. ny. r. tanár, *Bp.*, XI. Műegyetem.
- Szabó György, tanár, *Bánffyhyunad*, Polg. iskola.
- Szabó Katalin, *Szeged*, Alföldi-u. 8.
- Szabó László, ny. tanár, *Kézdivásárhely*, Új-út 12.
- Szabó Miklósné Nagy Sarolta dr., ny. áll. gimn. tanár, *Bp.*, X. Delej-u. 28.
- Szádeczky-Kardoss Géza, műegyet. hallg., *Bp.*, Budafoki-út 81.
- Szántó Fidél, tanár, *Budafok*, Prem. gimn.
- Szántó Sándor, vámszaki felügyelő, *Bp.*, VIII. Baross-u. 17.
- Szarvasy Imre dr., műegyet. ny. r. tanár, *Bp.*, XI. Gellért-szálló.
- Szász Ottó dr., egyet. tanár, *Cincinnati* (Ohio, USA).
- Szász Pál dr., egyet. magántanár, *Bp.*, XII. Ferry Oszkár-u. 57.
- Szebehely Győző, műegyet. hallgató, *Bp.*, XI. Albert-u. 38.
- Szegő Gábor dr., egyet. tanár, *Stanford University* (USA).
- Székely Károly, ny. tanár, *Baja*, Ciszt. Rendház.
- Széky István, tanár, *Tiszaigaz.*
- Szele Tibor, egyet. tanársegéd, *Szeged*, Dóm-tér, Fizikai intézet.
- Szeliánszky Ferenc, áll. gimn. igazgató, *Dunaszerdahely*.
- Széll Kálmán dr., egyet. ny. r. tanár, *Szeged*, Egyetem.
- Szélpál István, középisk. tanár, *Szeged*, Közép-u. 19.
- vitész Szép Jenő, bölcsészeti hallgató, *Bp.*, VII. Péterfy Sándor-u. 40.
- Szily Kálmán dr., * m. kir. titkos tanácsos, államtitkár, *Bp.*, XI. Somló-út 66.
- Szombathy Miklós, áll. tanítóképzőint. tanár, *Jászberény*.
- Szőke Béla, keresk. középisk. igazgató, *Bp.*, XI. Bocskai-út 75.
- Szűcs Adolf Endre dr., műegyet. c. ny. rk. tanár, *Bp.*, II. Szalag-u. 6., *jegyző*.
- Tardos Vida dr., tanár, *Sopron*, Bencés Székház.
- Tarnóczy Tamás, tanársegéd, *Bp.*, XI. Műegyetem.

- Theisz Edéné dr. Vajk Magda, egyet. tanársegéd, *Bp.*, XII. Modori-út 3.
- Tihanyi Miklós tanár, *Esztergom*, Bencés Rendház.
- Tobisch János mérnök, *Bp.*, XI. Horthy Miklós-út 35.
- Tolnai Jenő, főv. keresk. középisk. tanár, *Bp.*, V. Légrády K.-u. 31.
- Tóth Ferenc, tanár, *Miskolc*, Ref. gimn.
- Tóth Géza dr., c. tanügyi főtanácsos, *Bp.*, VI. Felsőerdősor 1.
- Tóth Lajos dr., egyet. m.-tanár, *Debrecen*, Csapó-u. 59.
- Török Sándor, középisk. tanár, *Kolozsvár*, Király-u. 47.
- Turán Pál dr., tanár, *Bp.*, VI. Izabella-utca 41.
- Ujj Gyula, tanár, *Bp.*, XI. Töröcsvári-utca 36.
- Urbán Erzsébet, egyet. tanársegéd, *Szeged*, Somogyi-u. 21.
- Vajk Raul dr., egyet. m.-tanár, *Bp.*, II. Küküllő-u. 12.
- Vámos Sándor, áll. gimn. tanár, *Újpest*, Virág-u. 46.
- Varga Dezső, tanár, *Jászberény*, Tanítóképző.
- Varga Ottó dr., egyet. int. tanár, *Kolozsvár*, Közp. egyetem, Geom. intézet.
- Varga Zoltán, középisk. tanár, *Gödöllő*, Kolozsvári-út 20.
- Vázsonyi Endre dr., *Cambridge* (Mass, USA), Harvard University.
- Veress Pál dr., egyet. c. ny. rk. tanár, *Bp.*, XII. Hieronymi-út 13., *vál. t.*
- Vescan Teofil dr. áll. gimn. tanár, *Kolozsvár*, Hitler Adolf-tér 1.
- Vincze István, tanár, a Hazai Biztosító tisztviselője, *Bp.*, IV. Vigadó-tér 1.
- Vörös Cyrill dr., ny. igazgató, *Sátoraljaújhely*, Kegyesrendi székház.
- Wigner Jenő dr., egyet. tanár, *Princeton* (USA).
- Zányi László dr., kegyesrendi tanár, *Sátoraljaújhely*.
- Zemplén Géza dr.,* műgyet. ny. r. tanár, *Bp.*, XI. Horthy Miklós-út 28.
- Zigány Ferenc dr., műgyet. magántanár, *Bp.*, XI. Horthy Miklós-út 88.
- Zipernovszky Károly, ny. műgyet. ny. r. tanár, *Bp.*, II. Trombitás-út 5.



Felelős kiadó: Ortvay Rudolf.
Franklin-Társulat nyomdája. — vitéz Litvay Ödön.





Tagjainkhoz.

Társulatunkhoz befolyt jubiláris adományok, melyekről megelőző két füzetünkben számoltunk be, lehetővé teszik, hogy lapunk jelen kötetét és valószínűleg néhány további kötetet jelentékenyen megnövesztett terjedelemben küldhessünk szét tagjainknak.

Ebből az alkalomból t. tagjaink segítségét is kérjük, fel-szólítva őket, hogy

új tagokat szerezzenek Társulatunknak.

A tagokul ajánlottak nevét, foglalkozását és lakáscímét kérjük az ügyvezető titkárral (Ortway Rudolf, Budapest, VIII. Múzeum-körút 4/c, Egyetemi elméleti fizikai intézet) közölni.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (XI, *Horthy Miklós-út 28., Lénárt-pensio*), a fizikai tárgyúak pedig *Ortway Rudolf* (VIII, *Múzeum-körút 4/c, Egyetemi elméleti fizikai intézet*) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikhoz néhány soros idegen-nyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrektúrára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyoma-tot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyó-irat-cserepéldányok *Ortway Rudolf* titkár címére küldendők.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámhlájára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, cím-változások *Jelítai József* pénztáros címére (II., Bimbó-út 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Ad-resse des Geschäftsführenden Secretärs *R. Ortway*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *R. Ortway*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

40 éve gyárt
tudományos műszereket,
korszerű tanszereket,
optikai eszközöket,
elektromos mérőműszereket,
repülőgépműszereket,
laboratóriumi bútorzatot,
vetítőgépeket

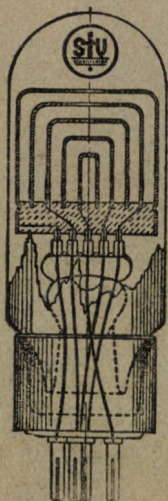
MARX ÉS MÉREI

Budapest, VI., Bulcsu-utca 7. szám

Eladási osztály:

Budapest, VI., Váci-út 18. szám

A „STABILISATOR“



az egyenirányítót vagy bármilyen más áramforrást
akkumulátorral egyenértékű, állandó feszültségű, kis
belsőellenállású áramforrássá alakítja át.

A «stabilizált» feszültség csak kb. $\pm 0,1\%$ -ot
változik $\pm 10\%$ tápláló feszültség ingadozásnál: kb.
1—2%-ot változik üresjárás és teljes terhelés között;
0,01%-ra függenek csak egymástól a részfeszültségek.

Tehetetlenség nélkül szabályoz. Önfogyasztás: né-
hány mA. A Stabilisator kicsi, könnyű, üzembiztos,
olcsó. Új típusok!

Elméleti és gyakorlati műszaki leírást kívánatra
díjtalanul küld a

STABILOVOLT GmbH

Berlin SW 68 Wilhelmstrasse 130

magyarországi képviselője

Dr. GOLDBERGER MIHÁLY

Budapest, VII., Bajza-utca 4. — Telefon: 1-425-09.